

4.2.10 Grafy funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinus I

Předpoklady: 4209

Pedagogická poznámka: Kvůli následující hodině je třeba dát pozor, příliš se nezaseknout na začátku hodiny a postupovat tak, aby na příklady 5, 6, 7 zbylo minimálně 15 minut času (a teprve po nich se případně vrátit k příkladu 4).

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

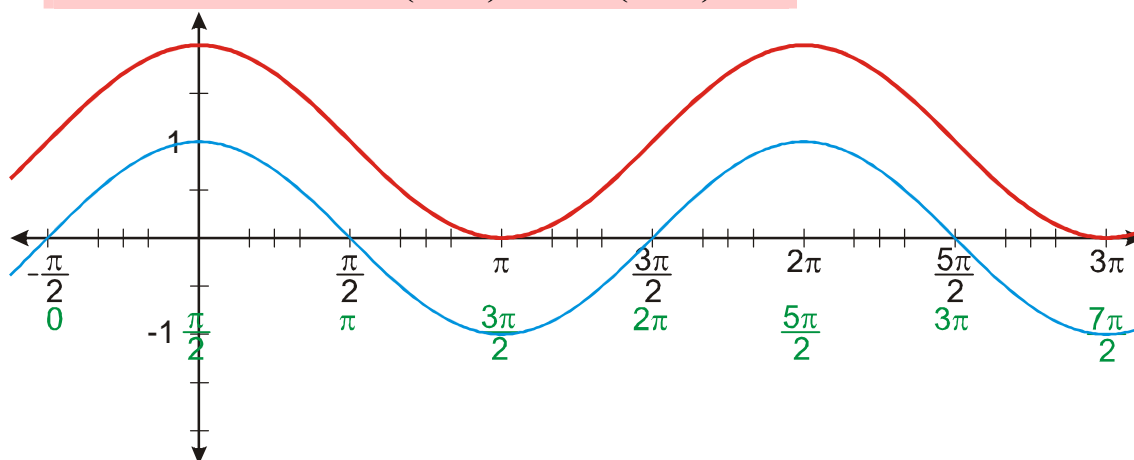
Platí: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

Zvolíme x .

Vypočteme $x + \frac{\pi}{2}$.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.



Dodatek: Funkce, kterou jsme nakreslili, se dá popsat nejen jako $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$, ale také jako $y = \cos x + 1$.

Nepříjemná zjištění:

- Přechíslovávání osy x je kvůli zlomkům poměrně pracné.
- Na rozdíl od všech předchozích funkcí „neprobíhá“ vše důležité v okolí nuly na ose x (kde nám stačilo přechíslovávat dosud), ale kvůli periodicitě funkcí sinus a cosinus se grafy protínají s osou x v celém kresleném intervalu a proto bychom měli přechíslovávat celou osu x .

⇒

Dvě změny v našem systému kreslení grafů:

- Nakreslíme pomocný graf původní funkce. Graf původní funkce kreslíme pomocí původních souřadnic, a proto nepotřebujeme přečíslovanou osu. Tvar grafu původní funkce dobře známe a proto ho dokážeme nakreslit rychle.
- Číslo uvnitř předpisu funkce (například $\frac{\pi}{2}$ u funkce $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$) budeme vnímat jako číslo, které určuje posunutí po ose x . Pomocí tohoto čísla snadno najdeme počáteční bod, ze kterého začneme kreslit křivku, která bude kopírovat graf původní funkce.

Například u funkce $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ můžeme postupovat takto:

Platí: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

- Nakreslíme graf funkce $y = \sin x$.
- Číslo $\frac{\pi}{2}$ určuje změnu x před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose x .

Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0 \Rightarrow kdy platí

$$x + \frac{\pi}{2} = 0?$$

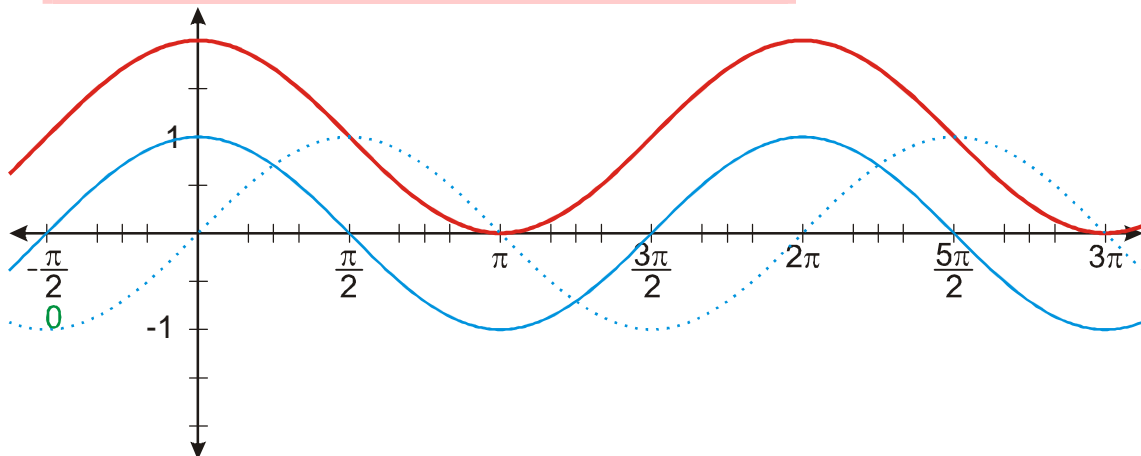
$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{funkce „začíná“ v bodě } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Zvolíme x a nakreslíme graf $y = \sin x$.

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.



Př. 2: Nakresli graf funkce $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Platí: $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Číslo $-\frac{\pi}{6}$ určuje změnu x před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose x .

Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0. \Rightarrow Kdy platí $x - \frac{\pi}{6} = 0$?

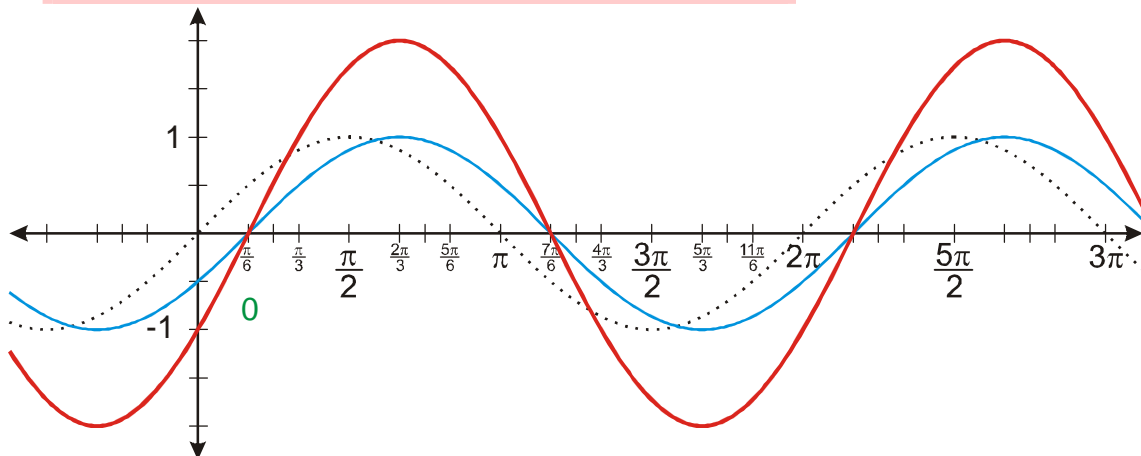
$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ funkce „začíná“ v bodě $x = \frac{\pi}{6}$.

Zvolíme x a nakreslíme graf $y = \sin x$.

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Nakreslíme funkci $y = 2f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

Platí: $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$. Číslo $-\frac{\pi}{3}$ určuje změnu x před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose x .

Sinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce sinus dosazujeme 0. \Rightarrow Kdy platí $x - \frac{\pi}{3} = 0$?

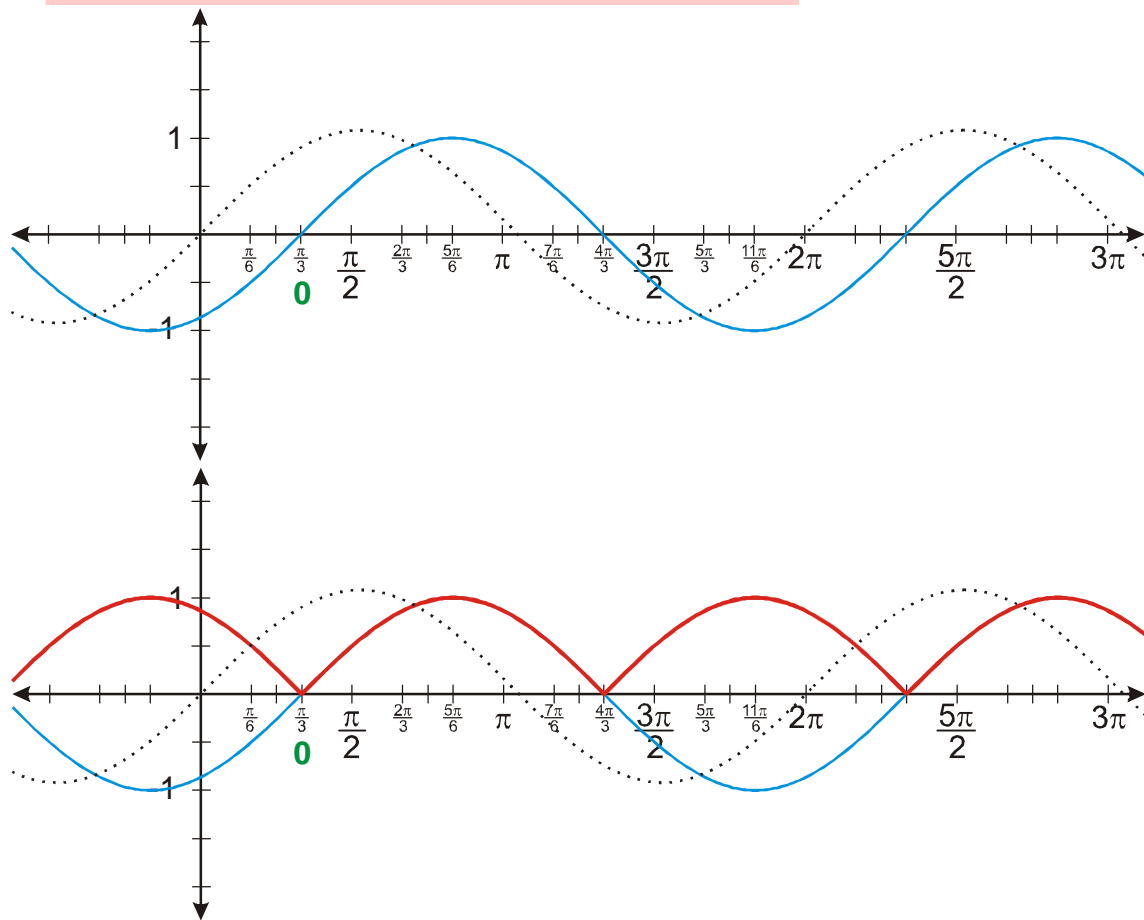
$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ funkce „začíná“ v bodě $x = \frac{\pi}{3}$.

Zvolíme x a nakreslíme graf funkce $y = \sin x$.

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci $y = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Nakreslíme funkci $y = \left| f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$.



Př. 4: Nakresli graf funkce $y = 0,5 \cos(x-1)$.

Platí: $y = 0,5 \cos(x-1) = 0,5 f(x-1)$. Číslo -1 určuje změnu x před výpočtem hodnot funkce a tedy posunutí na ose x .

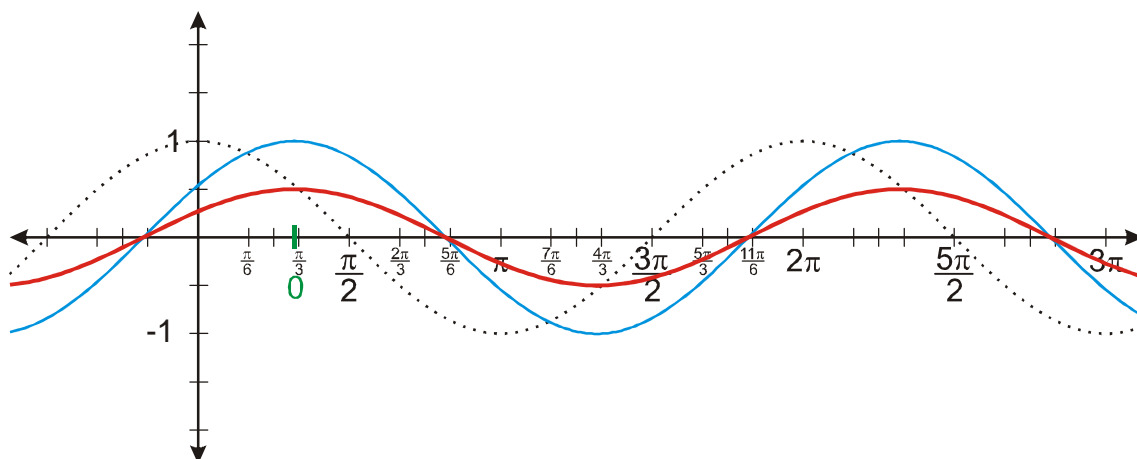
Cosinusoida „začíná“ v místě, kdy do funkce cosinus dosazujeme 0. \Rightarrow Kdy platí $x-1=0$?
 $x=1 \Rightarrow$ funkce „začíná“ v bodě $x=1$.

Zvolíme x a nakreslíme $y = \cos x$.

Vypočteme posunutí a nakreslíme počáteční bod.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \cos(x-1)$.

Nakreslíme funkci $y = \left| f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right| = \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right|$.



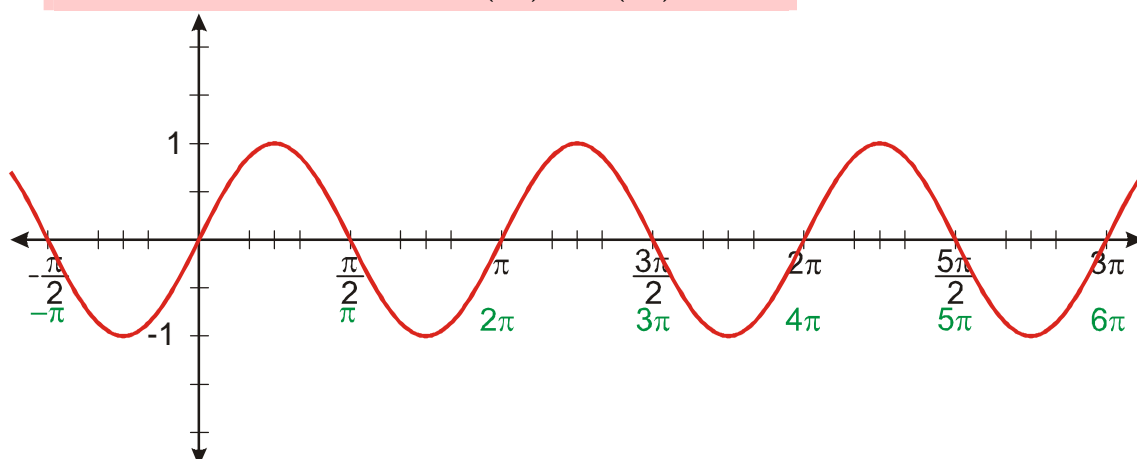
Př. 5: Nakresli graf funkce $y = \sin(2x)$. Urči její nejmenší periodu.

Platí: $y = \sin(2x) = f(2x)$.

Zvolíme x .

Vypočteme $2x$.

Nakreslíme funkci $y = f(2x) = \sin(2x)$.



Nejmenší periodou funkce je číslo π .

Pedagogická poznámka: Některým studentům je třeba zdůraznit, že periodu určujeme samozřejmě z původních hodnot proměnné x a ne z hodnot, které získáme na ose x přečíslováním.

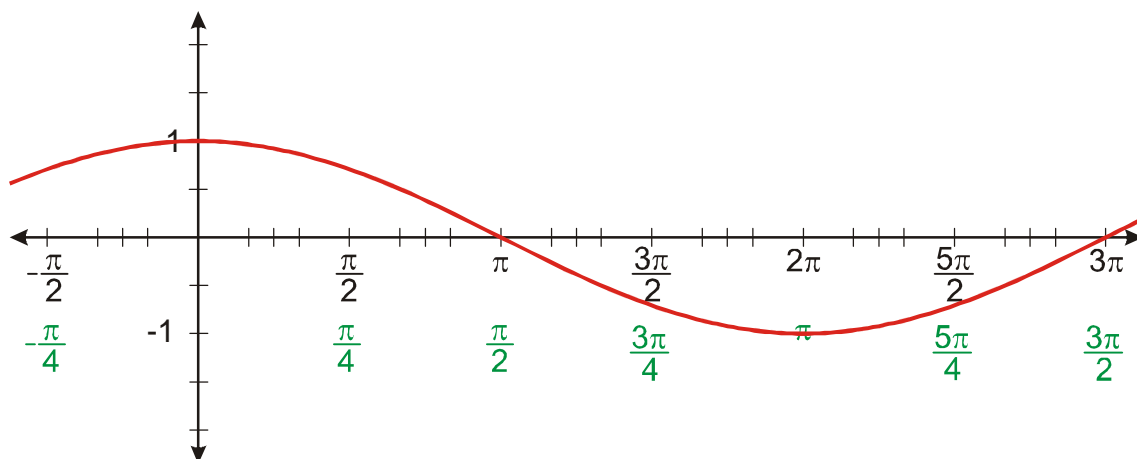
Př. 6: Nakresli graf funkce $y = \cos(0,5x)$. Urči její nejmenší periodu.

Platí: $y = \cos(0,5x) = f(0,5x)$.

Zvolíme x .

Vypočteme $0,5x$.

Nakreslíme funkci $y = f(0,5x) = \cos(0,5x)$.



Nejmenší periodou funkce je číslo 4π .

Př. 7: Rozhodni, jaký vliv na graf funkce $y = \sin(ax)$ má hodnota čísla a . Jak mění hodnota čísla a nejmenší periodu funkce?

Z předchozích ukázek je zřejmé, že hodnota čísla a určuje „natažení grafu“ ve vodorovném směru. Nejmenší perioda funkce se rovná $\frac{2\pi}{|a|}$.

Př. 8: Nakresli graf funkce $y = \sin|3x|$.

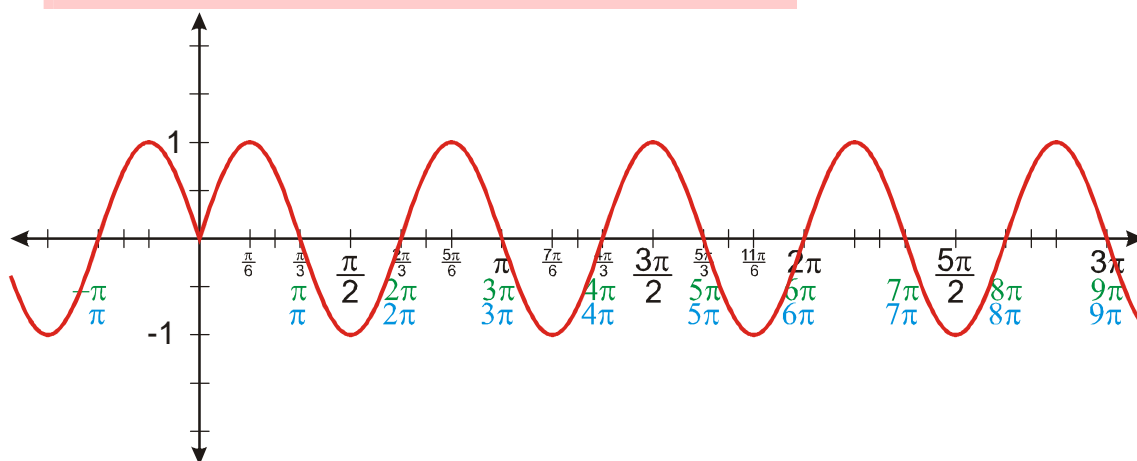
Platí: $y = \sin|3x| = f(|3x|)$.

Zvolíme x .

Vypočteme $3x$.

Vypočteme $|3x|$.

Nakreslíme funkci $y = f(|3x|) = \sin|3x|$.



Př. 9: Petáková:

strana 41/cvičení 15 f_3, f_6, f_8 (pouze načrtnutí grafů)

strana 41/cvičení 16 g_2, g_6, g_9 (pouze načrtnutí grafů)

Shrnutí: Při kreslení grafů funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinus v některých případech nepřepisujeme osu a místo toho využíváme původní graf a jeho posunutí.