## 4.2.3 Oblouková míra

**Předpoklady:** 3208

Obloukovou míru známe z geometrie nebo z fyziky (kruhový pohyb) $\Rightarrow$ rychlé zopakování.

**Př. 1:** Jsou dány dvě kružnice o poloměrech $r_1$ a $r_2$. Do tabulky doplň délky oblouků těchto kružnic při zadaných středových úhlech.

| středový úhel [otáčky] | středový úhel [ ° ] | délka při poloměru $r_1$ | délka při poloměru $r_2$ |
|---|---|---|---|
| otáčka | 360° | | |
| | 180° | | |
| čtvrt otáčky | | | |
| desetina otáčky | | | |

| středový úhel [otáčky] | středový úhel [ ° ] | délka při poloměru $r_1$ | délka při poloměru $r_2$ |
|---|---|---|---|
| otáčka | 360° | $2\pi r_1$ | $2\pi r_2$ |
| půlotáčka | 180° | $\pi r_1$ | $\pi r_2$ |
| čtvrt otáčky | 90° | $\frac{\pi}{2} r_1$ | $\frac{\pi}{2} r_2$ |
| desetina otáčky | 36° | $\frac{\pi}{5} r_1$ | $\frac{\pi}{5} r_2$ |

- U obou oblouků získáváme v každé řádce téměř stejné výrazy, které se liší pouze poloměrem.
- U obou oblouků v jedné řádce máme stejný středový úhel.

$\Rightarrow$ Výrazy před poloměrem jsou velikostí středového úhlu určenou v nové jednotce. Tato jednotka je pro určování úhlu přirozená, umožňuje snadný výpočet délky oblouku podle vzorce $s = \varphi r$ a nazývá se **radián**. Platí:

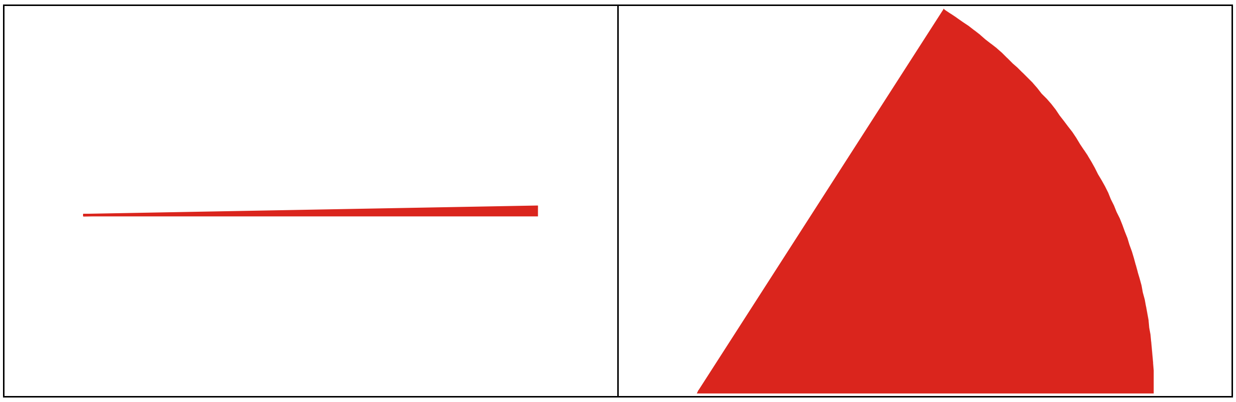
$$1\,\text{otáčka} = 360° = 2\pi\,\text{rad}$$

Proč si raději nepamatuje rovnost $\text{půl otáčky} = 180° = \pi\,\text{rad}$?
Šance zapamatovat si rovnost $1\,\text{otáčka} = 360° = 2\pi\,\text{rad}$ je větší, protože těsněji souvisí se vzorcem pro obvod kruhu $o = 2\pi r$, který už známe.

Pokud udáváme velikost úhlu v radiánech, říkáme, že používáme **obloukovou míru** (radiány usnadňují výpočet délky oblouku).

Mnozí se brání používání radiánů, protože pro lidské uvažování není přirozená představa, že rozdělíme kruh na 6,28…. částí. Nakreslený 1 radián není o nic méně představitelný než jeden stupeň, jak ukazuje následující obrázek.

| výseč se středovým úhlem 1 stupeň | výseč se středovým úhlem 1 radián |
|---|---|



Sestavit celý kruh je dokonce značně jednodušší pomocí radiánových výsečí než pomocí výsečí stupňových:

Poslední výseč zkrátka není celá.

**Př. 2:** Je dána kružnice o poloměru *r*. Urči délku oblouku této kružnice se středovým úhlem 1 rad.

Středový úhel je v radiánech $\Rightarrow$ použijeme vzorec $s = \varphi r$.

$s = \varphi r = 1 \cdot r = r$

Oblouk má také délku *r*.

Tento fakt se používá k definici 1 radiánu.

**1 radián je středový úhel, který na kružnici s poloměrem *r* vytkne oblouk o délce *r*.**

**Př. 3:** Vypočti velikost 1 radiánu ve stupních.

$360° = 2\pi \,\text{rad} \quad /:2\pi$

$1\,\text{rad} = \frac{360°}{2\pi} \doteq 57,295°$

**Př. 4:** Vypočti velikost 1 stupně v radiánech.

$360° = 2\pi \,\text{rad} \quad /:360$

$1° = \frac{2\pi}{360}\,\text{rad} = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \doteq 0,01745\,\text{rad}$

**Př. 5:** Vyjádři přesně v radiánech základní velikosti úhlů, ve kterých známe přesné hodnoty goniometrických funkcí.

$30° = 30 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{60\pi}{360} = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$ $\quad$ $45° = 45 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{90\pi}{360} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$

$60° = 60 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{120\pi}{360} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$ $\quad$ $90° = 90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$

Nyní si můžeme založit novou (a větší) tabulku na hodnoty goniometrických funkcí.

**Pedagogická poznámka:** Nejlepší je nechat studenty, aby si tabulku nakreslili naležato na vytržený papír. Společně doplňte pouze prvních pět sloupců a pak nechce studenty, aby si každý svým vlastním systémem doplnil sloupce zbývající (na konci hodiny je ukázán postup, který bych volil já). Trvám pouze na tom, že nemají další hodnoty dopočítávat převodním vztahem ze stupňů, ale mají tyto hodnoty získat z již spočtených hodnot pro menší úhly nebo známých hodnot převodů. Na konci hodiny studenty nechte, aby si do sešitu dopsali i zatím známé hodnoty goniometrických funkcí.

**Př. 6:** Doplň tabulku.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | |

**Př. 7:** Vyjádři velikosti úhlů v radiánech s přesností na dvě desetinná místa.
a) 70° b) 14° c) 358° d) 181°

a) $70° = 70 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{7 \cdot 2\pi}{36} = \frac{7\pi}{18} = 1{,}22\,\text{rad}$ $\quad$ b) $14° = 14 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0{,}24\,\text{rad}$

c) $358° = 358 \cdot \frac{2\pi}{360} = 6{,}25\,\text{rad}$ $\quad$ d) $181° = 181 \cdot \frac{2\pi}{360} = 3{,}16\,\text{rad}$

**Př. 8:** Vyjádři velikosti úhlů ve stupních s přesností na dvě desetinná místa.

a) $\frac{\pi}{15}\,\mathrm{rad}$ b) $1{,}1\pi\,\mathrm{rad}$ c) $5\,\mathrm{rad}$ d) $0{,}25\,\mathrm{rad}$

a) $\frac{\pi}{15}\,\mathrm{rad} = \frac{\pi}{15}\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 12°$

b) $1{,}1\pi\,\mathrm{rad} = 1{,}1\pi\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 198°$

c) $5\,\mathrm{rad} = 5\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 286{,}48°$

d) $0{,}25\,\mathrm{rad} = 0{,}25\cdot\frac{360}{2\cdot\pi}° = 14{,}32°$

**Př. 9:** Petáková:
strana 40/cvičení 1 $\alpha$) $\delta$) $\omega$)
strana 40/cvičení 2 $\alpha$)
strana 40/cvičení 3 $x_3$)

Jak by tabulku vyplňoval autor učebnice.
Doplníme známé hodnoty pro $360°$ a $180°$.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | | | $\pi$ | | | | | | | | $2\pi$ |

Protože platí $90° = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}$, platí i $270° = \frac{3}{2}\pi$.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | | | $\pi$ | | | | $\frac{3}{2}\pi$ | | | | $2\pi$ |

Využijeme, že platí $45° = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$, a doplníme prostřední prázdné sloupečky.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | | $\pi$ | | $\frac{5}{4}\pi$ | | $\frac{3}{2}\pi$ | | $\frac{7}{4}\pi$ | | $2\pi$ |

Úhly $150°$, $210°$ a $330°$ se liší od násobků $180°$ pouze o $30°$ tedy o $\frac{\pi}{6}$.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | | $\frac{3}{2}\pi$ | | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |

Úhly $120°$, $240°$ a $300°$ se liší od násobků $180°$ o $60°$ tedy o $\frac{\pi}{3}$.

| **Úhel** [°] | 0 | 30 | 45 | 60 | 90 | 120 | 135 | 150 | 180 | 210 | 225 | 240 | 270 | 300 | 315 | 330 | 360 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Úhel** [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{5}{3}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $\frac{11}{6}\pi$ | $2\pi$ |

**Shrnutí:** Přirozenou jednotkou pro měření úhlu je radián. Platí $1\,\text{otáčka} = 360° = 2\pi\ \text{rad}$.