

4.2.11 Grafy funkcí odvozených z funkcí sinus a cosinus II

Předpoklady: 4210

Pedagogická poznámka: Pokud máte málo času, můžete z této hodiny vyřešit pouze první tři příklady a ve zbývajících 25 minutách projít následující hodinu s tím, že studenti budou mít méně času na samostatné přemýšlení.

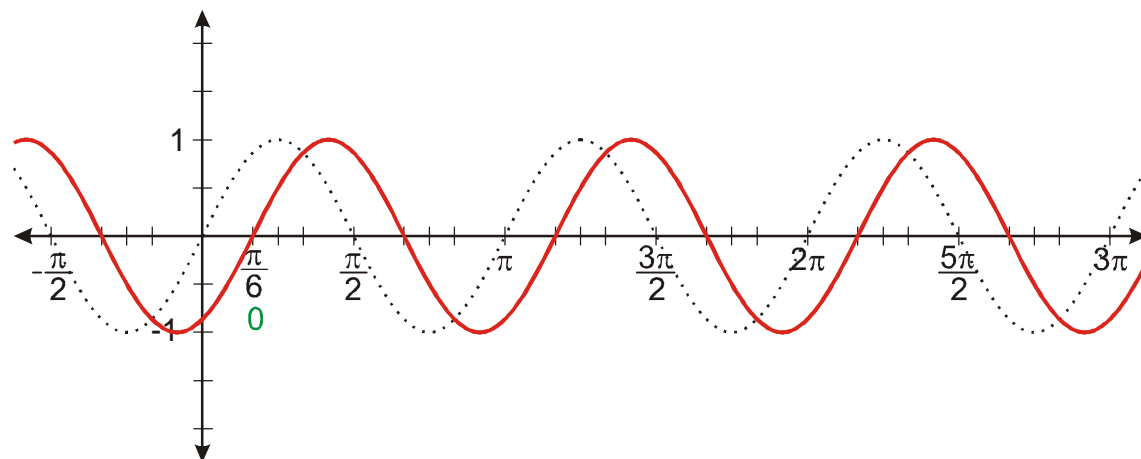
Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Funkce sinus „začíná“, když do sinu dosadíme číslo 0 $\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

\Rightarrow upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí: $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right]$.

\Rightarrow Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{6}$ doprava a bude dvakrát „zahuštěný“ (nejmenší perioda bude dvakrát menší než u funkce $\sin x$).

Graf posunuté funkce budeme kreslit pomocí grafu funkce $y = \sin(2x)$.



Př. 2: Nakresli graf funkce $y = \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{6}\right)$.

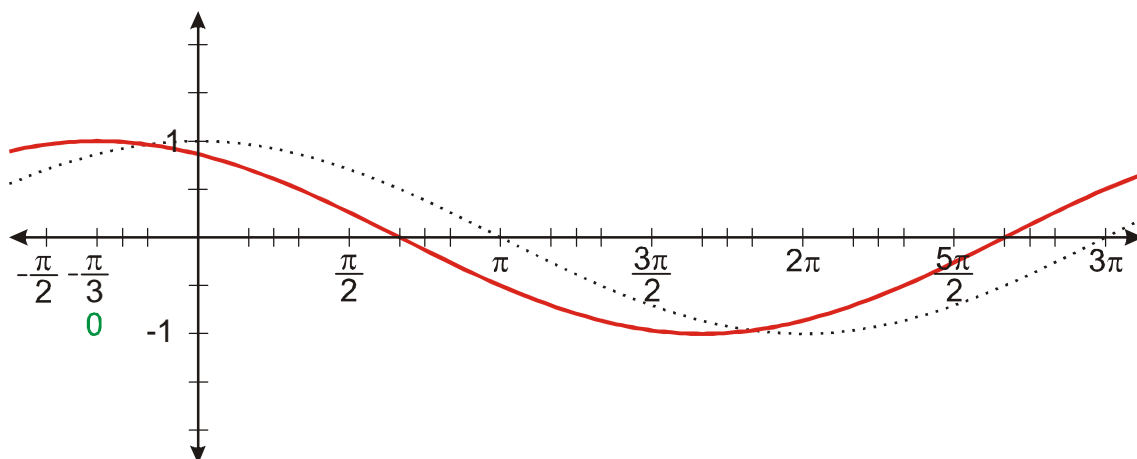
Funkce cosinus „začíná“, když do cosinu dosadíme číslo 0 $\Rightarrow 0,5x + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow 0,5x = -\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow$ upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí:

$y = \cos\left(0,5x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[0,5\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$. \Rightarrow Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{3}$ doleva a bude dvakrát

„protažený“ (nejmenší perioda bude dvakrát větší než u funkce $\cos x$).

Graf posunuté funkce budeme kreslit pomocí grafu funkce $y = \cos(0,5x)$.



Př. 3: Je dána funkce $y = a \sin(bx + c) + d$. Rozhodni, jaký vliv mají na tvar grafu hodnoty parametrů a , b , c , d .

Parametr a – určuje „roztážení“ grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin x$ má svislou velikost 2, funkce $y = a \sin(bx + c) + d$ má svislou velikost $2|a|$). Pokud $a < 0$, graf funkce se převrátí ve svislém směru.

Parametr b – určuje „roztážení“ grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin x$ má nejmenší periodu 2π , funkce $y = a \sin(bx + c) + d$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{|b|}$). Pokud $b < 0$, graf funkce se převrátí ve vodorovném směru.

Parametr c – spolu s parametrem b určuje posunutí grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin x$ „začíná“ v bodě $x = 0$, funkce $y = a \sin(bx + c) + d$ „začíná“ v bodě $x = -\frac{c}{b}$).

Parametr d – určuje posunutí grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin x$ obíhá okolo přímky $y = 0$, funkce $y = a \sin(bx + c) + d$ obíhá okolo přímky $y = d$).

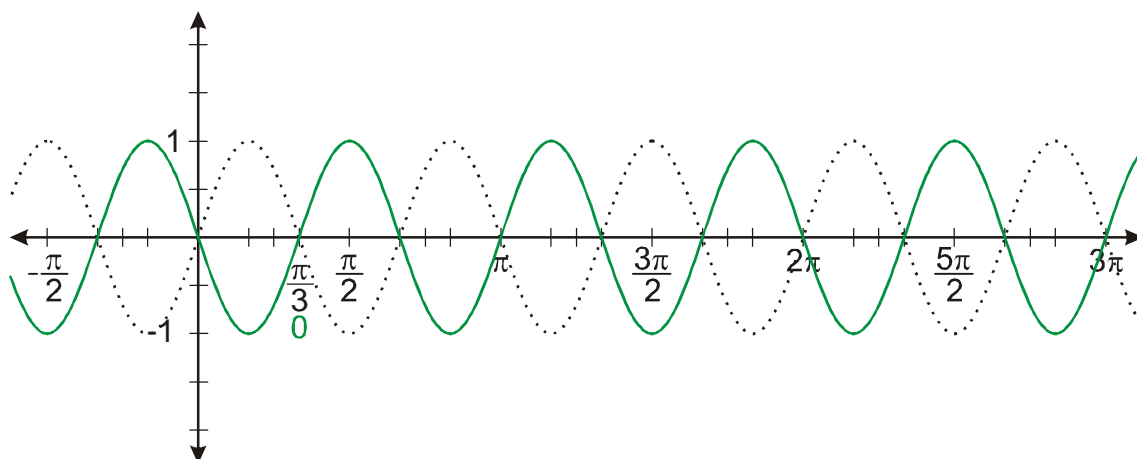
Př. 4: Nakresli graf funkce $y = 0,5 \sin(3x - \pi) + 1$.

Upravíme vnitřek funkce tak, aby bylo vidět posunutí:

$$y = 0,5 \sin(3x - \pi) + 1 = 0,5 \sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right] + 1.$$

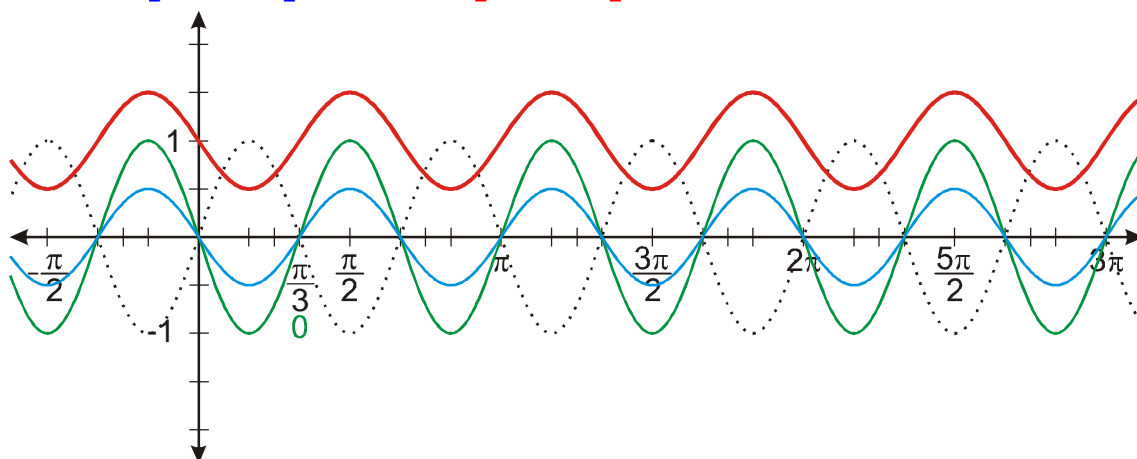
\Rightarrow Graf bude posunutý o $\frac{\pi}{3}$ doprava a bude třikrát „zkrácený“ (nejmenší perioda bude třikrát menší než u funkce $\sin x$).

Graf posunuté funkce $y = \sin \left[3 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right]$ budeme kreslit pomocí grafu funkce $y = \sin(3x)$.



Pomocí grafu funkce: $y = \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$ nakreslíme grafy funkcí:

$$y = 0,5 \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \text{ a } y = 0,5 \sin\left[3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] + 1.$$



Př. 5: Nakresli graf funkce $y = \frac{\pi}{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Nejdříve určíme periodu funkce $y = \sin(\pi x)$. Porovnááme:

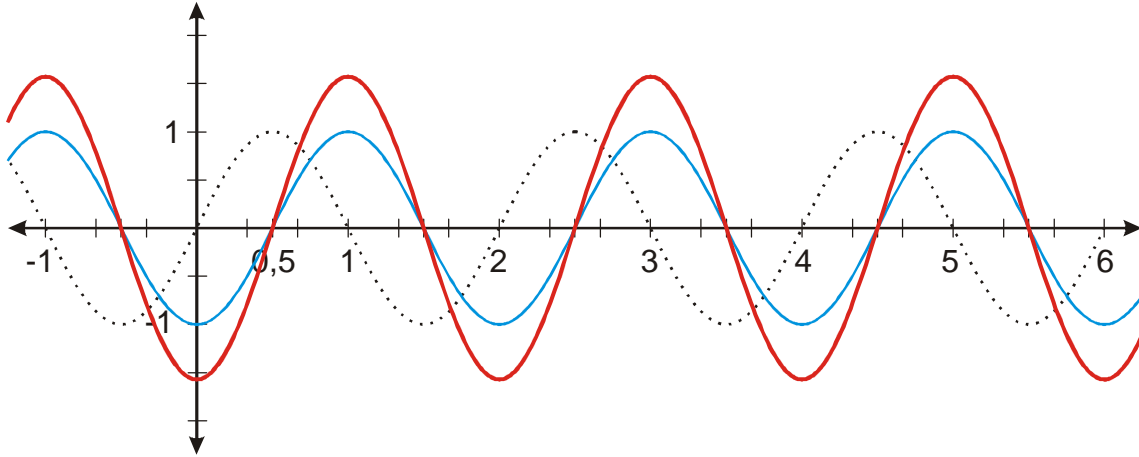
- funkce $\sin x$ má nejmenší periodu 2π ,
- funkce $\sin(2x)$ má nejmenší periodu π ,
- funkce $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ má nejmenší periodu 6π ,

\Rightarrow zřejmě: funkce $\sin(bx)$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{|b|}$.

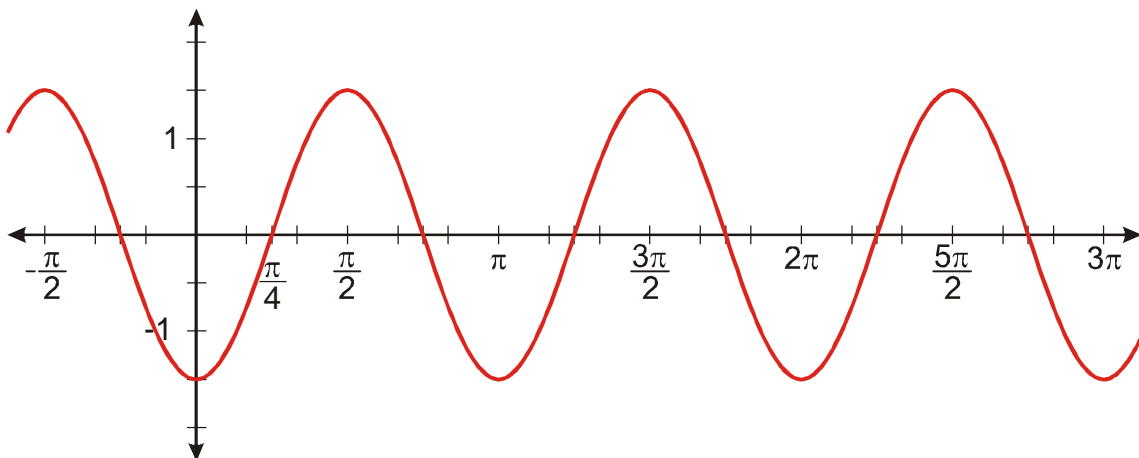
Funkce $y = \sin(\pi x)$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow x$ -vou osu budeme popisovat normálně, ne pomocí násobků π .

Upravíme předpis funkce: $y = \frac{\pi}{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left[\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$. \Rightarrow Graf bude posunutý o

$\frac{1}{2}$ doprava s nejmenší periodou 2. Vynásobením $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$ se zvětší „roztažení“ funkce na ose y .



Př. 6: Najdi předpis funkce, jejíž graf je na obrázku. Předpokládej, že jde o funkci odvozenou od funkce: a) $\sin x$ b) $\cos x$.



a) funkce odvozená z funkce $\sin x$

Hledáme vyjádření ve tvaru $y = a \sin[b(x-c)] + d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y = 0 \Rightarrow d = 0$,
- platí $H(f) = \langle -1,5; 1,5 \rangle \Rightarrow a = 1,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\pi \Rightarrow b = 2$,
- funkce „začíná“ v bodě $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$.

Hledaná funkce má předpis $y = 1,5 \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

b) funkce odvozená z funkce $\cos x$

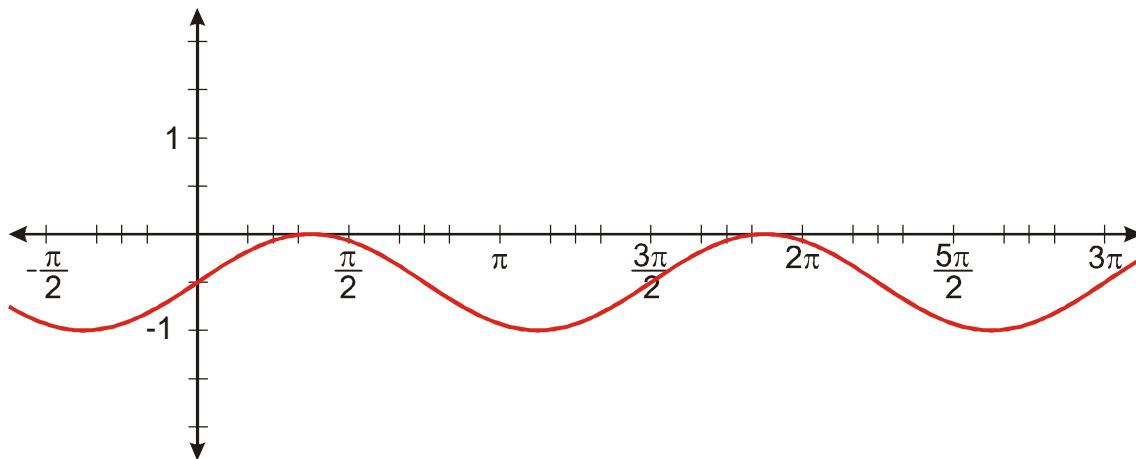
Hledáme vyjádření ve tvaru $y = a \cos[b(x-c)] + d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y = 0 \Rightarrow d = 0$,

- platí $H(f) = \langle -1, 5; 1, 5 \rangle \Rightarrow a = 1,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\pi \Rightarrow b = 2$,
- funkce „začíná“ v bodě $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$.

Hledaná funkce má předpis $y = 1,5 \cos \left[2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \right]$.

Př. 7: Najdi předpis funkce, jejíž graf je na obrázku. Předpokládej, že jde o funkci odvozenou z funkce: a) $\sin x$ b) $\cos x$.



a) funkce odvozená z funkce $\sin x$

Hledáme vyjádření ve tvaru $y = a \sin [b(x-c)] + d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y = -0,5 \Rightarrow d = -0,5$,
- platí $H(f) = \langle -1; 0 \rangle \Rightarrow a = 0,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\frac{3}{2}\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$ (v intervalu $\langle 0; 3\pi \rangle$ se funkce zopakuje dvakrát,
- funkce „začíná“ v bodě $x = 0 \Rightarrow c = 0$.

Hledaná funkce má předpis $y = 0,5 \sin \left[\frac{4}{3} x \right] - 0,5$.

b) funkce odvozená z funkce $\cos x$

Hledáme vyjádření ve tvaru $y = a \cos [b(x-c)] + d$:

- funkce „obíhá“ okolo přímky $y = -0,5 \Rightarrow d = -0,5$,
- platí $H(f) = \langle -1; 0 \rangle \Rightarrow a = 0,5$,
- nejmenší perioda funkce se rovná $\frac{3}{2}\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{4}{3}$ (v intervalu $\langle 0; 3\pi \rangle$ se funkce zopakuje dvakrát,
- „začátek“ funkce není příliš zřejmý \Rightarrow využijeme rovnost $\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow$

$$\sin \left(\frac{4}{3} x \right) = \cos \left(\frac{4}{3} x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{3}{8} \pi \right) \right].$$

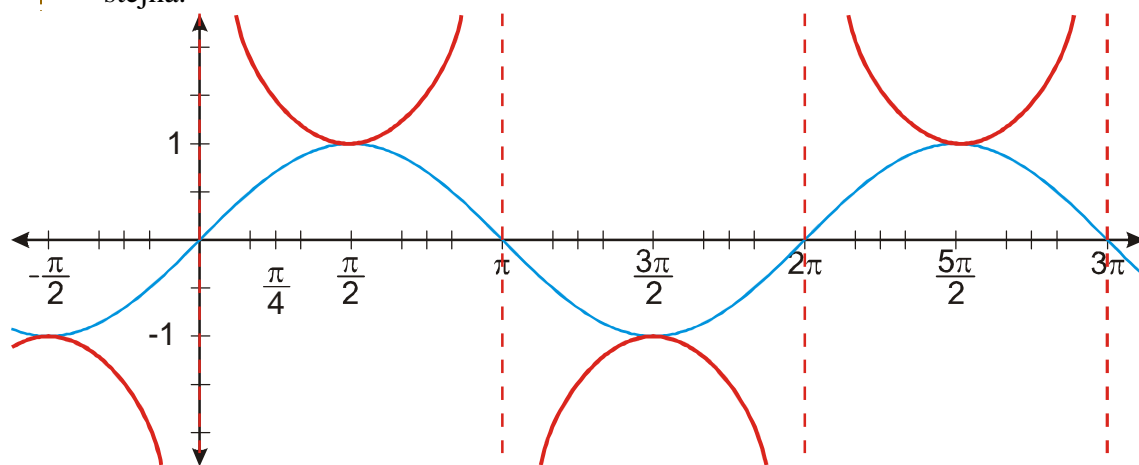
Hledaná funkce má předpis $y = 0,5 \cos \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{3}{8} \pi \right) \right] - 0,5$.

Př. 8: Načrtni grafy funkcí: a) $y = \sin^{-1} x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin x + \cos x$.
Svůj odhad ověř pomocí počítačového programu.

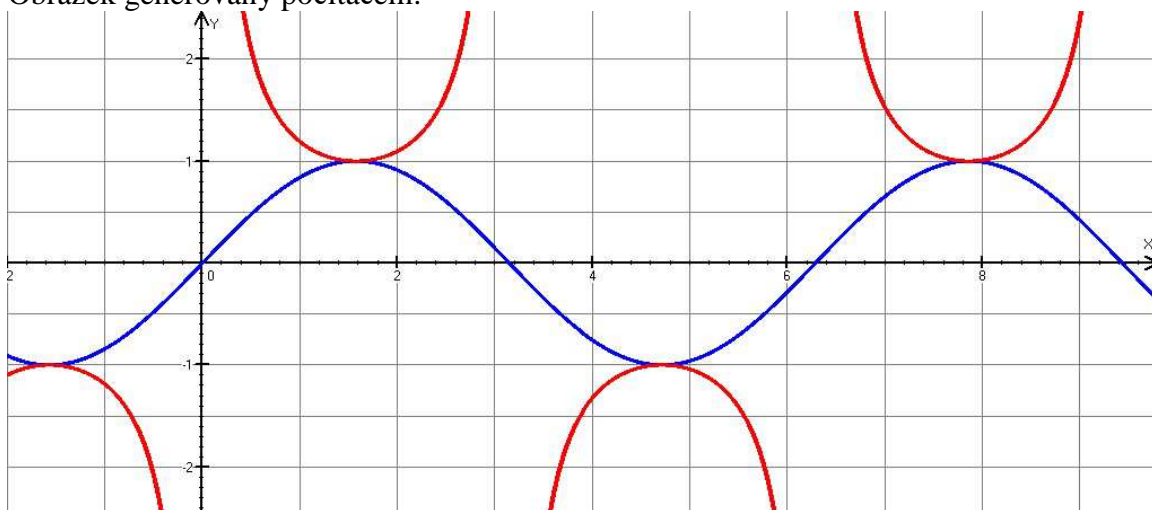
a) $y = \sin^{-1} x$

Hledáme převrácené hodnoty k hodnotám funkce $y = \sin x \Rightarrow$

- v bodech, kde jsou hodnoty funkce $y = \sin x$ nulové, funkce $y = \sin^{-1} x$ hodnoty nemá,
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ hodnotu 1 nebo -1 , je hodnota funkce $y = \sin^{-1} x$ stejná.



Obrázek generovaný počítačem:

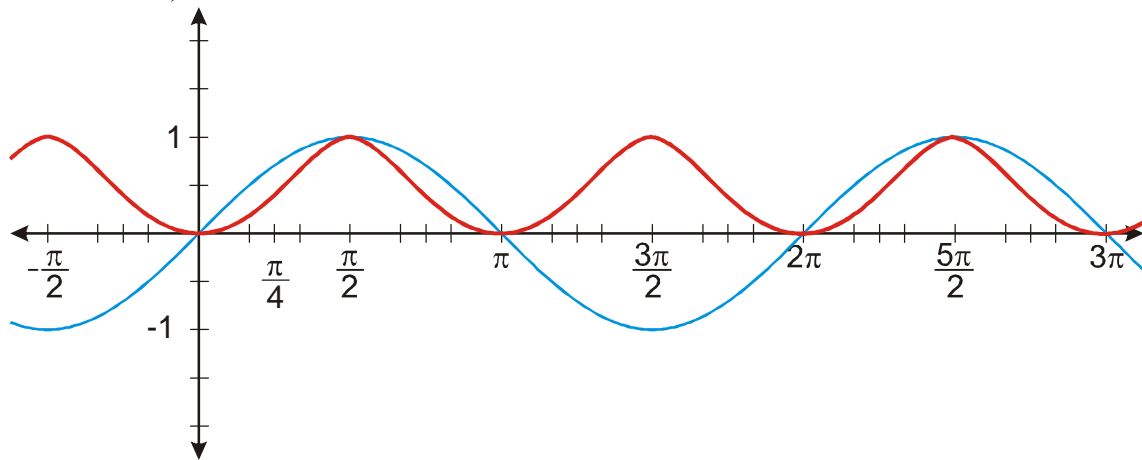


b) $y = \sin^2 x$

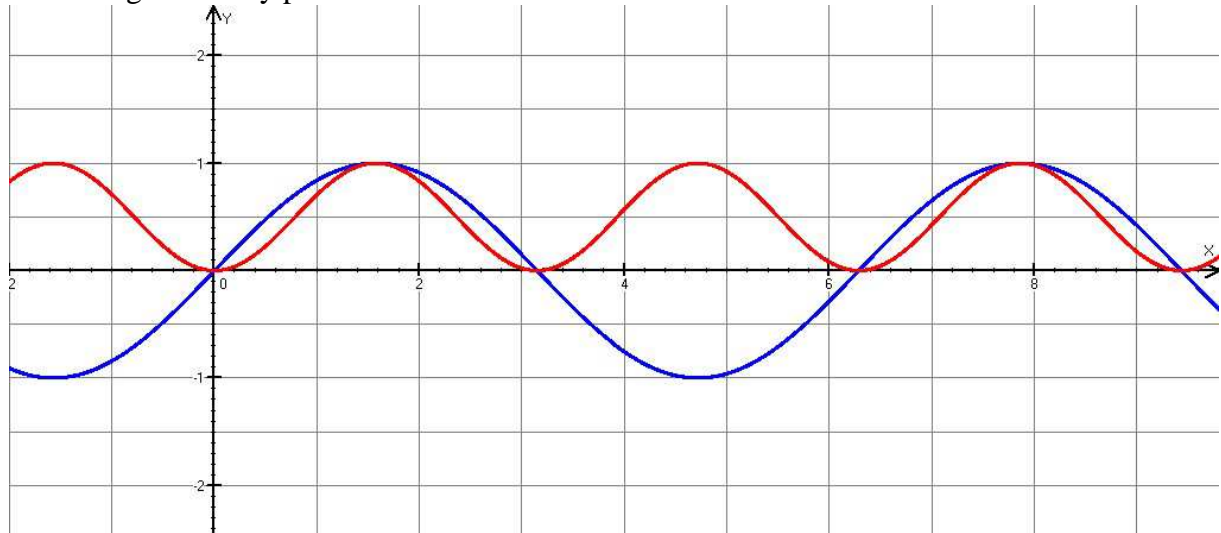
Hledáme druhé mocniny hodnot funkce $y = \sin x \Rightarrow$

- všechny hodnoty budou kladné,
- v bodech, kde jsou hodnoty funkce $y = \sin x$ nulové, je hodnota funkce $y = \sin^2 x$ také nulová,
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ hodnotu 1 nebo -1 , je hodnota funkce $y = \sin^2 x$ rovna jedné,

- ve všech ostatních bodech je absolutní hodnota hodnoty funkce $y = \sin^2 x$ menší než absolutní hodnota funkce $y = \sin x$ (umocňujeme čísla s absolutní hodnotou menší než 1).



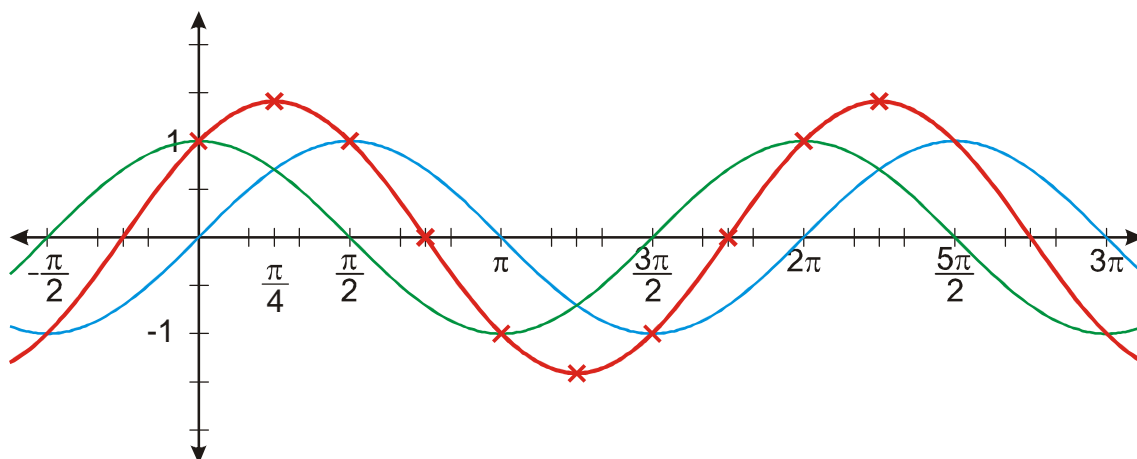
Obrázek generovaný počítačem:



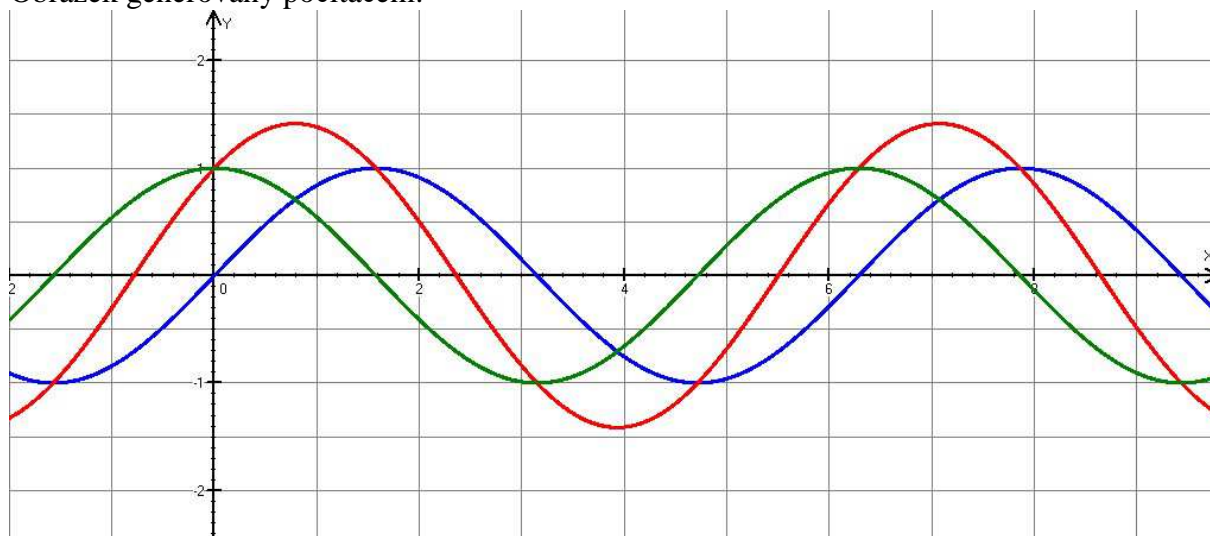
c) $y = \sin x + \cos x$

Nakreslíme grafy obou funkcí a sčítáme jejich hodnoty \Rightarrow

- v bodech, kde jsou hodnoty funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ stejné, má funkce $y = \sin x + \cos x$ maximum (nebo minimum) (strmost obou funkcí klesá s jejich absolutní hodnotou),
- v bodech, kde má funkce $y = \sin x$ nebo $y = \cos x$ hodnotu 0, je hodnota funkce $y = \sin x + \cos x$ rovna hodnotě druhé funkce,
- v bodech, kde jsou hodnoty funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$ opačné, má funkce $y = \sin x + \cos x$ hodnotu nula.



Obrázek generovaný počítačem:



Dodatek: Oba grafy vygenerované počítačem v bodech b) a c) jsou nápadně podobné funkcím $\sin x$ a $\cos x$. Nejde o náhodu, opravdu jde o funkce odvozené z funkce $y = \sin x \Rightarrow$ goniometrické funkce mají zřejmě mnoho speciálních vlastností.

Př. 9: Petáková:

strana 41/cvičení 17 h_1, h_2, h_3, h_5 (pouze načrtnutí grafů)

Shrnutí: