

## 4.2.6 Tabulkové hodnoty orientovaných úhlů

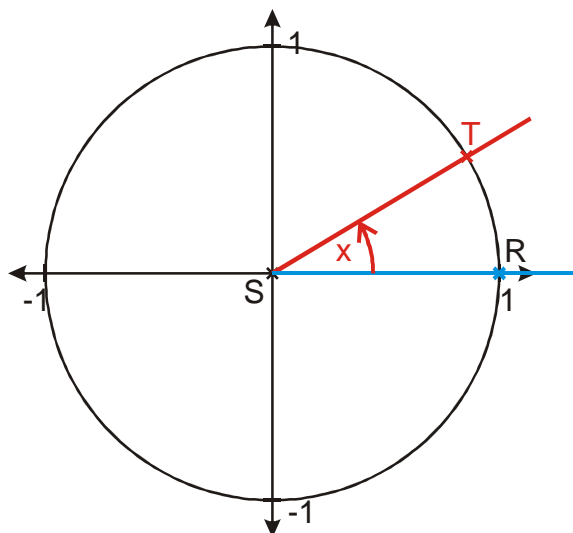
**Předpoklady:** 4204

**Pedagogická poznámka:** Největším problémem při zavádění goniometrických funkcí pro orientovaný úhel je rychlá orientace v poloze koncového ramene a převádění mezi desetinnou a stupňovou mírou. Tato hodina vznikla právě jako reakce na těžkosti, které jsem u studentů pozoroval.

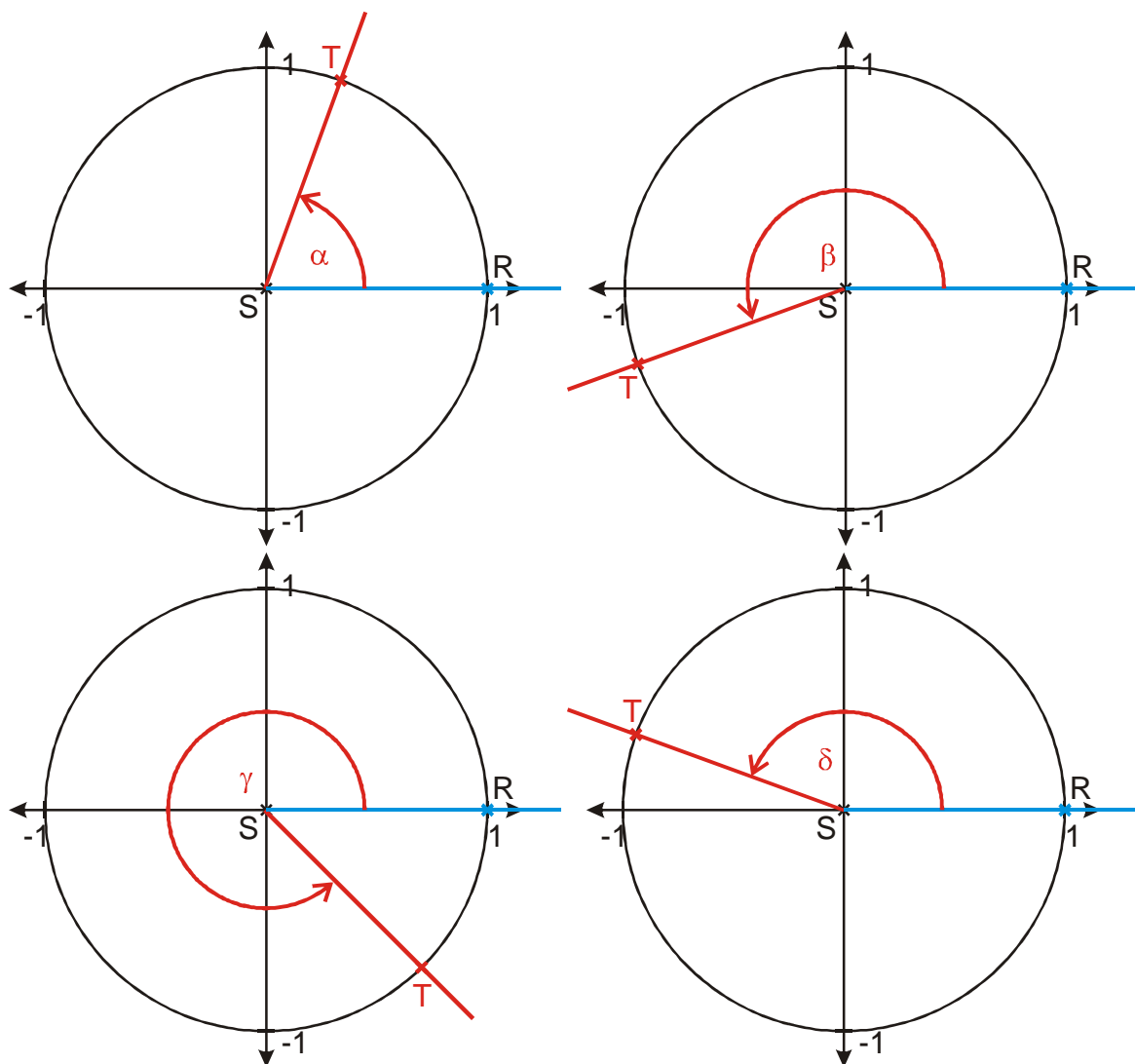
Při zakreslování (nebo odečítání) hodnot udaných pomocí obloukové míry pak můžete objevit jedince, kteří mají vážné problémy se základními představami o zlomcích.

Protože hlavním cílem hodiny je dosáhnout rychlého spojení mezi obrázkem a hodnotou, důrazně se zasazuji, aby žáci do všech obrázků zapisovali hodnoty přímo k místům, kterých se týkají, bez nějakých odkazů na druhý konec stránky. Kontrolovat je třeba, protože se stále nacházejí žáci, které k ramenům napíší a), b), c) a konkrétní hodnoty mají uvedené jinde.

Při zavádění funkcí  $\sin(x)$  a  $\cos(x)$  pro orientovaný úhel se využívá jednotková kružnice. Počáteční rameno orientovaného úhlu má vždy směr kladné poloosy  $x$ .

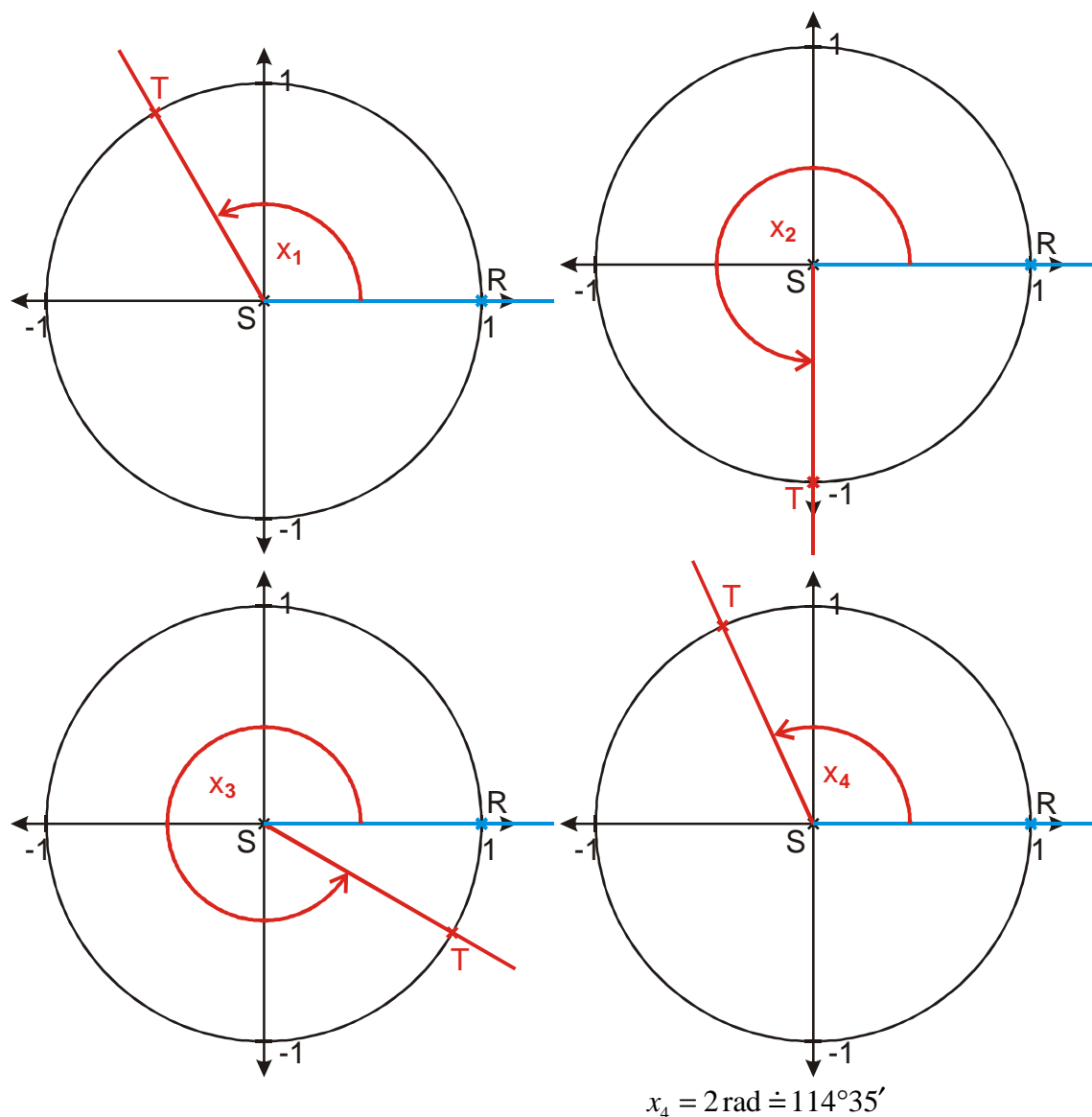


**Př. 1:** Načrtni do obrázků (pro každý úhel kresli nový) jednotkové kružnice následující úhly. a)  $\alpha = 70^\circ$       b)  $\beta = 200^\circ$       c)  $\gamma = 315^\circ$       d)  $\delta = 160^\circ$   
 U všech úhlů vyznač průsečík koncového ramene s jednotkovou kružnicí.



**Pedagogická poznámka:** Kromě průsečíku  $T$  je třeba dávat pozor i na to, aby žáci kreslili obloučky (kvůli upevnění představy o úhlu je to opravdu potřeba).

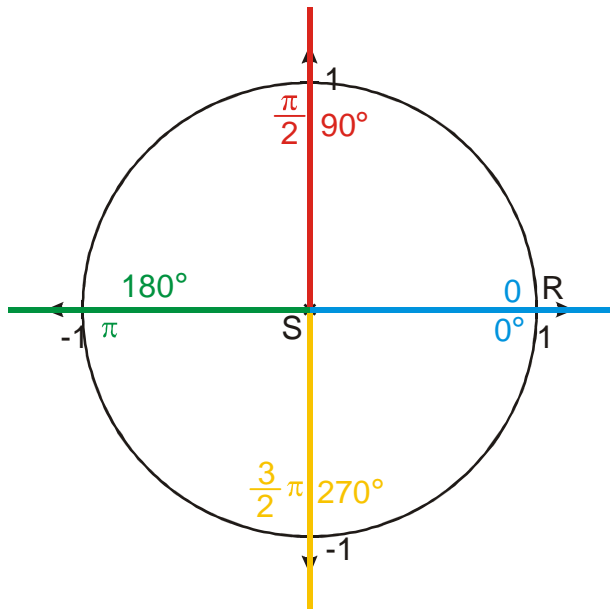
**Př. 2:** Načrtni do obrázku (pro každý úhel kresli nový) jednotkové kružnice následující úhly. a)  $x_1 = \frac{2}{3}\pi$       b)  $x_2 = \frac{3}{2}\pi$       c)  $x_3 = \frac{11}{6}\pi$       d)  $x_4 = 2 \text{ rad}$   
 U všech úhlů vyznač průsečík koncového ramene s jednotkovou kružnicí.



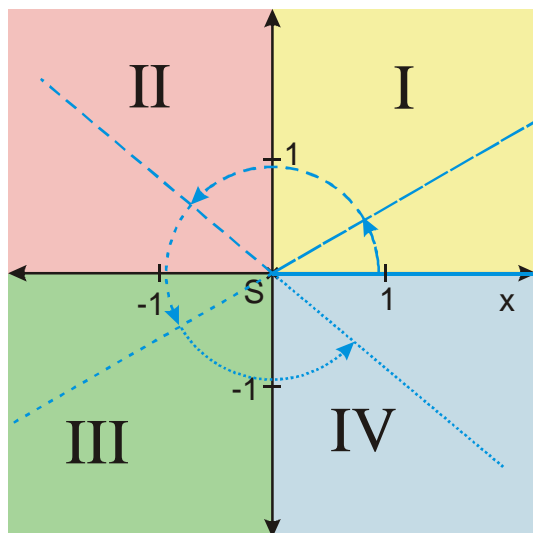
**Pedagogická poznámka:** Větší problémy bývají pouze s bodem d), kde se ptám, jaká je přibližná hodnota  $\pi$ . Jako pomoc kreslím na tabuli úhly  $2\pi$ ,  $\pi$  a  $\frac{\pi}{2}$ . U některých žáků vyřeznou problémy se zlomky. U obrázku bodu c) se bavíme o tom, že je třeba rameno úhlu nakreslit tak, aby se nepletlo s ramenem úhlu  $\frac{7}{4}\pi$ . Z tohoto důvodu doporučuji u náčrtků odchylku od úhlu  $\frac{7}{4}\pi$  (nebo jiného čtvrtinového úhlu) přehánět a kreslit úhel více vodorovný nebo svislý než by byl ve skutečnosti.

Protože všechny orientované úhly, které budeme ve zbytku hodiny kreslit, budou mít počáteční rameno shodné s kladnou poloosou  $x$ , nebudeme do obrázků vyznačovat počáteční rameno ani oblouček úhlů a úhly budeme znázorňovat pouze koncovým ramenem.

**Př. 3:** Nakresli do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena úhlů, která splývají s poloosami soustavy souřadnic. Ke každému ramenu napiš základní velikost úhlu v desetinné i obloukové míře.



**Př. 4:** Souřadná rovina je souřadnými osami rozdělena na čtvrtiny – kvadranty. Kvadranty se označují čísly podle pořadí, ve kterém do nich ukazuje koncové rameno úhlu, který má počáteční rameno shodné s kladnou poloosou  $x$  a jehož velikost se postupně zvětšuje od  $0$  do  $2\pi$ . Nakresli souřadnou rovinu a očíslej kvadranty.



**Př. 5:** Zapiš pomocí intervalů v desetinné i obloukové míře do obrázku z předchozího příkladu, pro které hodnoty orientovaného úhlu leží koncové rameno v jednotlivých kvadrantech.

První kvadrant:  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nebo  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ .

Druhý kvadrant:  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$  nebo  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ .

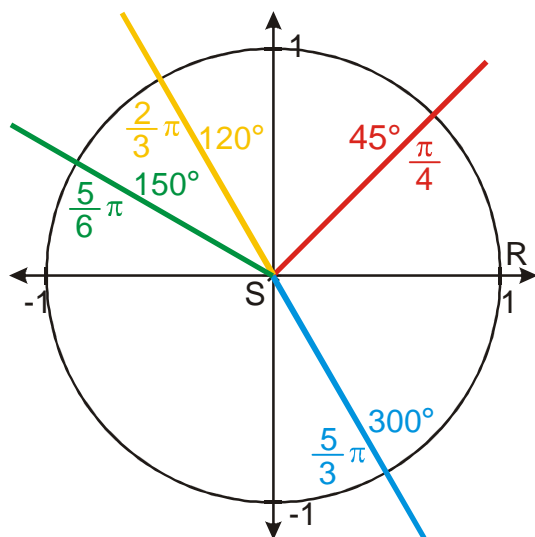
Třetí kvadrant:  $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$  nebo  $\alpha \in (180^\circ; 270^\circ)$ .

Čtvrtý kvadrant:  $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$  nebo  $\alpha \in (270^\circ; 360^\circ)$ .

**Př. 6:** Načrtni do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena následujících úhlů.

a)  $\alpha = 45^\circ$       b)  $\beta = 150^\circ$       c)  $\gamma = 300^\circ$       d)  $\delta = 120^\circ$

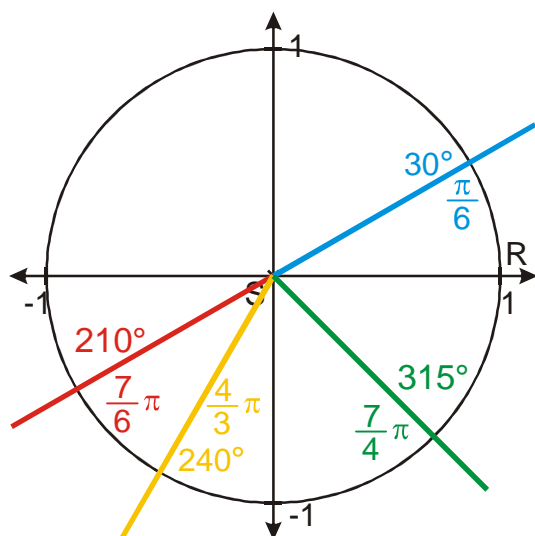
Ke každému z úhlů napiš také velikost v obloukové míře.



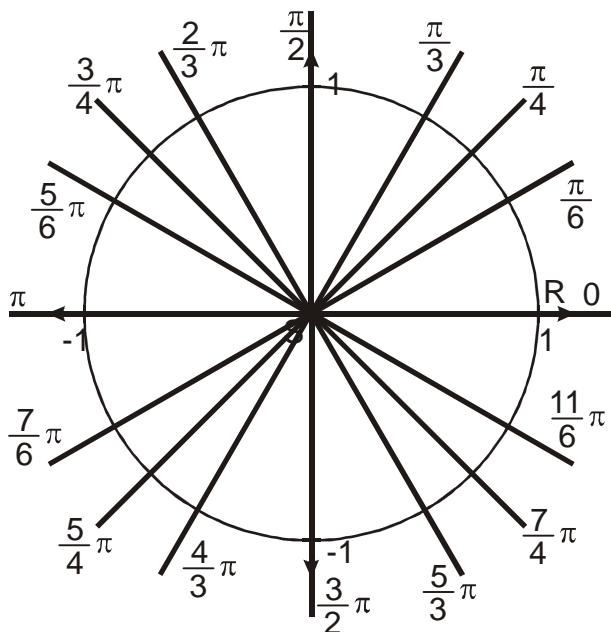
**Př. 7:** Načrtni do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena následujících úhlů.

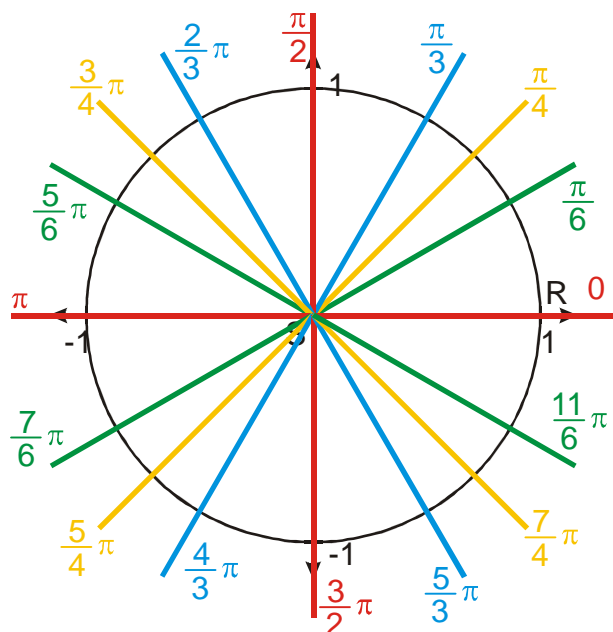
- a)  $x_1 = \frac{7}{6}\pi$       b)  $x_2 = \frac{7}{4}\pi$       c)  $x_3 = \frac{\pi}{6}$       d)  $x_4 = \frac{4}{3}\pi$

Ke každému z úhlů napiš také velikost v desetinné míře.



**Př. 8:** Zakresli do jednoho obrázku koncová ramena všech úhlů v tabulce hodnot goniometrických funkcí. Pokus se najít souvislost mezi polohou koncových ramen úhlů a tvarem, kterým jsou zapsány jejich velikosti v úhlové míře.





Zakreslené úhly můžeme rozdělit do čtyř skupin:

- „**půlkové**“ úhly: násobky  $\frac{\pi}{2}$   
(nakreslené červeně)
- „**čtvrtinové**“ úhly: úhly zapsané zlomky se čtyřkou ve jmenovateli (nakreslené žlutě)
- „**třetinové**“ úhly: úhly zapsané zlomky s trojkou ve jmenovateli (nakreslené modře)
- „**šestinové**“ úhly: úhly zapsané zlomky se šestkou ve jmenovateli (nakreslené zeleně)

Ramena úhlů v každé skupině (kromě „půlkových“ úhlů, kde to platí pouze částečně) jsou navzájem osově (podle některé ze souřadných) nebo středově (podle počátku) souměrná.

Navíc ramena:

- „půlkových“ úhlů leží na osách souřadnic,
- „čtvrtinových“ úhlů leží na osách kvadrantů,
- „třetinových“ úhlů se přimykají více k ose  $y$  než k ose  $x$ ,
- „šestinových“ úhlů se přimykají více k ose  $x$  než k ose  $y$ .

**Shrnutí:** Rozdělení tabulkových úhlů podle tvaru zlomků odpovídá rozdělení podle polohy koncového ramene.