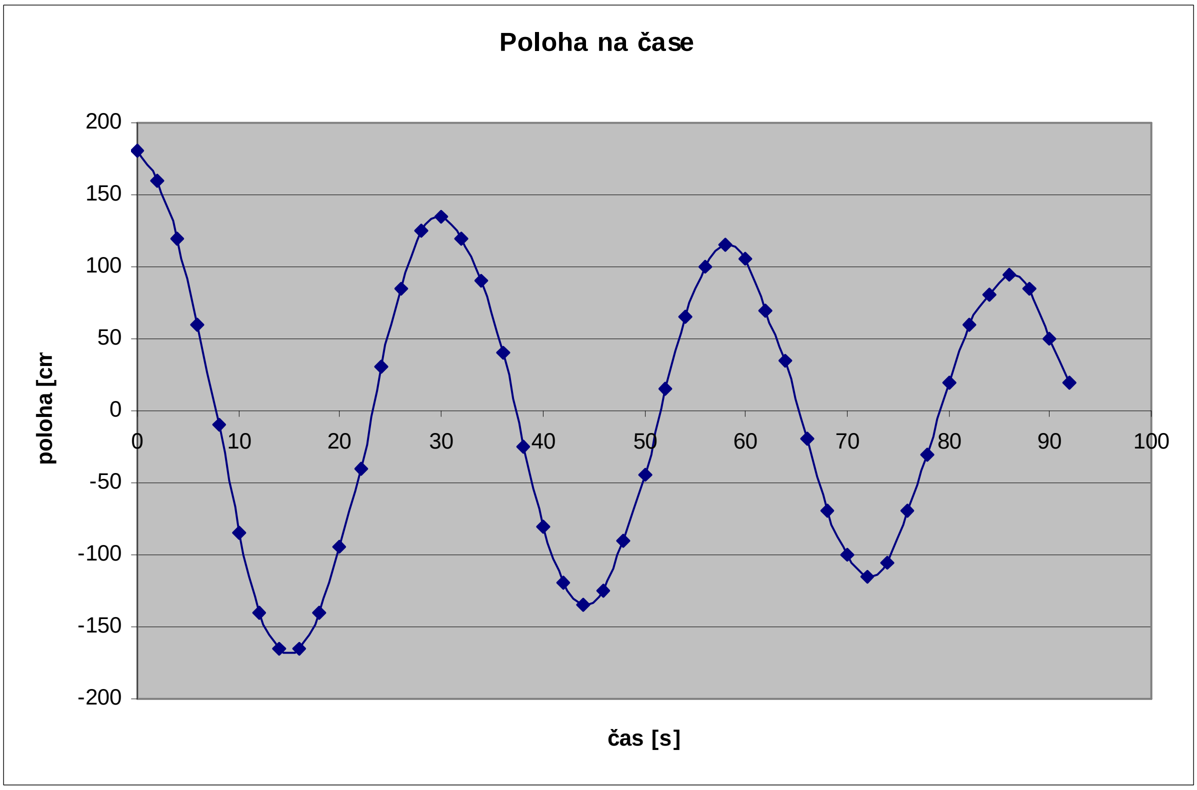
4.1.2 Periodické funkce

Předpoklady: 4101

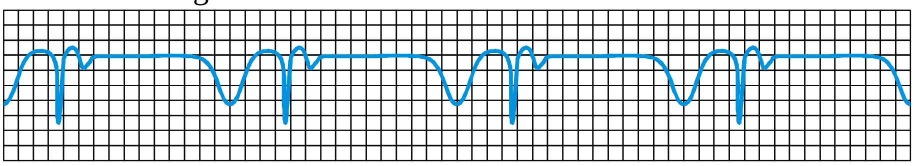
Co znamená slovo **periodický**?
Opakující se $\Rightarrow$ periodická funkce = funkce, která se opakuje.

Hodně příkladů:
Graf kývajícího se koštěte:



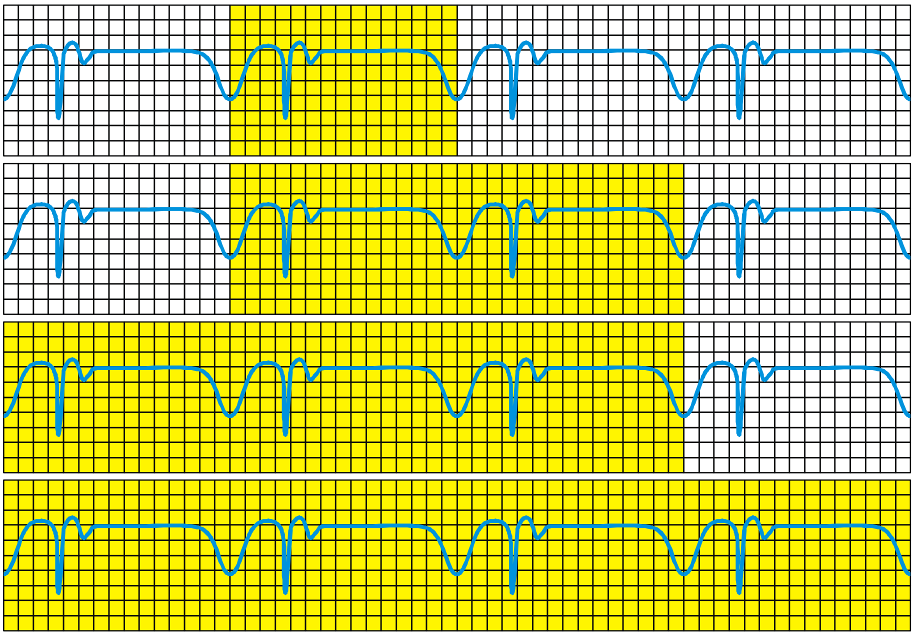
Poznámka: Funkce v grafu samozřejmě není zcela periodická, protože se snižuje výška vlnek (pohyb koštěte se postupně zpomaluje a uklidňuje).

Záznam kardiografu:



Poznámka: Funkce v grafu samozřejmě je periodická pouze proto, že nejde o skutečný kardiograf. Opravdové srdce nebije pokaždé stejně, například při námaze nebo stresu bije rychleji (Jak by se to projevilo?).

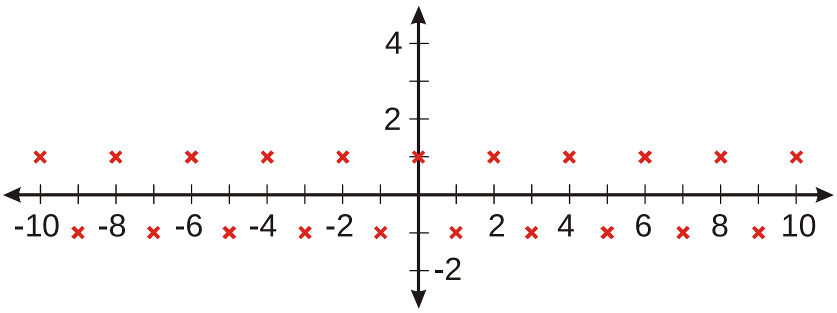
Oba grafy mají vzor, který se stále opakuje. $\Rightarrow$ **periodická funkce se skládá ze stále se opakujících kousků**.
Kousků, ze kterých můžeme graf sestavit, je víc. Například kardiograf jde sestavit z těchto základních (stále se opakujících) částí:



$\Rightarrow$ graf můžeme sestavit z „typického nejmenšího“ kousku a pak ze všech kousků, které sestavíme z něj.

Teď to zkusíme exaktně.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = (-1)^x$; $x \in Z$ a rozhodni, zda je funkce periodická.



Funkce je periodická. Dva křížky (jeden v 1, druhý v –1) se stále opakují. Vždy, když se posuneme o dvě, získáme stejné hodnoty.

Pedagogická poznámka: Studenti často nakreslí správně body grafu a pak je špatně spojí čarami. Jde o dobrou ukázku automatismu, který plyne z toho, že naprostá většina grafů, které kreslili, je složena z čar.

Př. 2: Každé reálné číslo *b* můžeme vyjádřit ve tvaru $b = c + d$, kde *c* je celé číslo, *d* je reálné číslo, $d \in \langle 0,1)$. Číslo *c* se nazývá celá část čísla *b*, značí se $[b]$ (píšeme $c = [b]$).

a) Napiš uvedený rozklad pro čísla 4; 1,1 a 2,9, s jejich pomocí urči $[4]$; $[1{,}1]$; $[2{,}9]$.

b) Urči $[\pi]$; $[-0{,}5]$; $[-1{,}1]$.

a)

$4 = 4 + 0 \;\Rightarrow\; [4] = 4$ (0 patří do intervalu $\langle 0,1)$ pro d)

$1{,}1 = 1 + 0{,}1 \;\Rightarrow\; [1{,}1] = 1$ $\qquad$ $2{,}9 = 2 + 0{,}9 \;\Rightarrow\; [2{,}9] = 2$

b)

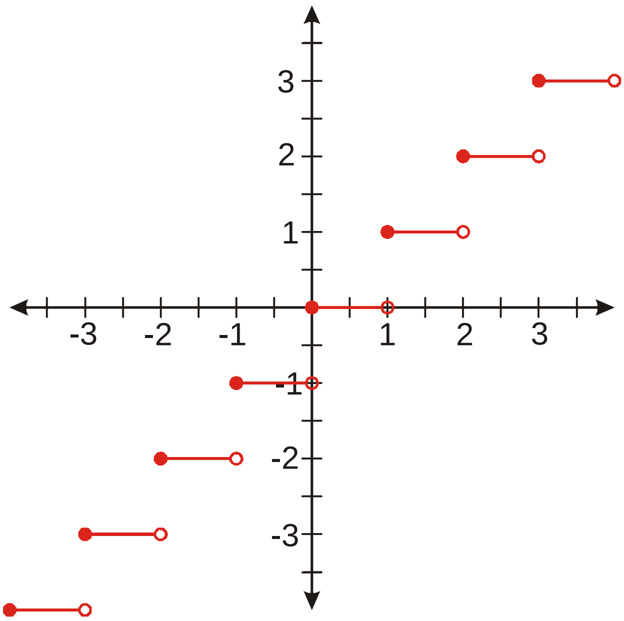
$\pi = 3 + 0{,}1428... \;\Rightarrow\; [\pi] = 3$

$-0{,}5 = -1 + 0{,}5 \;\Rightarrow\; [-0{,}5] = -1$ (rozklad $-0{,}5 = 0 + (-0{,}5)$ neodpovídá zadání, protože $d = -0{,}5 \notin \langle 0,1)$)

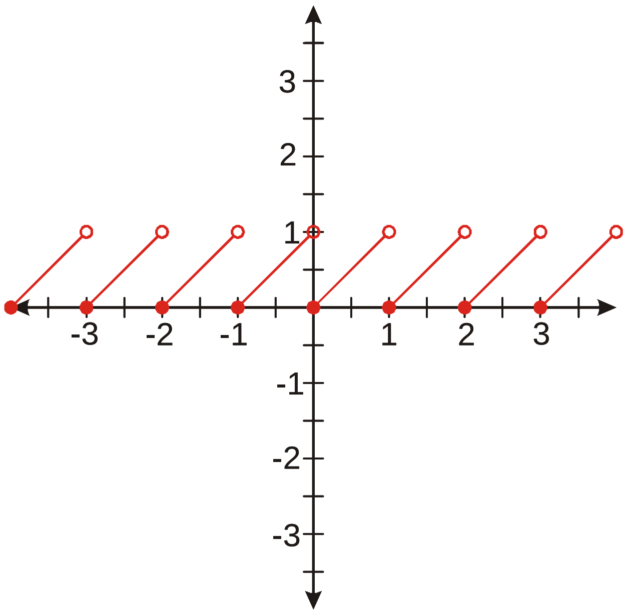
$-1{,}1 = -2 + 0{,}9 \;\Rightarrow\; [-1{,}1] = -2$

Pedagogická poznámka: Pro hodně studentů je obtížné napsat $4 = 4 + 0$, proto doporučuji studentům, aby zkusili napsat rozklad pro všechna tři čísla zadaná v bodě a).
Velmi často se vyskytuje špatný zápis: $-0{,}5 = 0 - 0{,}5 = 0 + (-0{,}5)$. Chybující studenty upozorněte a nechte je samostatně (alespoň na chvíli) hledat chybu. Jde o důležité cvičení pozorného čtení textu. (chyba: $d = -0{,}5 \notin \langle 0,1)$). $[-1{,}1]$ pak již určí všichni správně.

Př. 3: Nakresli grafy funkcí $y = [x]$ a $y = x - [x]$. Rozhodni, zda jde o periodické funkce.



funkce není periodická



funkce je periodická

Jak porovnáváním zapsat, že se opakuje nějaký vzor?
Funkce vyrábí na stejných místech vzorku stejná čísla (třeba na začátku vzorku je vždy stejná hodnota, uprostřed také) $\Rightarrow$ na začátku každého vzorku, musíme dostat stejné číslo jako na začátku předchozího.

Důležité je, za jak dlouho se začne vzor opakovat.
Funkce $y = x - [x]$ se opakuje po $1; 2; 3...$ $\Rightarrow$ když se posuneme na ose x o $1; 2; 3...$, získáme stejnou hodnotu jako v místě, ze kterého jsme vyšli $\Rightarrow$

Definice: Funkce se nazývá periodická právě tehdy, když existuje takové číslo $p>0$, že pro každé $k \in Z$ platí následující podmínky:

a) pro každé $x \in D(f)$ **je i** $x+k.p \in D(f)$**,**

b) pro každé $x \in D(f)$ **platí** $f(x+p.k)=f(x)$**.**

Př. 4: Popiš běžnými slovy význam čísel *k* a *p* v předchozí definici.

p udává délku opakujícího se úseku.
k udává, o kolik opakovacích vzdáleností se posouváme (kladné *k* znamená posun doprava, záporné *k* znamená posun doleva).

Číslo *p* se nazývá perioda.

Př. 5: Urči periodu pro funkci $y=x-[x]$.

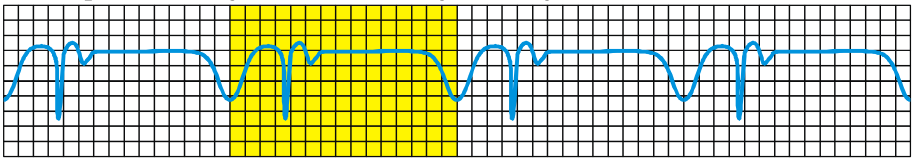
Funkce se opakuje po 1 a všech násobcích tohoto čísla $\Rightarrow$ $p=1;2;3;4...$.

Mezi periodami funkce $y=x-[x]$ je nejmenší číslo 1. Nazývá se **nejmenší perioda**.

Dodatek: Je zajímavé, že existují periodické funkce bez nejmenší periody.

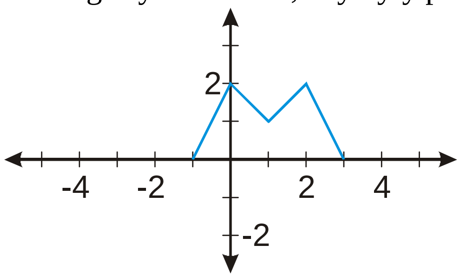
Př. 6: Urči (v dílcích) periodu záznamu kardiografu.

Stačí spočítat dílky na obrázku s vyznačeným vzorem.

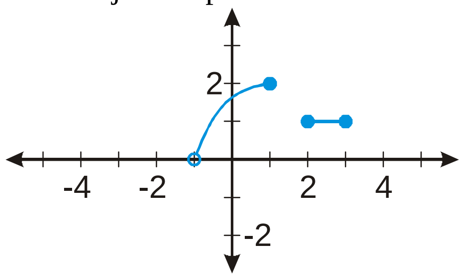


Perioda záznamu je 15 dílků.

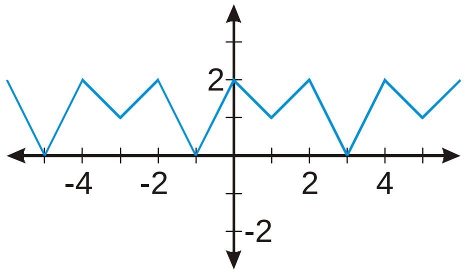
Př. 7: Dokresli grafy funkcí tak, aby byly periodické s co nejmenší periodou.



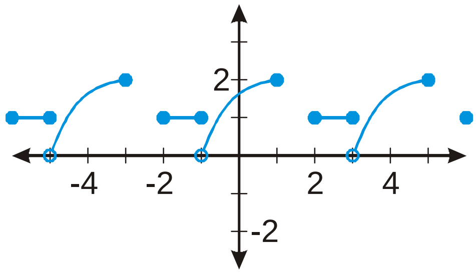
a)



b)



a)



b)

Pedagogická poznámka: S druhým grafem mají studenti daleko větší problémy, v nakresleném kousku je „díra“ a počáteční a konečný bod nejsou stejně vysoko (studenti mají „odpor“ k funkcím, které nejsou spojité).

Shrnutí: Hodnoty periodické funkce se opakují. Její nejkratší opakující se část se nazývá nejmenší perioda.