

### 4.2.3 Oblouková míra

**Předpoklady:** 3208

Obloukovou míru známe z geometrie nebo z fyziky (kruhový pohyb)  $\Rightarrow$  rychlé zopakování.

**Př. 1:** Jsou dány dvě kružnice o poloměrech  $r_1$  a  $r_2$ . Do tabulky doplň délky oblouků těchto kružnic při zadaných středových úhlech.

středový úhel [otáčky]	středový úhel [°]	délka při poloměru $r_1$	délka při poloměru $r_2$
otáčka	360°		
	180°		
čtvrt otáčky			
desetina otáčky			

středový úhel [otáčky]	středový úhel [°]	délka při poloměru $r_1$	délka při poloměru $r_2$
otáčka	360°	$2\pi r_1$	$2\pi r_2$
půlotáčka	180°	$\pi r_1$	$\pi r_2$
čtvrt otáčky	90°	$\frac{\pi}{2} r_1$	$\frac{\pi}{2} r_2$
desetina otáčky	36°	$\frac{\pi}{5} r_1$	$\frac{\pi}{5} r_2$

- U obou oblouků získáváme v každé řádce téměř stejné výrazy, které se liší pouze poloměrem.
- U obou oblouků v jedné řádce máme stejný středový úhel.

$\Rightarrow$  Výrazy před poloměrem jsou velikostí středového úhlu určenou v nové jednotce. Tato jednotka je pro určování úhlu přirozená, umožňuje snadný výpočet délky oblouku podle vzorce  $s = \varphi r$  a nazývá se **radián**. Platí:

$$1 \text{ otáčka} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

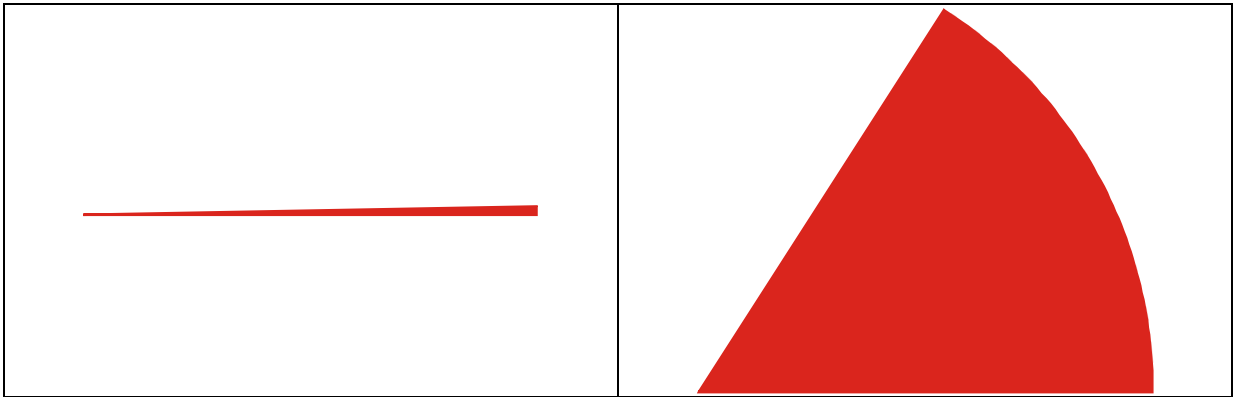
Proč si raději nepamätujeme rovnost půl otáčky = 180° =  $\pi$  rad ?

Šance zapamatovat si rovnost 1 otáčka = 360° =  $2\pi$  rad je větší, protože těsněji souvisí se vzorcem pro obvod kruhu  $o = 2\pi r$ , který už známe.

Pokud udáváme velikost úhlu v radiánech, říkáme, že používáme **obloukovou míru** (radiány usnadňují výpočet délky oblouku).

Mnozí se brání používání radiánů, protože pro lidské uvažování není přirozená představa, že rozdělíme kruh na 6,28... částí. Nakreslený 1 radián není o nic méně představitelný než jeden stupeň, jak ukazuje následující obrázek.

výseč se středovým úhlem 1 stupeň	výseč se středovým úhlem 1 radián
-----------------------------------	-----------------------------------



Sestavit celý kruh je dokonce značně jednodušší pomocí radiánových výsečí než pomocí výsečí stupňových:



Poslední výseč zkrátka není celá.

**Př. 2:** Je dána kružnice o poloměru  $r$ . Urči délku oblouku této kružnice se středovým úhlem 1 rad.

Středový úhel je v radiánech  $\Rightarrow$  použijeme vzorec  $s = \varphi r$ .

$$s = \varphi r = 1 \cdot r = r$$

Oblouk má také délku  $r$ .

Tento fakt se používá k definici 1 radiánu.

**1 radián je středový úhel, který na kružnici s poloměrem  $r$  vytkne oblouk o délce  $r$ .**

**Př. 3:** Vypočti velikost 1 radiánu ve stupních.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad /:2\pi$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \doteq 57,295^\circ$$

**Př. 4:** Vypočti velikost 1 stupně v radiánech.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad /:360$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \doteq 0,01745 \text{ rad}$$

**Př. 5:** Vyjádři přesně v radiánech základní velikosti úhlů, ve kterých známe přesné hodnoty goniometrických funkcí.

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{60\pi}{360} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{90\pi}{360} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$60^\circ = 60 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{120\pi}{360} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

$$90^\circ = 90 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Nyní si můžeme založit novou (a větší) tabulku na hodnoty goniometrických funkcí.

**Pedagogická poznámka:** Studentům rozdávám tabulku vytištěnou naležato na papír A4 a nechávám je, aby si každý svým vlastním systémem doplnil sloupce zbývající (na konci hodiny je ukázán postup, který bych volil já). Trvám pouze na tom, že nemají další hodnoty dopočítávat převodním vztahem ze stupňů, ale mají tyto hodnoty získat z již spočtených hodnot pro menší úhly nebo známých hodnot převodů. Na konci hodiny studenty nechám, aby si do sešitu dopsali i zatím známé hodnoty goniometrických funkcí.

**Př. 6:** Doplně do tabulky řádku s hodnotami úhlu v radiánech. Nepoužívej kalkulačku. Místo převodního vztahu mezi stupni a radiány raději využij již zapsané hodnoty pro úhly od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ .

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$												
$\sin(x)$																	
$\cos(x)$																	
$\text{tg}(x)$																	
$\text{cotg}(x)$																	

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$
$\sin(x)$																	
$\cos(x)$																	
$\text{tg}(x)$																	
$\text{cotg}(x)$																	

**Př. 7:** Doplň do tabulky z předchozího řádku hodnoty goniometrických funkcí pro úhly od  $0^\circ$  do  $90^\circ$ . Zapisuj přesné hodnoty ve tvaru získaném v minulé hodině. Hodnoty doplňuj z paměti, do předminulé hodiny nahlížej a ž v nejvyšší nouzi.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1												
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0												
$\text{tg}(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	x												
$\text{cotg}(x)$	x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0												

**Př. 8:** Vyjádři velikosti úhlů v radiánech s přesností na dvě desetinná místa.

- a)  $70^\circ$                       b)  $14^\circ$                       c)  $358^\circ$                       d)  $181^\circ$

$$\text{a) } 70^\circ = 70 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{7 \cdot 2\pi}{36} = \frac{7\pi}{18} = 1,22 \text{ rad}$$

$$\text{b) } 14^\circ = 14 \cdot \frac{2\pi}{360} = 0,24 \text{ rad}$$

$$\text{c) } 358^\circ = 358 \cdot \frac{2\pi}{360} = 6,25 \text{ rad}$$

$$\text{d) } 181^\circ = 181 \cdot \frac{2\pi}{360} = 3,16 \text{ rad}$$

**Př. 9:** Vyjádři velikosti úhlů ve stupních s přesností na dvě desetinná místa.

- a)  $\frac{\pi}{15}$  rad                      b)  $1,1\pi$  rad                      c) 5 rad                      d) 0,25 rad

$$\text{a) } \frac{\pi}{15} \text{ rad} = \frac{\pi}{15} \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} = 12^\circ$$

$$\text{b) } 1,1\pi \text{ rad} = 1,1\pi \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} = 198^\circ$$

$$\text{c) } 5 \text{ rad} = 5 \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} = 286,48^\circ$$

$$\text{d) } 0,25 \text{ rad} = 0,25 \cdot \frac{360}{2 \cdot \pi} = 14,32^\circ$$

**Př. 10:** Petáková:

strana 40/cvičení 1  $\alpha$ )  $\delta$ )  $\omega$ )

strana 40/cvičení 2  $\alpha$ )

strana 40/cvičení 3  $x_3$ )

Jak by hodnoty úhlů v radiánech do tabulky vyplňoval autor učebnice.

Doplňme známé hodnoty pro  $360^\circ$  a  $180^\circ$ .

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
-------------	---	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				$\pi$								$2\pi$
---------------	---	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	--	--	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--------

Protože platí  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$  rad, platí i  $270^\circ = \frac{3}{2}\pi$ .

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				$\pi$				$\frac{3}{2}\pi$				$2\pi$

Využijeme, že platí  $45^\circ = \frac{\pi}{4}$  rad, a doplníme prostřední prázdné sloupcečky.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\pi$		$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		$2\pi$

Úhly  $150^\circ$ ,  $210^\circ$  a  $330^\circ$  se liší od násobků  $180^\circ$  pouze o  $30^\circ$  tedy o  $\frac{\pi}{6}$ .

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$

Úhly  $120^\circ$ ,  $240^\circ$  a  $300^\circ$  se liší od násobků  $180^\circ$  o  $60^\circ$  tedy o  $\frac{\pi}{3}$ .

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$

**Shrnutí:** Přírozenou jednotkou pro měření úhlu je radián. Platí 1 otáčka =  $360^\circ = 2\pi$  rad.