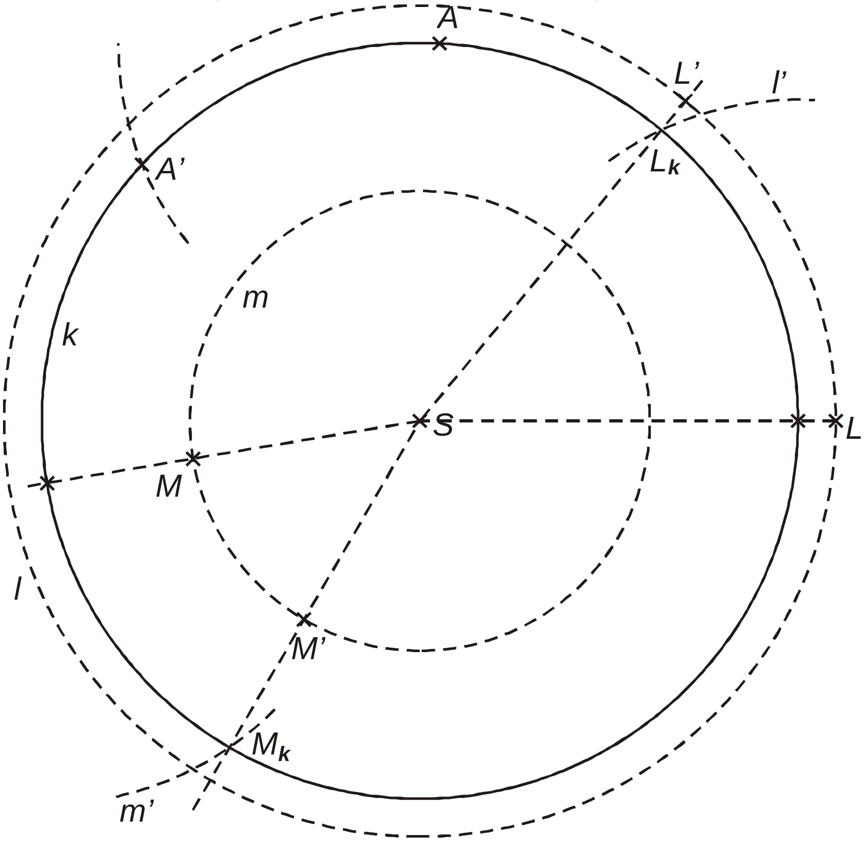
3.5.9 Příklady na otočení

Předpoklady: 3508

Př. 1: Je dána kružnice $k(S;5\,\text{cm})$, na které leží body A, A'. Vně kružnice leží bod L, uvnitř kružnice bod M. Nakresli obrazy bodů L, M v zobrazení $R\left(S;\widehat{ASA'}\right)$. Příklad řeš bez úhloměru.

Při konstrukci využijeme skutečnosti, že úhly $\widehat{KSK'}$, $\widehat{LSL'}$ a $\widehat{MSM'}$ jsou shodné s úhlem $\widehat{ASA'}$ a musí tedy na kružnici k vytknout stejný oblouk.



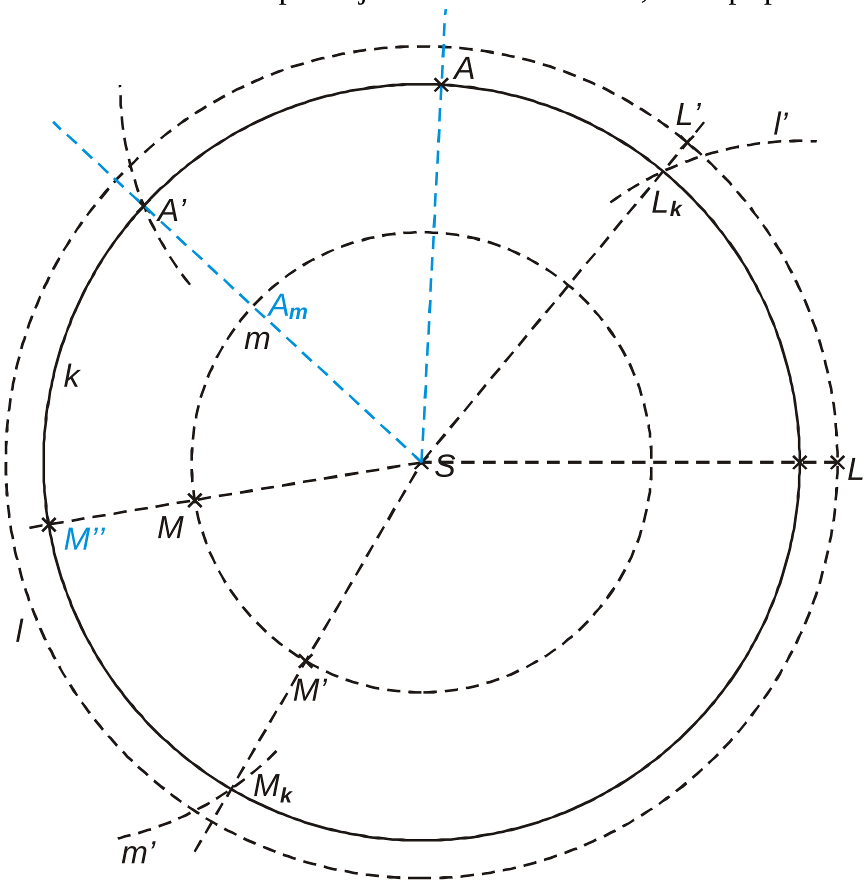
Zápis konstrukce:

1. $k(S;5), A, A'; A \in k, A' \in k$
2. $L, M; |SL| > 5\,\text{cm}, |SM| < 5\,\text{cm}$
3. $l(S;|LS|), m(S;|MS|)$
4. $l'(\mapsto SL \cap k; |AA'|), m'(\mapsto SM \cap k; |AA'|)$
5. $L_k \in k \cap l', M_k \in k \cap m'$
6. $L' \in l \cap \mapsto SL_k, M' \in m \cap \mapsto SM_k$

Dodatek: Samozřejmě je možné využít i délky oblouků na pomocných kružnicích m a l (v tom případě, je však nutné narýsovat do obrázku polopřímky SA a SA', které v řešení příkladu nejsou narýsovány (ale jsou v pedagogické poznámce níže).

Pedagogická poznámka: Předchozí konstrukce je nutná, je třeba ji využívat, pro mnoho žáků není samozřejmá a musí si ji vyzkoušet v jednodušším obrázku. Čím větší je úhel $\widehat{ASA'}$, tím větší problémy žákům konstrukce působí.

Pedagogická poznámka: Objevuje se i mnoho dalších konstrukcí, které většinou využívají shodnost nějakých nenarýsovaných trojúhelníků (například trojúhelníku $AA'A_m$ s trojúhelníkem $M'M''M$). Taková řešení nezakazuji, ale snažím se o to, aby si všichni nakreslili alespoň u jednoho z bodů řešení, které připomíná otočení.



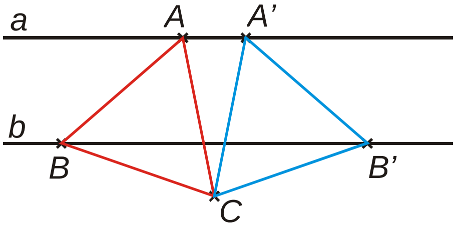
Př. 2: Zopakuj dva základní typy příkladů, které jsme řešili pomocí shodných zobrazení.

„Spojovací“ příklady
V rovině hledáme dva body, o obou máme neúplnou (jednu) informaci (bod leží na přímce, kružnici, …). Pokud najdeme mezi body vztah popsaný shodností, můžeme všechny podezřelé možnosti pro jeden z bodů zobrazit, tím obě informace spojit a najít druhý bod.
„Dokončovací“ příklady
Hledáme bod (útvar), který má splňovat nějaké podmínky. Nedokážeme najít útvar tak, aby všechny podmínky ihned splňoval. Sestrojíme bod (útvar), který splňuje všechny podmínky až na jednu. Tento útvar pomocí shodného zobrazení přemístíme tak, aby splňoval i zbývající vynechanou podmínku.

U následujících příkladů budeme vždy nejdříve zkoumat, zda nepatří do jedné ze zmiňovaných skupin (pak víme, čeho si máme všímat a jak bude řešení přibližně vypadat).

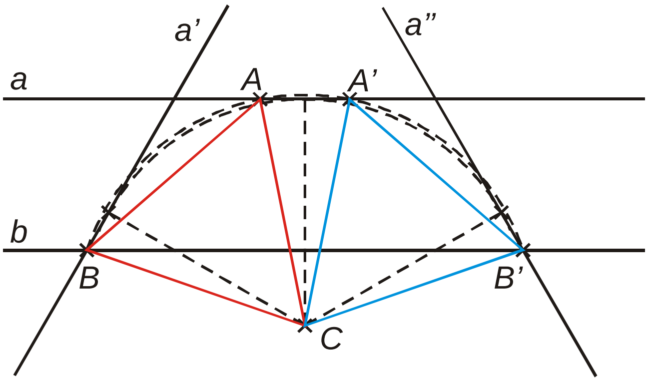
Př. 3: Jsou dány dvě rovnoběžné přímky *a*, *b* a mimo ně bod *C*. Sestroj všechny rovnostranné trojúhelníky *ABC* tak, aby platilo $A \in a$, $B \in b$.

Náčrtek:



Hledáme dva body, u obou máme neúplnou informaci (leží na přímce) $\Rightarrow$ zřejmě spojovací příklad $\Rightarrow$ snažíme se zobrazit jeden bod na druhý.
Body *A*, *B* jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníku $\Rightarrow$ platí $|AC| = |BC|$, $|\sphericalangle ACB| = 60°$ $\Rightarrow$ bod *A* můžeme zobrazit na bod *B* v otočení $R(C;60°)$ nebo $R(C;-60°)$ $\Rightarrow$ zobrazíme v těchto otočeních přímku *a*, kde se její obrazy protnou s přímkou *b*, tam leží bod *B*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $a, b, C; a \parallel b; C \notin a, C \notin b$
2. $a'; R(C;60°): a \to a'$
3. $B = a' \cap b$
4. $A; R(C;-60°): B \to A$
5. ABC
6. $a''; R(C;-60°): a \to a''$
7. $B' = a'' \cap b$
8. $A'; R(C;60°): B' \to A'$
9. $A'B'C$

Rozbor:
Úloha má vždy dvě řešení.

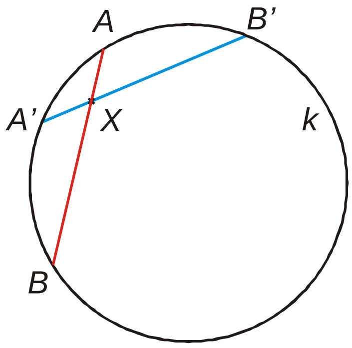
Př. 4: Kolik řešení by předchozí úloha měla v případě, že by přímky *a*, *b* byly různoběžné?

Řešení najdeme vždy, když obraz přímky *a* není rovnoběžný s přímkou *b* $\Rightarrow$ přímka *a* nesmí s přímkou *b* svírat úhel $60°$. Pokud je obraz přímky *a* s přímkou *b* totožný, má příklad nekonečně mnoho řešení.

- $|\sphericalangle pq| \neq 60°$ $\Rightarrow$ dvě řešení.
- $|\sphericalangle pq| = 60°$, $R(C;60°): p \to q$ nebo $R(C;-60°): p \to q$ $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení.
- $|\sphericalangle pq| = 60°$, $R(C;60°): p \not\to q$ a $R(C;-60°): p \not\to q$ $\Rightarrow$ jedno řešení.

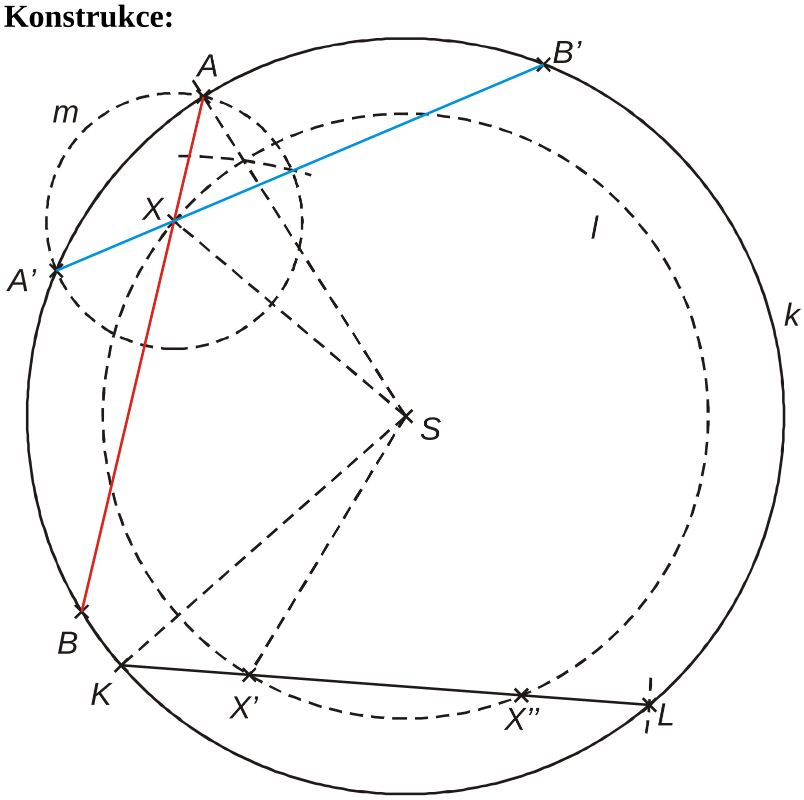
Př. 5: Je dána kružnice $k(S;5\,\text{cm})$ a bod *X*, $|XS| = 4\,\text{cm}$. Najdi všechny tětivy *AB* kružnice *k* takové, aby procházely bodem *X* a měly délku 7 cm.

Náčrtek:



Zdá se, že příklad může patřit do obou skupin. Hledáme dva body *A*, *B*, o obou máme neúplnou informaci. Marně hledáme zobrazení jednoho z bodů na druhý (*X* nemusí být středem úsečky *AB*, neznáme směr posunutí ani úhel případného otočení okolo bodu *S*) $\Rightarrow$ zkusíme druhou možnost (jde o dokončovací příklad).
Hledáme tětivu, která splňuje dvě podmínky $\Rightarrow$ první podmínku (délka 7 cm) splníme snadno, všechny tětivy kružnice *k* o délce 7 cm můžeme navzájem zobrazovat otočením o vhodný úhel okolo středu *S* $\Rightarrow$ nakreslíme libovolnou tětivu o délce 7 cm a otočíme ji o potřebný úhel tak, aby procházela bodem *X*.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $k(S;5\,\text{cm})$
2. $l(S;4\,\text{cm})$
3. $X; X \in l$
4. $K; K \in k$
5. $L; L \in k, |KL| = 7\,\text{cm}$
6. $X', X''; X' \cup X'' = l \cap KL$
7. $A; R\left(S; \widehat{X'SX}\right): K \to A$
8. $B; B \in \leftrightarrow AX \cap k$
9. $m(X; AX)$
10. $A'; A' \in k \cap m$
11. $B'; B' \in \leftrightarrow A'X \cap k$

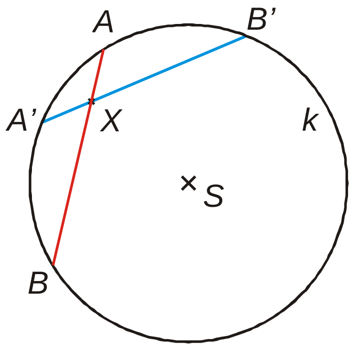
Rozbor:
Úloha má pro zadané rozměry vždy dvě řešení.

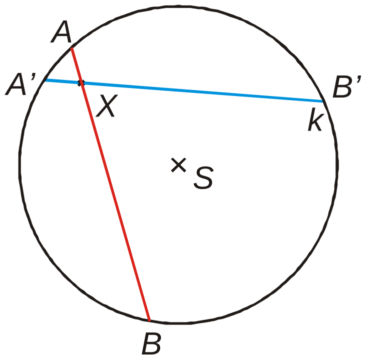
Pedagogická poznámka: Při diskusi o příkladu by se nemělo zastírat, že na první pohled by mohlo jít o „spojovací“ příklad, některé žáky to určitě napadne jako první možnost. Nápad je to přirozený a pokud neprojdete a nevyloučíte jednotlivá zobrazení, získává pro tyto žáky příklad příchuť neproniknutelné magie.
Na začátku příkladu nespecifikujeme, jak najdeme vhodné otočení. Někteří žáci při jeho hledání budou potřebovat pomoc.

Bod A' můžeme samozřejmě najít také pomocí otočení $R\left(S; \widehat{X''SX}\right)$.

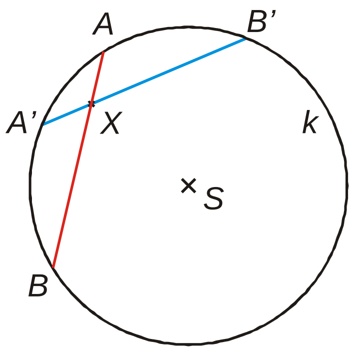
Př. 6: (BONUS) Urči, pro které délky tětivy *AB* má předchozí příklad řešení. Pro extrémní délky tětivy *l* odvoď vzorec závislosti na poloměru *r* kružnice *k* a vzdálenosti bodu *X* od středu kružnice *d*.

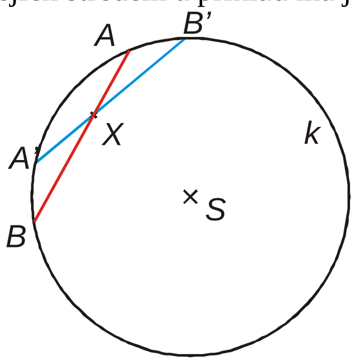
Pokud zvětšujeme délku tětivy, přibližují se obě řešení průměru kružnice $\Rightarrow$ pro největší možnou délku tětivy platí $l = 2r$, obě tětivy splývají v průměr kružnice a příklad má jediné řešení.



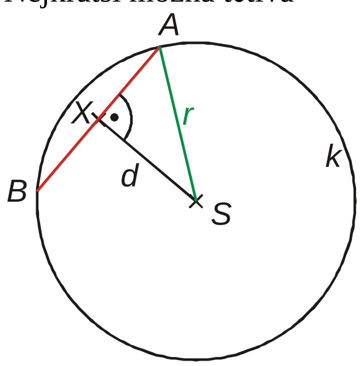


Pokud zmenšujeme délku tětivy, bod *X* se blíží středu tětivy $\Rightarrow$ při nejmenší možné délce tětivy, obě tětivy splývají, bod *X* je jejich středem a příklad má jediné řešení.





Nejkratší možná tětiva

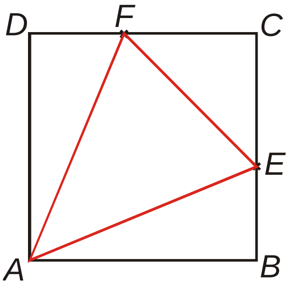


Z obrázku platí: $\left(\frac{l}{2}\right)^2 = r^2 - d^2$.

$l^2 = 4\left(r^2 - d^2\right)$

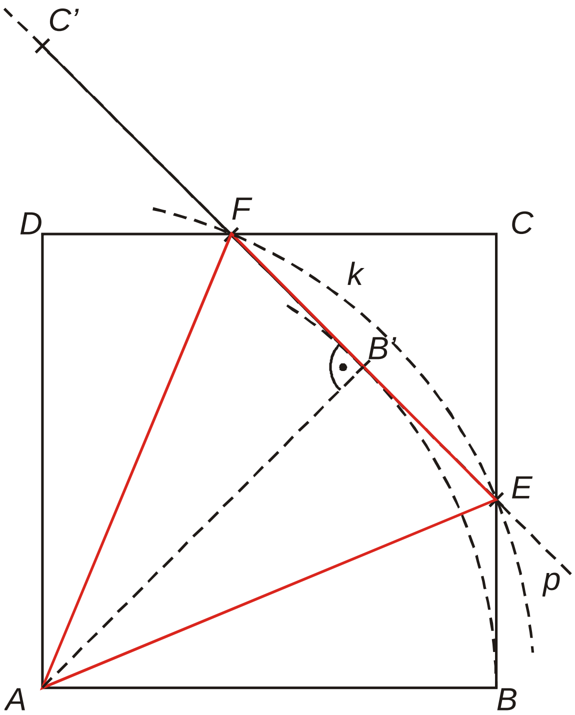
Př. 7: Je dán čtverec *ABCD*, $a = 6\,\mathrm{cm}$. Najdi všechny rovnoramenné trojúhelníky *AEF* se základnou *EF*, pro které platí $E \in BC$, $F \in CD$, $\alpha = 45°$.

Náčrtek:



Hledáme dva body, u obou máme neúplnou informaci (leží na straně čtverce) $\Rightarrow$ zřejmě spojovací příklad $\Rightarrow$ snažíme se zobrazit jeden bod na druhý.
Body E, F jsou vrcholy rovnoramenného trojúhelníku $\Rightarrow$ platí $|AE| = |AF|$, $|\sphericalangle EAF| = 45°$ $\Rightarrow$ bod E můžeme zobrazit na bod F v otočení $R(A;45°)$ nebo $R(A;-45°)$ $\Rightarrow$ zobrazíme v těchto otočeních stranu BC, kde se její obrazy protnou se stranou CD, tam leží bod F.
Z náčrtku je zřejmé, že v otočení $R(A;-45°)$ se obraz strany BC se stranou CD neprotne.

Konstrukce:



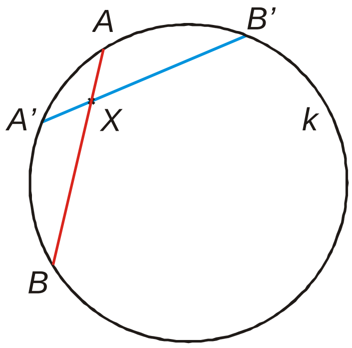
Zápis konstrukce:

1. $ABCD$
2. $B'; R(A;45°): B \to B'$
3. $p; B' \in p, p \perp AB'$
4. $F; F \in p \cap CD$
5. $k(A;|AF|)$
6. $E; E \in k \cap BC$
7. ABC

Rozbor:
Úloha má vždy jedno řešení.

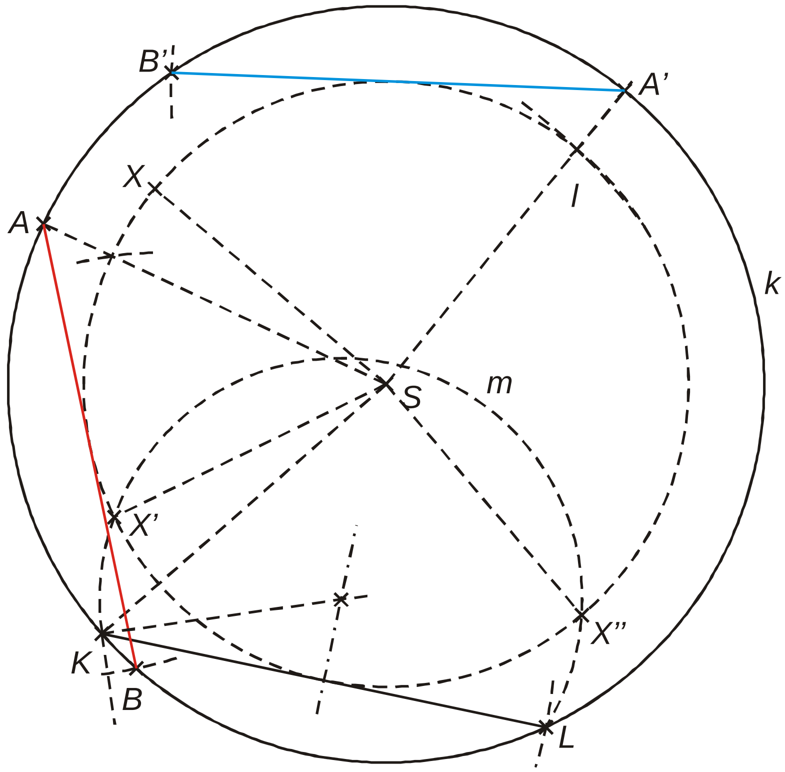
Př. 8: Je dána kružnice $k(S;5\,\text{cm})$ a bod X, $|XS| = 4\,\text{cm}$. Najdi všechny tětivy AB kružnice k takové, aby byly z bodu X vidět pod úhlem $70°$ a měly délku 6cm.

Náčrtek:



Podobné příkladu 5. Hledáme tětivu, která splňuje dvě podmínky $\Rightarrow$ první podmínku (délka 6 cm) splníme snadno, všechny tětivy kružnice k o délce 6 cm můžeme navzájem zobrazovat otočením o vhodný úhel okolo středu S $\Rightarrow$ nakreslíme libovolnou tětivu o délce 6 cm a otočíme ji o potřebný úhel tak, aby byla z bodu X vidět pod úhlem $70°$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $k(S;5\,\text{cm})$
2. $l(S;4\,\text{cm})$
3. $X, K; X \in l, K \in k$
4. $L; L \in k, |KL| = 6\,\text{cm}$
5. $m; m \subset \{X \in \rho; |\sphericalangle KXL| = 70°\}$
6. $X', X''; X' \cup X'' = k \cap m$
7. $A; R(S; \widehat{X'SX}): K \to A$
8. $B; B \in k, |AB| = 6\,\text{cm}$
9. $A'; R(S; \widehat{X''SX}): K \to A'$
10. $B'; B' \in k, |A'B'| = 6\,\text{cm}$

Rozbor:
Úloha má pro zadané rozměry vždy dvě řešení.

Pedagogická poznámka: Nalezení správného otočení působí žákům stejné problémy jako samotná hlavní myšlenka řešení příkladu.

Pedagogická poznámka: Protože množina bodů, ze kterých je úsečka KL vidět pod úhlem $70°$ je osově souměrná podle osy úsečky KL platí $|X'K| = |X''L|$ $\Rightarrow$ $|AX| = |B'X|$ $\Rightarrow$ bod B' bychom mohli rychleji nalézt pomocí kružnice $n(X;|XA|)$. Pokud žáci používají tento postup, je třeba se přesvědčit, zda nejde o pouhou mechanickou nápodobu příkladu 5, kde je tato možnost daleko zřejmější.

Př. 9: Petáková:
strana 78/cvičení 35

strana 78/cvičení 38
strana 79/cvičení 43
strana 79/cvičení 45

Shrnutí: I příklady využívající otočení můžeme většinou přiřadit mezi „spojovací“ nebo „dokončovací“.