

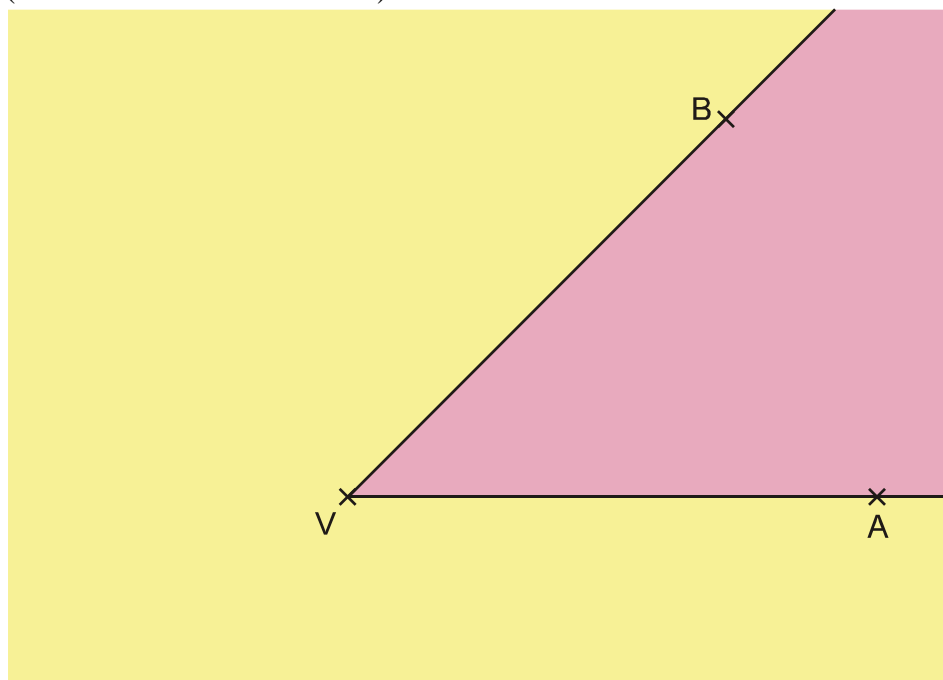
4.2.4 Orientovaný úhel I

Předpoklady: 3508

Pedagogická poznámka: Důležité je na počátku hodiny postupovat dostatečně rychle, aby na příklad 7 zbylo minimálně 10 minut.

Definice úhlu ze základní školy:

Úhel je část roviny ohraničená dvojicí polopřímek se společným počátečním bodem (konvexní a nekonvexní úhel).



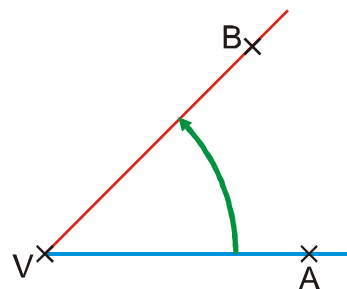
Nevýhody této definice:

- Nevíme, jaký úhel máme na mysli (Růžový konvexní nebo žlutý nekonvexní?).
- Když chceme pomocí úhlu popsat otáčení, nevíme, co popisujeme (točí se nahoru nebo dolů?).

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek (VA, VB) se společným počátkem

V . Píšeme: \widehat{AVB} (VA - počáteční rameno, VB - koncové rameno, V = vrchol).

⇒ Úhel vznikne otočením polopřímky.



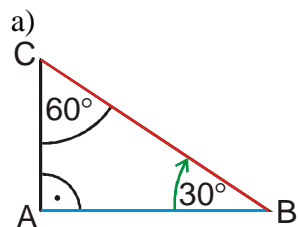
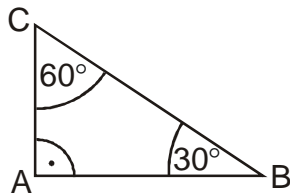
Dále budeme vždy značit počáteční rameno modře, konečné červeně. Směr otáčení bude vyznačen šipkou.

Pokud máme jednoznačně nakreslit $\widehat{AVB} = 30^\circ$, musíme vědět, co je kladný a co záporný směr otáčení. \Rightarrow

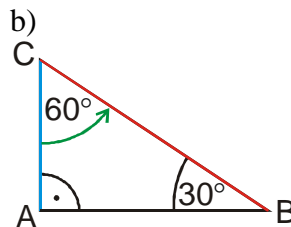
- Za kladné považujeme otáčení proti směru hodinových ručiček.
- Za záporné považujeme otáčení po směru hodinových ručiček.

Př. 1: Na obrázku je nakreslen trojúhelník ABC. Urči velikost orientovaných úhlů:

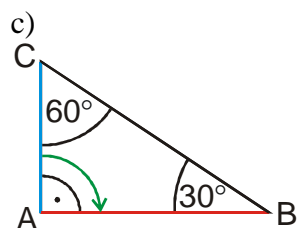
- a) \widehat{ABC} b) \widehat{ACB} c) \widehat{CAB} d) \widehat{CBA}



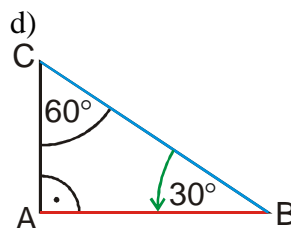
Otáčíme po směru hodinových ručiček \Rightarrow
 $\widehat{ABC} = -30^\circ$.



Otáčíme proti směru hodinových ručiček \Rightarrow
 $\widehat{ACB} = 60^\circ$.



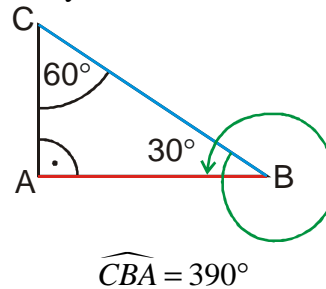
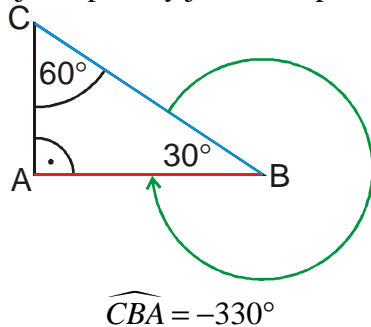
Otáčíme po směru hodinových ručiček \Rightarrow
 $\widehat{CAB} = -90^\circ$.

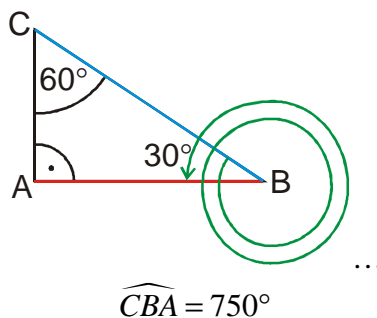


Otáčíme proti směru hodinových ručiček \Rightarrow
 $\widehat{CBA} = 30^\circ$.

Poznámka: V celém zbytku hodiny budeme pod trojúhelníkem ABC rozumět trojúhelník z předchozího příkladu.

Existují i jiné způsoby jak otočit polopřímku BC do polopřímky BA:

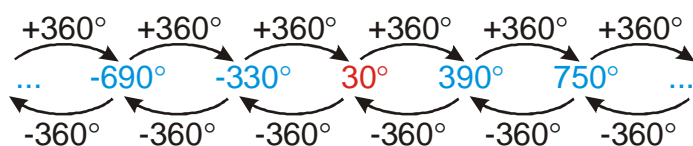




Podobných možností je evidentně nekonečně mnoho \Rightarrow zdá se, že jsme přešli z bláta do louže. Zkusíme najít systém v získaných hodnotách.

Postřeh: Z obrázku je vidět, že kladné hodnoty se liší vždy o jednu otáčku (360°).

Seřadíme hodnoty podle velikosti: $\widehat{CBA} = -330^\circ \quad 30^\circ \quad 390^\circ \quad 750^\circ$.



Všechna ta čísla jsou správně! Liší se o násobky 360° , tedy o násobky celých otáček (když se otočíme o celou otáčku, ocitneme se na stejném místě).

Nejhezčí hodnota 30° (nejmenší kladné číslo) = **základní velikost orientovaného úhlu \widehat{CBA}** .

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α , pro kterou platí $\alpha \in (0; 360^\circ)$.

Př. 2: Zformuluj větu o základní velikosti úhlu \widehat{AVB} v obloukové míře.

Převedeme krajní body intervalu: $360^\circ = 2\pi$ rad.

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α , pro kterou platí $\alpha \in (0; 2\pi)$.

Úhel se dá zapsat nekonečně mnoho čísly (velikostmi úhlu). Všechny velikosti úhlů se navzájem liší o násobek 360° .

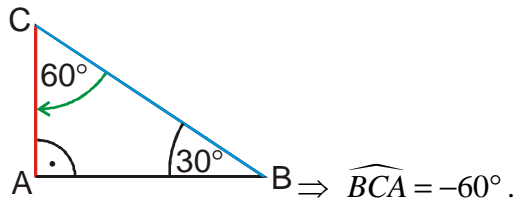
Velikostí orientovaného úhlu \widehat{AVB} , jehož základní velikostí je α , se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 360^\circ$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Př. 3: Zformuluj větu o všech velikostech orientovaného úhlu \widehat{AVB} v obloukové míře.

K základní velikosti přidáváme násobky jedné otáčky $\Rightarrow 360^\circ = 2\pi$ rad.

Velikostí orientovaného úhlu \widehat{AVB} , jehož základní velikostí je α , se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Př. 4: Napiš základní a tři další velikosti úhlu \widehat{BCA} v trojúhelníku ABC .



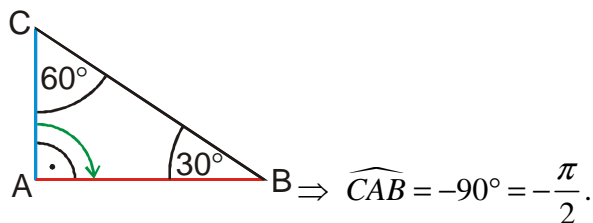
-60° není základní velikostí (hodnota je záporná) \Rightarrow připočteme 360° .

$-60^\circ + 360^\circ = 300^\circ$ - základní velikost $300^\circ \in \langle 0; 360^\circ \rangle$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením 360° :

- $300^\circ + 360^\circ = 660^\circ$,
- $-60^\circ - 360^\circ = -420^\circ$.

Př. 5: Napiš základní a tři další velikosti úhlu \widehat{CAB} v trojúhelníku ABC . Vše vyjádři v obloukové míře.



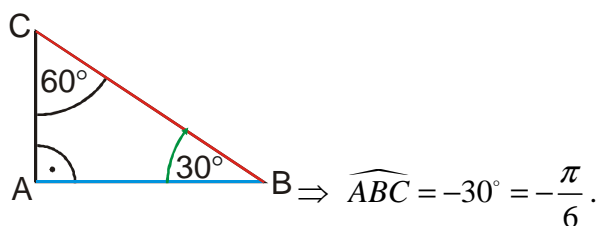
$-\frac{\pi}{2}$ není základní velikostí (je záporná) \Rightarrow připočteme 2π .

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{-\pi + 4\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ - základní velikost $\frac{3}{2}\pi \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením 2π :

- $-\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{5}{2}\pi$,
- $\frac{3}{2}\pi + 2\pi = \frac{7}{2}\pi$.

Př. 6: Napiš základní a tři další velikosti úhlu \widehat{ABC} v trojúhelníku ABC . Vše vyjádři v obloukové míře.



$-\frac{\pi}{6}$ není základní velikostí (je záporná) \Rightarrow připočteme 2π .

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{-\pi + 12\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$ - základní velikost $\frac{11}{6}\pi \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Další hodnoty získáme připočtením nebo odečtením 2π :

- $-\frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{13}{6}\pi$,
- $\frac{11}{6}\pi + 2\pi = \frac{23}{6}\pi$.

Pedagogická poznámka: Před následujícím příkladem synchronizuji třídu, aby všichni dělali to samé.

Př. 7: Rozhodni, která z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\beta = 330^\circ$.

- a) 690° b) 1740° c) 2490° d) -1500°

a) Pokud je úhel 690° velikostí úhlu β , musí platit: $690^\circ = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Upravíme: $690^\circ - 330^\circ = k \cdot 360^\circ \Rightarrow$ rozdíl $690^\circ - 330^\circ$ by měl být násobek 360.

$690^\circ - 330^\circ = 360^\circ \Rightarrow 690^\circ$ je velikost úhlu β .

b) Má platit $1740^\circ = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow$ rozdíl $1740^\circ - 330^\circ$ by měl být násobek 360.

$1740^\circ - 330^\circ = 1410^\circ$

$\frac{1410^\circ}{360^\circ} = 3,9... \Rightarrow 1740^\circ$ není velikost úhlu β .

c) Má platit $2490^\circ = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow$ rozdíl $2490^\circ - 330^\circ$ by měl být násobek 360.

$2490^\circ - 330^\circ = 2160^\circ$

$\frac{2160^\circ}{360^\circ} = 6 \Rightarrow 2490^\circ$ je velikost úhlu β .

d) Má platit $-1500^\circ = 330^\circ + k \cdot 360^\circ \Rightarrow$ rozdíl $-1500^\circ - 330^\circ$ by měl být násobek 360.

$-1500^\circ - 330^\circ = -1830^\circ$

$\frac{-1830^\circ}{360^\circ} = -5,08... \Rightarrow -1500^\circ$ není velikost úhlu β .

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají pochyby o tom, zda by v bodě d) neměli kvůli zápornému znaménku úhlu -1500° tuto hodnotu k číslu 330° přičítat. Těm, kteří nejsou spokojeni s tím, že záporná hodnota není z matematického hlediska důvod k jinému chování, píšou rovnici: $330 - 360 - 360 - \dots - 360 = -1500$
 $-360 - 360 - \dots - 360 = -1500 - 330$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je z algoritmického hlediska shodný s předchozím. Nevidím to jako závadu, studenti se učí, jak se vyrovnat se zlomky a obloukovou mírou.

Př. 8: Rozhodni, která z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\alpha = \frac{5}{6}\pi$.

a) $\frac{29}{6}\pi$ b) $\frac{131}{6}\pi$ c) $\frac{257}{6}\pi$ d) $-\frac{175}{6}\pi$

a) Pokud je úhel $\frac{29}{6}\pi$ základní velikostí úhlu α musí platit: $\frac{29}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.

Upravíme: $\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π .

$$\frac{29}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{24}{6}\pi = 4\pi = 2 \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{29}{6}\pi \text{ je velikost úhlu } \alpha.$$

b) Má platit $\frac{131}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $\frac{131}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π .

$$\frac{131}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{126}{6}\pi = 21\pi \neq k \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{131}{6}\pi \text{ není velikost úhlu } \alpha.$$

c) Má platit $\frac{257}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $\frac{257}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π .

$$\frac{257}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{252}{6}\pi = 42\pi = 21 \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{257}{6}\pi \text{ je velikost úhlu } \alpha.$$

d) Má platit $-\frac{175}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \Rightarrow$ rozdíl $-\frac{175}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi$ by měl být násobek 2π .

$$-\frac{175}{6}\pi - \frac{5}{6}\pi = -\frac{180}{6}\pi = -30\pi = -15 \cdot 2\pi \Rightarrow -\frac{175}{6}\pi \text{ je velikost úhlu } \alpha.$$

Shrnutí: Orientovaný úhel má nekonečně mnoho velikostí, které se liší o násobky 2π .