4.2.12 Rychlé určování hodnot funkcí sinus a cosinus

Předpoklady: 4207, 4208

Pedagogická poznámka: Tato kapitola nepřináší nic nového a nemá ekvivalent v klasických učebnicích. Cílem hodiny je uspořádat v hlavách žáků hodnoty goniometrických funkcí tak, aby je mohli v následujících hodinách používat a přitom nebyli nuceni k jejich bezduchému zapamatování. Hodina je také myšlena jako ukázka toho, jak je možné si dělat pořádek ve větším množství dat. Velká většina žáků nic podobného neprování a to ani v případě, že jim to dáte za domácí úkol nebo jim vyčleníte (třeba i celou) vyučovací hodinu. Proto je celý postup doveden až do konce (i když jako obvykle některé kroky nechávám žáky provést samostatně), což není ideální, protože by samozřejmě bylo nejvýhodnější, kdyby si podobný systém vybudoval každý žák sám.

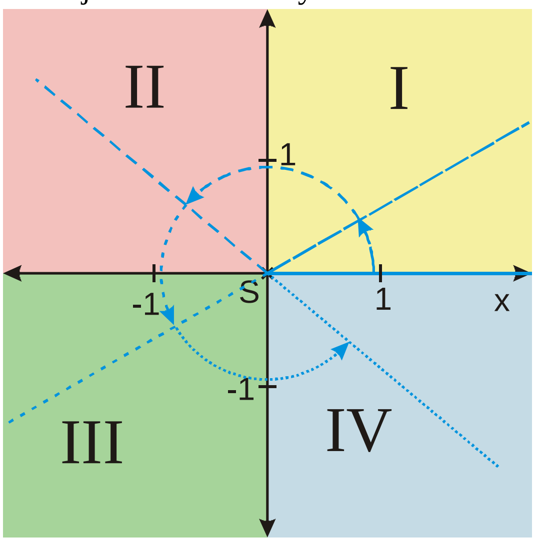
Potřebujeme určit hodnotu $\sin 330°$. Jak můžeme postupovat?

- Podívat se do tabulky.
  Nevýhoda: Bez tabulky jsme v koncích (a namydlení).
- Pamatovat si výsledek uvedený v tabulce.
  Nevýhoda: Musíme si pamatovat spoustu údajů, které se navzájem pletou.
- Nakreslit si obrázek a hodnotu spočítat, jak jsme dělali při doplňování tabulky.
  Nevýhoda: Strašně zdlouhavé.

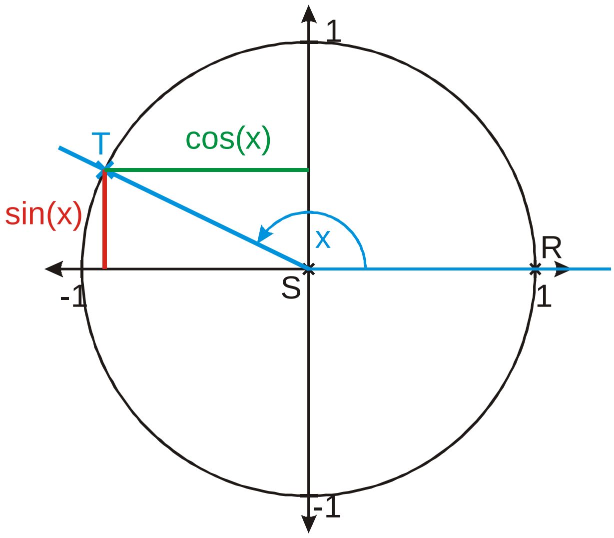
$\Rightarrow$ Hledají se různé způsoby vybavování hodnot, které nevyžadují příliš mnoho pamatování a jsou rychlé.

Opakování:

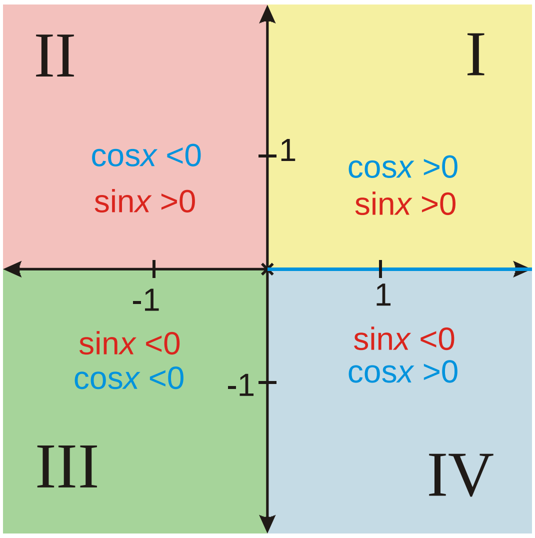
Souřadná rovina je souřadnými osami rozdělena na kvadranty, které jsou očíslovány podle pořadí, ve kterém do nich směřují koncová ramena postupně se zvětšujících orientovaných úhlů.



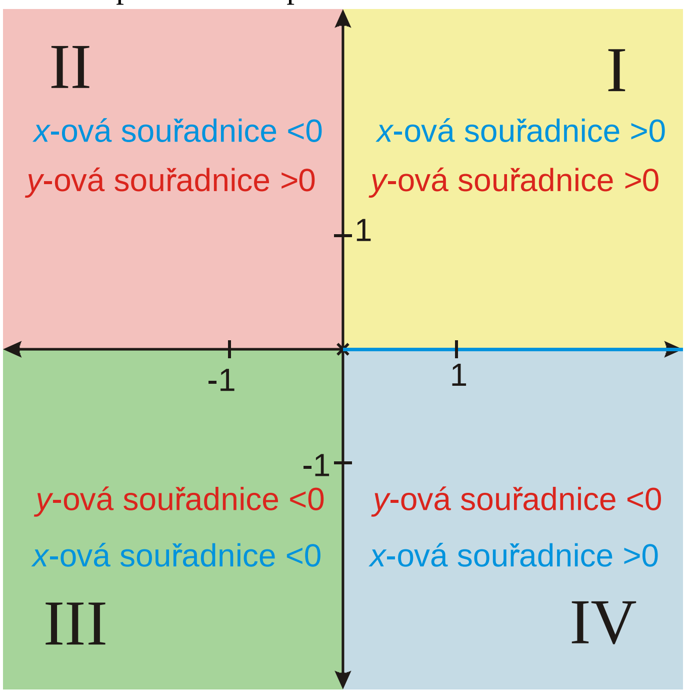
Hodnoty goniometrických funkcí bereme jako souřadnice bodu *T*, který vznikne jako průsečík koncového ramene orientovaného úhlu s jednotkovou kružnicí.



Př. 1: Dopiš do obrázku do každého kvadrantu znaménko hodnot goniometrických funkcí.



Uvedené nerovnosti platí nejenom pro hodnoty $\sin x$ a $\cos x$, ale i pro souřadnice všech bodů, které se v daných kvadrantech nalézají ($\sin x$ a $\cos x$ nejsou nic víc než souřadnice bodů v kvadrantu, proto pro ně musí platit to samé, co platí pro libovolný bod).
Obrázek pak můžeme překreslit i takto:



Pedagogická poznámka: Předchozí upozornění není zbytečné. Studenti mají tendence hledat v předchozím úkolu něco tajemného a výjimečného.

Pedagogická poznámka: Na následující příklad nemá cenu nechávat příliš mnoho času, většina žáků moc užitečného nevymyslí a větší přínos než bezvýsledné studování tabulky pro ně může být v samostatném řešení následujících příkladů.
Pokud se najde žák, který dokáže něco vymyslet, nic nebrání tomu, aby svůj výsledek piloval a zbytek hodiny si prošel doma nebo ho přeskočil. U všech ostatních pak platí, že tato hodina je pouhou náhražkou ideálního stavu, ve kterém

by podobný systém dokázali vytvořit sami bez tlaku zvenku a proto se snažím, aby v hodině měli co nejvíce prostoru sami hledat a sami uspořádávat (což by jim měly umožnit příklady ve větší části hodiny, které většinou nepromítám, ale zadávám slovně). Na řešení příkladů v konci hodiny (10 a dále) není třeba více než sedm minut času.

Př. 2: Prohlédni tabulku s hodnotami goniometrických funkcí a najdi v ní pravidelnosti nebo zákonitosti, které by bylo možné využít při rychlejším a jednodušším vybavování hodnot goniometrických funkcí.

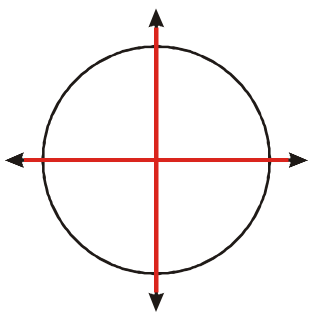
Úkol může být splněn různě, následující povídání je jen jednou z možností.

Tabulku s hodnotami goniometrických funkcí můžeme přepsat pro větší přehlednost do dvou řádků a sloupce v tabulce si rozdělit pomocí barevného pozadí do několika skupin.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

První skupinou jsou úhly s červeným pozadím (**„půlkové“ úhly**):

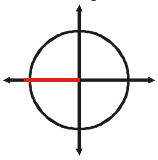
- jde o násobky úhlu $\frac{\pi}{2}$ (násobky $90°$),
- koncová ramena těchto orientovaných úhlů jsou shodná se souřadnými poloosami,



- hodnoty goniometrických funkcí dosahují jednu z hodnot 0, -1, 1 (jedna z funkcí je nulová, druhá nenulová).

Hodnotu sinu i cosinu pro libovolný z těchto úhlů snadno určíme tím, že si představíme koncové rameno úhlu a vybereme ze tří možných hodnot.

$\sin\pi$

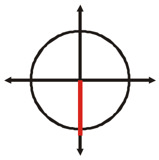


$\Rightarrow \sin\pi = 0$ (y-ová souřadnice)

Př. 3: Urči.

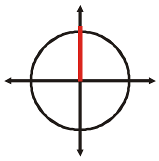
a) $\cos\frac{3\pi}{2}$ b) $\sin\frac{\pi}{2}$ c) $\sin 2\pi$ d) $\cos\pi$

$\cos\frac{3\pi}{2}$



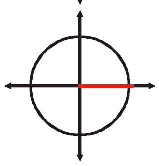
$\Rightarrow \cos\frac{3}{2}\pi = 0$ (x-ová souřadnice)

$\sin\frac{\pi}{2}$



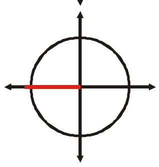
$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$ (y-ová souřadnice)

$\sin 2\pi$



$\Rightarrow \sin 2\pi = 0$ (y-ová souřadnice)

$\cos\pi$



$\Rightarrow \cos\pi = -1$ (x-ová souřadnice)

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady si nekreslíme, pouze ukazujeme fixem, žáci si je mají pouze představit (pokud někdo potřebuje tužku, nebráním mu).
Zadání nepromítám, pouze diktuji, řešíme ihned.

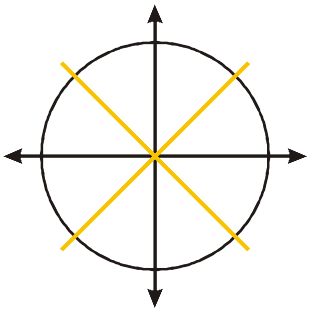
Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Př. 4: Jaké vlastnosti mají úhly a hodnoty goniometrických funkcí ve žlutě vybarvených sloupcích tabulky? Navrhni, jak rychle určovat jejich hodnoty.

Úhly se žlutým pozadím (**„čtvrtinové" úhly**):

- jsou vyjádřeny pomocí zlomku se čtyřkou ve jmenovateli (jejich vyjádření ve stupních končí na číslici 5),
- koncová ramena těchto orientovaných úhlů leží na osách kvadrantů,

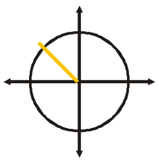


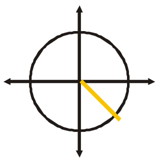
- pro hodnoty goniometrických funkcí platí $|\sin x| = |\cos x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

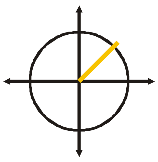
Představíme si (zakreslíme) koncové rameno úhlu v soustavě souřadnic a podle něj přidělíme hodnotě goniometrické funkce znaménko.

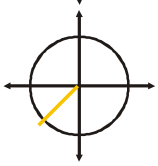
Př. 5: Urči.

a) $\cos\frac{3\pi}{4}$ b) $\sin\frac{7}{4}\pi$ c) $\cos\frac{\pi}{4}$ d) $\sin\frac{5}{4}\pi$

$\cos\frac{3\pi}{4}$  $\Rightarrow \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (x-ová souřadnice)

$\sin\frac{7}{4}\pi$  $\Rightarrow \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (y-ová souřadnice)

$\cos\frac{\pi}{4}$  $\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (x-ová souřadnice)

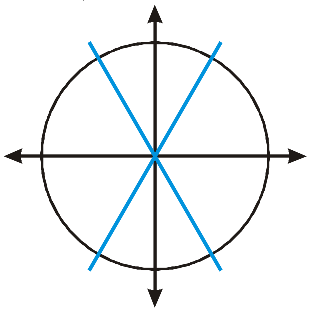
$\sin\frac{5}{4}\pi$  $\Rightarrow \sin\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (y-ová souřadnice)

Př. 6: Další skupinu úhlů tvoří "třetinové" úhly. Jaké vlastnosti mají úhly a hodnoty goniometrických funkcí? Navrhni, jak pro tyto úhly rychle určovat hodnoty funkcí sinus a cosinus.

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Úhly s modrým pozadím (**„třetinové“ úhly**):

- jsou vyjádřeny pomocí zlomku s trojkou ve jmenovateli,
- koncová ramena těchto orientovaných úhlů jsou svislejší (více se přimykají k ose y než k ose x),



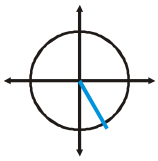
- pro hodnoty goniometrických funkcí platí: $|\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\cos x| = \frac{1}{2}$ (hodnota sinu je "velká", hodnota cosinu "malá").

Podle typu funkce vybereme zlomek. představíme si (zakreslíme) koncové rameno úhlu v soustavě souřadnic a přidělíme znaménko.

Př. 7: Urči.

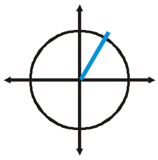
a) $\sin\frac{5\pi}{3}$ b) $\sin\frac{\pi}{3}$ c) $\cos\frac{2\pi}{3}$ d) $\cos\frac{4}{3}\pi$

$\sin\frac{5\pi}{3}$



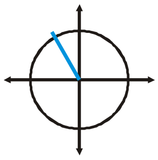
$\Rightarrow \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (y-ová souřadnice, větší hodnota)

$\sin\frac{\pi}{3}$



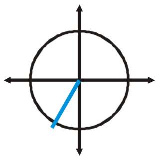
$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (y-ová souřadnice, větší hodnota)

$\cos\frac{2\pi}{3}$



$\Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (x-ová souřadnice, menší hodnota)

$\cos\frac{4}{3}\pi$



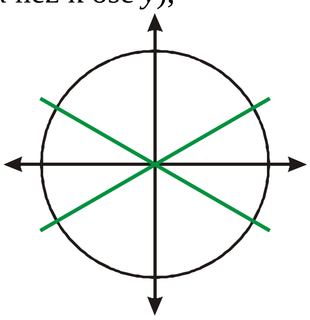
$\Rightarrow \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$ (x-ová souřadnice, menší hodnota)

Př. 8: Označ poslední skupinu úhlů. Najdi jejich vlastnosti a sestav postup pro určování hodnot goniometrických funkcí-

Úhel [°]	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Úhel [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Úhel [°]	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Úhly se zeleným pozadím (**„šestinové“ úhly**):

- jsou vyjádřeny pomocí zlomku s šestkou ve jmenovateli,
- koncová ramena těchto orientovaných úhlů jsou vodorovnější (více se přimykají k ose x než k ose y),



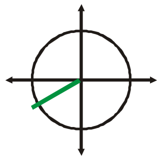
- pro hodnoty goniometrických funkcí platí: $|\sin x| = \frac{1}{2}$, $|\cos x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (hodnota sinu je "malá", hodnota cosinu "velká").

Podle typu funkce vybereme zlomek. představíme si (zakreslíme) koncové rameno úhlu v soustavě souřadnic a přidělíme znaménko.

Př. 9: Urči.

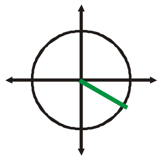
a) $\cos\frac{7\pi}{6}$ b) $\cos\frac{11}{6}\pi$ c) $\sin\frac{5\pi}{6}$ d) $\sin\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{7\pi}{6}$



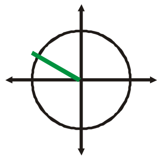
$\Rightarrow \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-ová souřadnice, větší hodnota)

$\cos\frac{11}{6}\pi$



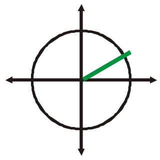
$\Rightarrow \cos\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (x-ová souřadnice, větší hodnota)

$\sin\frac{5\pi}{6}$



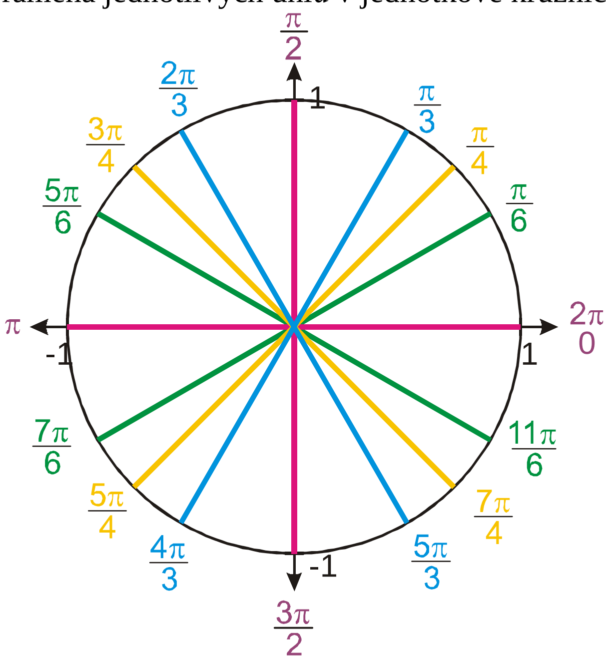
$\Rightarrow \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (y-ová souřadnice, menší hodnota)

$\sin\frac{\pi}{6}$



$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (y-ová souřadnice, menší hodnota)

Předchozí postřehy můžeme rozeznat i z obrázku, na kterém jsou barevně nakreslena konečná ramena jednotlivých úhlů v jednotkové kružnici.



- **Násobky** $\frac{\pi}{2}$ jsou rovnoběžné se souřadnými osami $\Rightarrow$ jedna z goniometrických funkcí musí být nulová a druhá 1 nebo –1.
- **Čtvrtinové úhly** půlí kvadranty $\Rightarrow$ leží na jejich osách $\Rightarrow$ sinus i cosinus mají stejnou absolutní hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- **Třetinové úhly** přimykají více k ose y $\Rightarrow$ velikost y-ové složky souřadnice bodu na kružnici je větší než velikost souřadnice y-ové $\Rightarrow$ absolutní hodnota sinu je „velké" číslo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, absolutní hodnota cosinu je „malé" číslo $\frac{1}{2}$ (opačná situace než u šestinových úhlů).
- **Šestinové úhly** přimykají více k ose x $\Rightarrow$ velikost x-ové složky souřadnice bodu na kružnici je větší než velikost souřadnice y-ové $\Rightarrow$ absolutní hodnota cosinu je „velké" číslo $\frac{\sqrt{3}}{2}$, absolutní hodnota sinu je „malé" číslo $\frac{1}{2}$.

Teď už můžeme sestavit postup na rychlé určení hodnoty:
- Podle druhu goniometrické funkce sledujeme x-ovou nebo y-ovou souřadnici.
- Zjistíme, do jaké skupiny patří úhel, jehož hodnotu určujeme, a tím určíme absolutní hodnotu goniometrické funkce.
- Zjistíme, v jakém kvadrantu hodnotu určujeme, a podle toho přidělíme znaménko.

Př. 10: Urči $\sin\frac{7}{6}\pi$.

Hledáme sinus $\Rightarrow$ sledujeme y-vou souřadnici.

Úhel $\frac{7}{6}\pi$ je šestinový $\Rightarrow$ přimyká k ose x $\Rightarrow$ malá y-ová souřadnice $\Rightarrow$ $\left|\sin\frac{7}{6}\pi\right| = \frac{1}{2}$.

Úhel $\frac{7}{6}\pi$ směřuje do třetího kvadrantu $\Rightarrow$ y-ová souřadnice je záporná.

$\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{1}{2}$.

Př. 11: Urči $\sin\frac{3}{4}\pi$.

Hledáme sinus $\Rightarrow$ sledujeme y-vou souřadnici.

Úhel $\frac{3}{4}\pi$ je čtvrtinový $\Rightarrow$ půlí kvadrant $\Rightarrow$ absolutní hodnota obou souřadnic stejná $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Úhel $\frac{3}{4}\pi$ směřuje do druhého kvadrantu $\Rightarrow$ y-ová souřadnice je kladná.

$\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Př. 12: Urči hodnoty následujících goniometrických funkcí:

a) $\sin\frac{7}{4}\pi$ b) $\cos\frac{3}{2}\pi$ c) $\cos\frac{11}{6}\pi$ d) $\sin\frac{4}{3}\pi$

e) $\sin\frac{7}{6}\pi$ f) $\cos\frac{5}{4}\pi$ g) $\cos\frac{5}{3}\pi$ h) $\sin\pi$

a) $\sin\frac{7}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos\frac{3}{2}\pi=0$ c) $\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sin\frac{7}{6}\pi=-\frac{1}{2}$ f) $\cos\frac{5}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$ h) $\sin\pi=0$

Naše metoda nám umožňuje určovat hodnoty sinu a cosinu tak rychle, že stupně jsou nyní méně pohodlné než radiány.

Př. 13: Urči $\cos 180°$.

Hledáme cosinus $\Rightarrow$ sledujeme *x*-vou souřadnici.

Úhel $180°$ je násobek $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ možné hodnoty 0; 1; -1.

Koncové rameno splývá se souřadnou osou *x* $\Rightarrow$ *x*-ová souřadnice je –1.

$\cos 180° = -1$.

Př. 14: Urči $\cos 300°$.

Hledáme cosinus $\Rightarrow$ sledujeme *x*-vou souřadnici.

Úhel $300° = \frac{5}{3}\pi$ je třetinový $\Rightarrow$ přimyká k ose *y* $\Rightarrow$ malá *x*-ová souřadnice a tedy malá velikost cosinus $\frac{1}{2}$.

Úhel $300°$ směřuje do čtvrtého kvadrantu $\Rightarrow$ *x*-ová souřadnice je kladná.

$\cos 300° = \frac{1}{2}$.

Shrnutí: Hodnoty goniometrických funkcí můžeme rychle určovat, když si uvědomíme, že tabulkové hodnoty úhlů můžeme rozdělit do čtyř skupin.