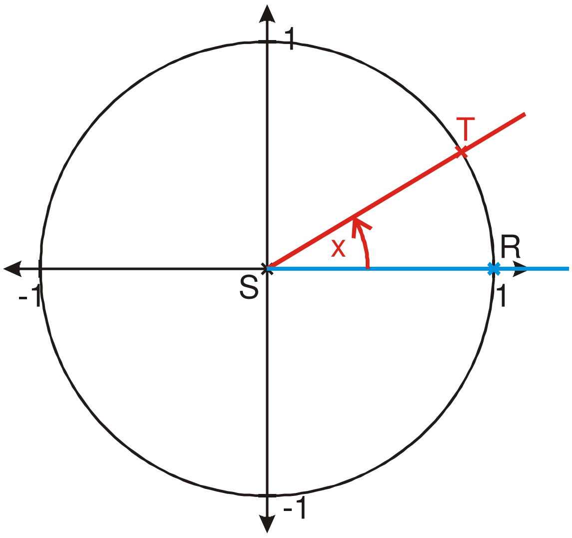
4.2.6 Tabulkové hodnoty orientovaných úhlů

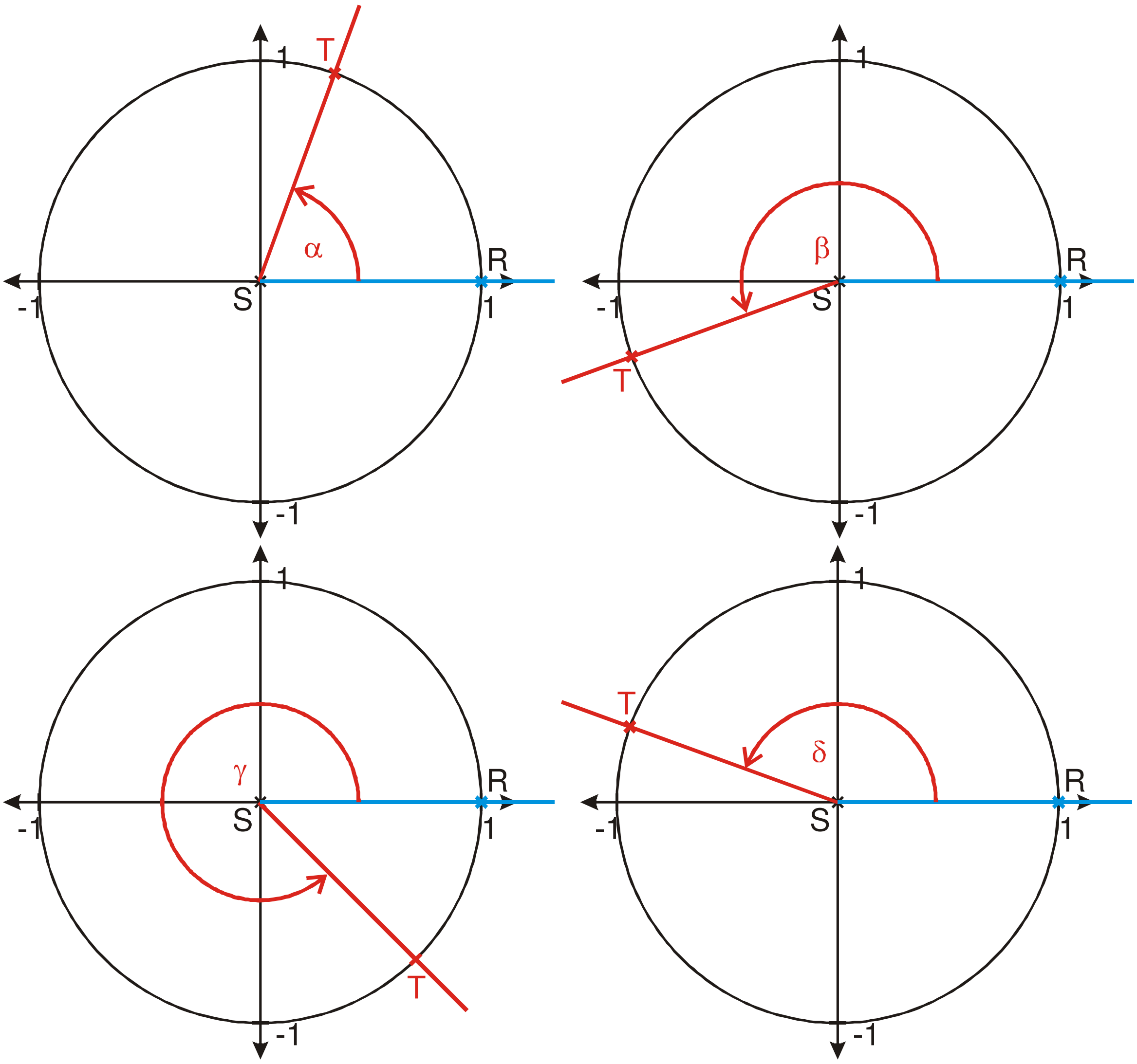
Předpoklady: 4204

Pedagogická poznámka: Největším problémem při zavádění goniometrických funkcí pro orientovaný úhel je rychlá orientace v poloze koncového ramene a převádění mezi desetinnou a stupňovou mírou. Tato hodina vznikla právě jako reakce na těžkosti, které jsem u studentů pozoroval.
Při zakreslování (nebo odečítání) hodnot udaných pomocí obloukové míry, pak můžete objevit jedince, kteří mají vážné problémy se základními představami o zlomcích.
Protože hlavním cílem hodiny je dosáhnout rychlého spojení mezi obrázkem a hodnotou, důrazně se zasazuji, aby žáci do všech obrázků zapisovali hodnoty přímo k místům, kterých se týkají, bez nějakých odkazů na druhý konec stránky. Kontrolovat je třeba, protože se stále nacházejí žáci, které k ramenům napíší a), b), c) a konkrétní hodnoty mají uvedené jinde.

Při zavádění funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro orientovaný úhel se využívá jednotková kružnice. Počáteční rameno orientovaného úhlu má vždy směr kladné poloosy *x*.

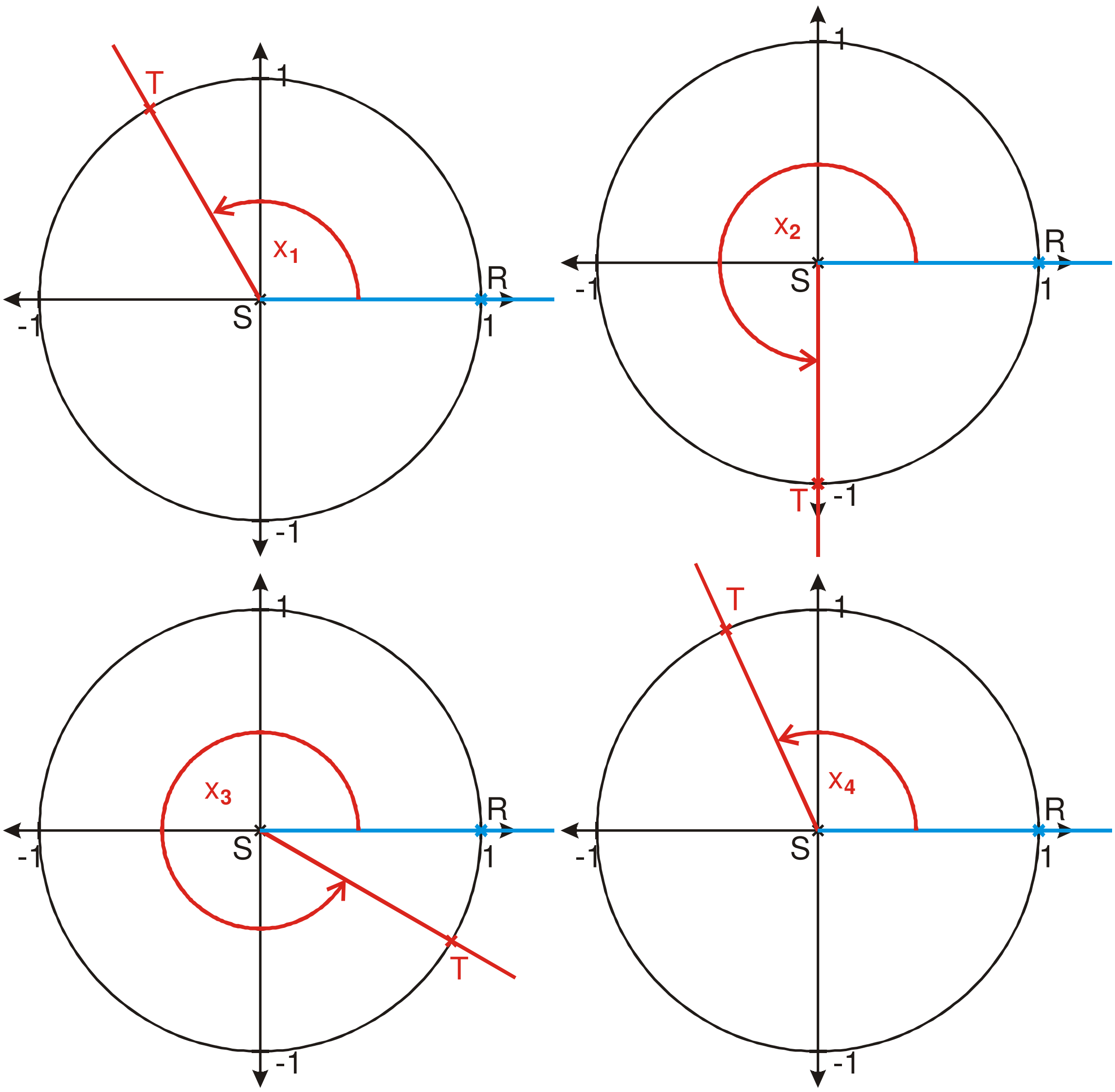


Př. 1: Načrtni do obrázků (pro každý úhel kresli nový) jednotkové kružnice následující úhly. a) $\alpha = 70°$ b) $\beta = 200°$ c) $\gamma = 315°$ d) $\delta = 160°$
U všech úhlů vyznač průsečík koncového ramene s jednotkovou kružnicí.



Pedagogická poznámka: Kromě průsečíku *T* je třeba dávat pozor i na to, aby žáci kreslili obloučky (kvůli upevnění představy o úhlu je to opravdu potřeba).

Př. 2: Načrtni do obrázku (pro každý úhel kresli nový) jednotkové kružnice následující úhly. a) $x_1 = \frac{2}{3}\pi$ b) $x_2 = \frac{3}{2}\pi$ c) $x_3 = \frac{11}{6}\pi$ d) $x_4 = 2\,\text{rad}$
U všech úhlů vyznač průsečík koncového ramene s jednotkovou kružnicí.

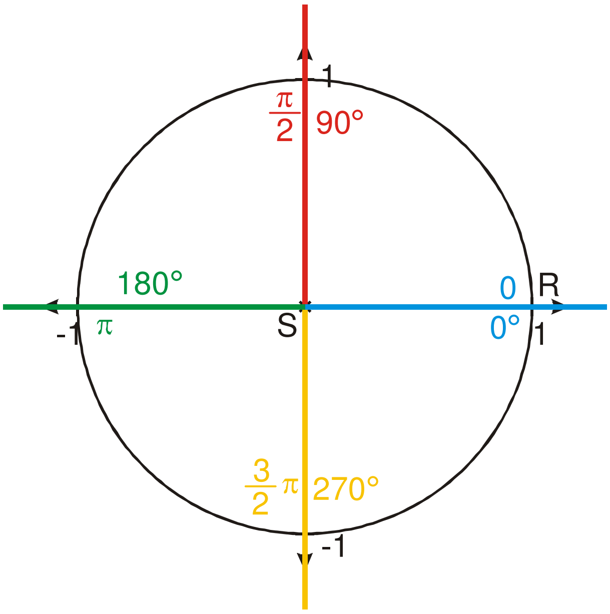


$x_4 = 2\,\text{rad} \doteq 114°35'$

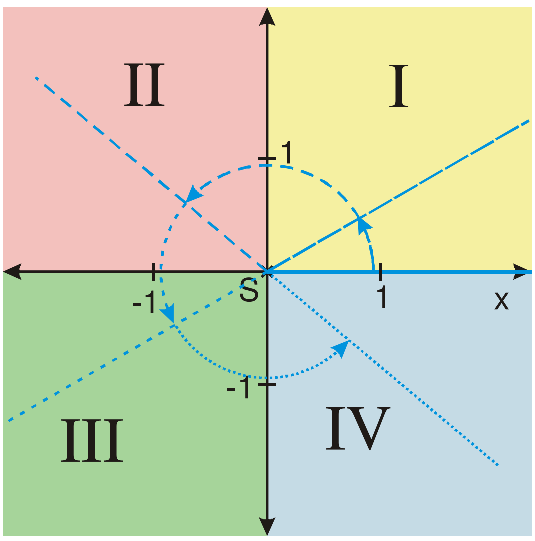
Pedagogická poznámka: Větší problémy bývají pouze s bodem d), kde se ptám jaká je přibližná hodnota π. Jako pomoc kreslím na tabuli úhly 2π, π a $\frac{\pi}{2}$. U některých žáků vyhřeznou problémy se zlomky.
U obrázku bodu c) se bavíme o tom, že je třeba rameno úhlu nakreslit tak, aby se nepletlo s ramenem úhlu $\frac{7}{4}\pi$. Z tohoto důvodu doporučuji u náčrtků odchylku od úhlu $\frac{7}{4}\pi$ (nebo jiného čtvrtinového úhlu) přehánět a kreslit úhel více vodorovný nebo svislý než by byl ve skutečnosti.

Protože všechny orientované úhly, které budeme ve zbytku hodiny kreslit, budou mít počáteční rameno shodné s kladnou poloosou *x*, nebudeme do obrázků vyznačovat počáteční rameno ani oblouček úhlů a úhly budeme znázorňovat pouze koncovým ramenem.

Př. 3: Nakresli do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena úhlů, která splývají s poloosami soustavy souřadnic. Ke každému ramenu napiš základní velikost úhlu v desetinné i obloukové míře.



Př. 4: Souřadná rovina je souřadnými osami rozdělena na čtvrtiny – kvadranty. Kvadranty se označují čísly, podle pořadí, ve kterém do nich ukazuje koncové rameno úhlu, který má počáteční rameno shodné s kladnou poloosou *x* a jehož velikost se postupně zvětšuje od 0 do 2π. Nakresli souřadnou rovinu a očísluj kvadranty.



Př. 5: Zapiš pomocí intervalů v desetinné i obloukové míře do obrázku z předchozího příkladu, pro které hodnoty orientovaného úhlu leží koncové rameno v jednotlivých kvadrantech.

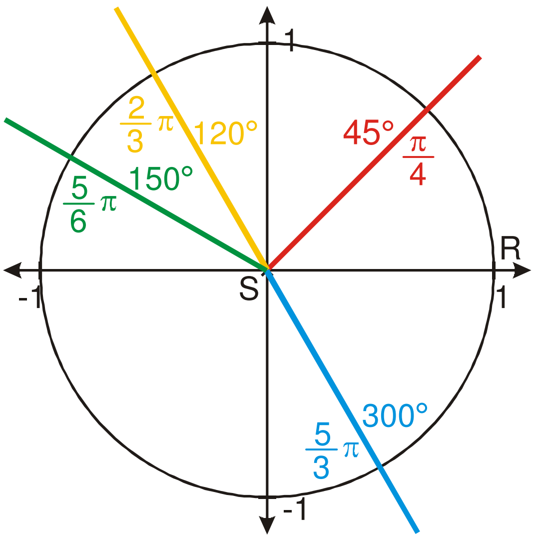
První kvadrant: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nebo $\alpha \in (0°; 90°)$.

Druhý kvadrant: $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nebo $\alpha \in (90°; 180°)$.

Třetí kvadrant: $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ nebo $\alpha \in (180°; 270°)$.

Čtvrtý kvadrant: $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ nebo $\alpha \in (270°; 360°)$.

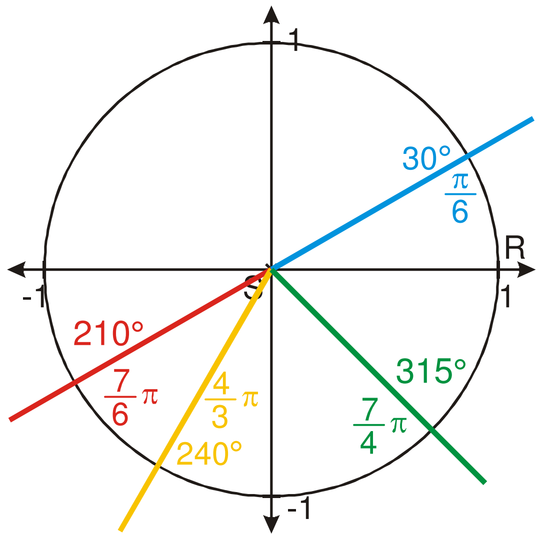
Př. 6: Načrtni do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena následujících úhlů.
a) $\alpha = 45°$ b) $\beta = 150°$ c) $\gamma = 300°$ d) $\delta = 120°$
Ke každému z úhlů napiš také velikost v obloukové míře.



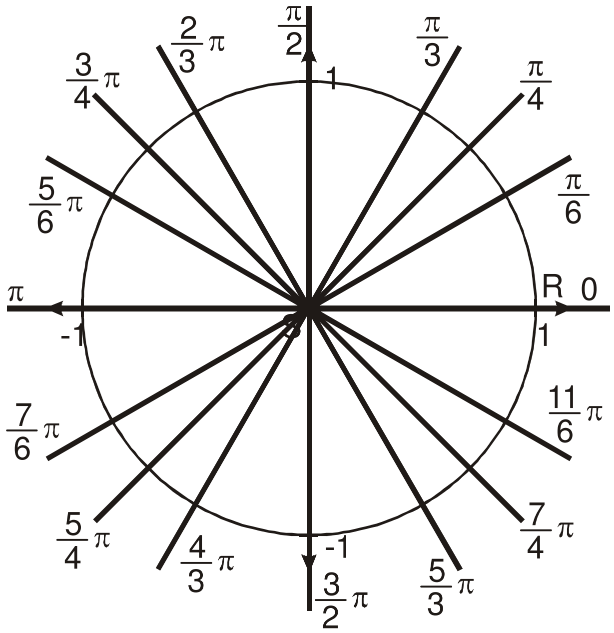
Př. 7: Načrtni do obrázku jednotkové kružnice koncová ramena následujících úhlů.

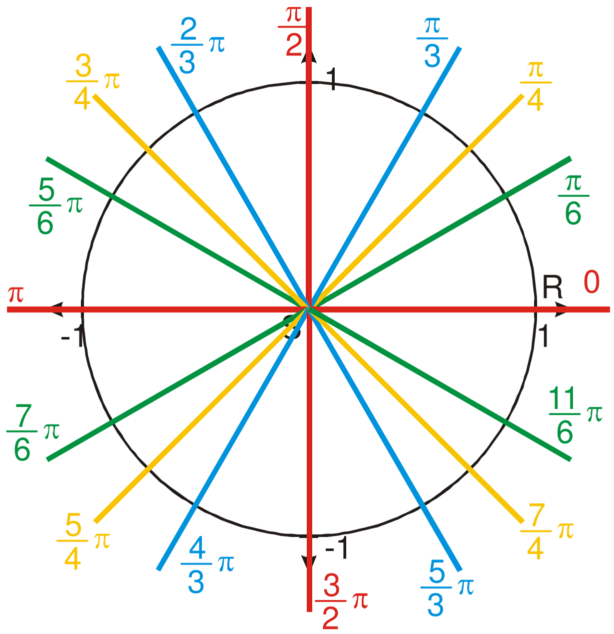
a) $x_1 = \frac{7}{6}\pi$ b) $x_2 = \frac{7}{4}\pi$ c) $x_3 = \frac{\pi}{6}$ d) $x_4 = \frac{4}{3}\pi$

Ke každému z úhlů napiš také velikost v desetinné míře.



Př. 8: Zakresli do jednoho obrázku koncová ramena všech úhlů v tabulce hodnot goniometrických funkcí. Pokus se najít souvislost mezi polohou koncových ramen úhlů a tvarem, kterým jsou zapsány jejich velikosti v úhlové míře.





Zakreslené úhly můžeme rozdělit do čtyř skupin:

- **„půlkové“ úhly**: násobky $\frac{\pi}{2}$ (nakreslené červeně)
- **„čtvrtinové“ úhly**: úhly zapsané zlomky se čtyřkou ve jmenovateli (nakreslené žlutě)
- **„třetinové“ úhly**: úhly zapsané zlomky s trojkou ve jmenovateli (nakreslené modře)
- **„šestinové“ úhly**: úhly zapsané zlomky se šestkou ve jmenovateli (nakreslené zeleně)

Ramena úhlů v každé skupině (kromě „půlkových“ úhlů, kde to platí pouze částečně) jsou navzájem osově (podle některé ze souřadných) nebo středově (podle počátku) souměrná. Navíc ramena:

- „půlkových“ úhlů leží na osách souřadnic,
- „čtvrtinových“ úhlů leží na osách kvadrantů,
- „třetinových“ úhlů se přimykají více k ose y než k ose x,
- „šestinových“ úhlů se přimykají více k ose x než k ose y.

Shrnutí: Rozdělení tabulkových úhlů podle tvaru zlomků odpovídá rozdělení podle polohy koncového ramene.