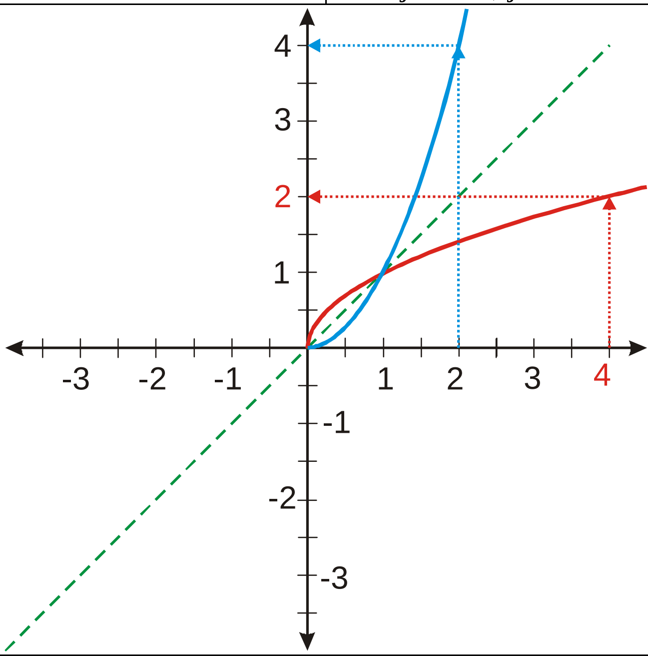
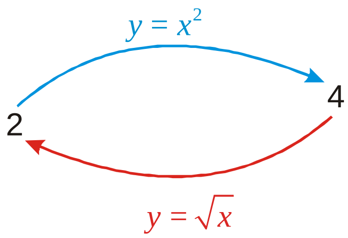
4.2.16 Funkce Arcsin

Předpoklady: 4213

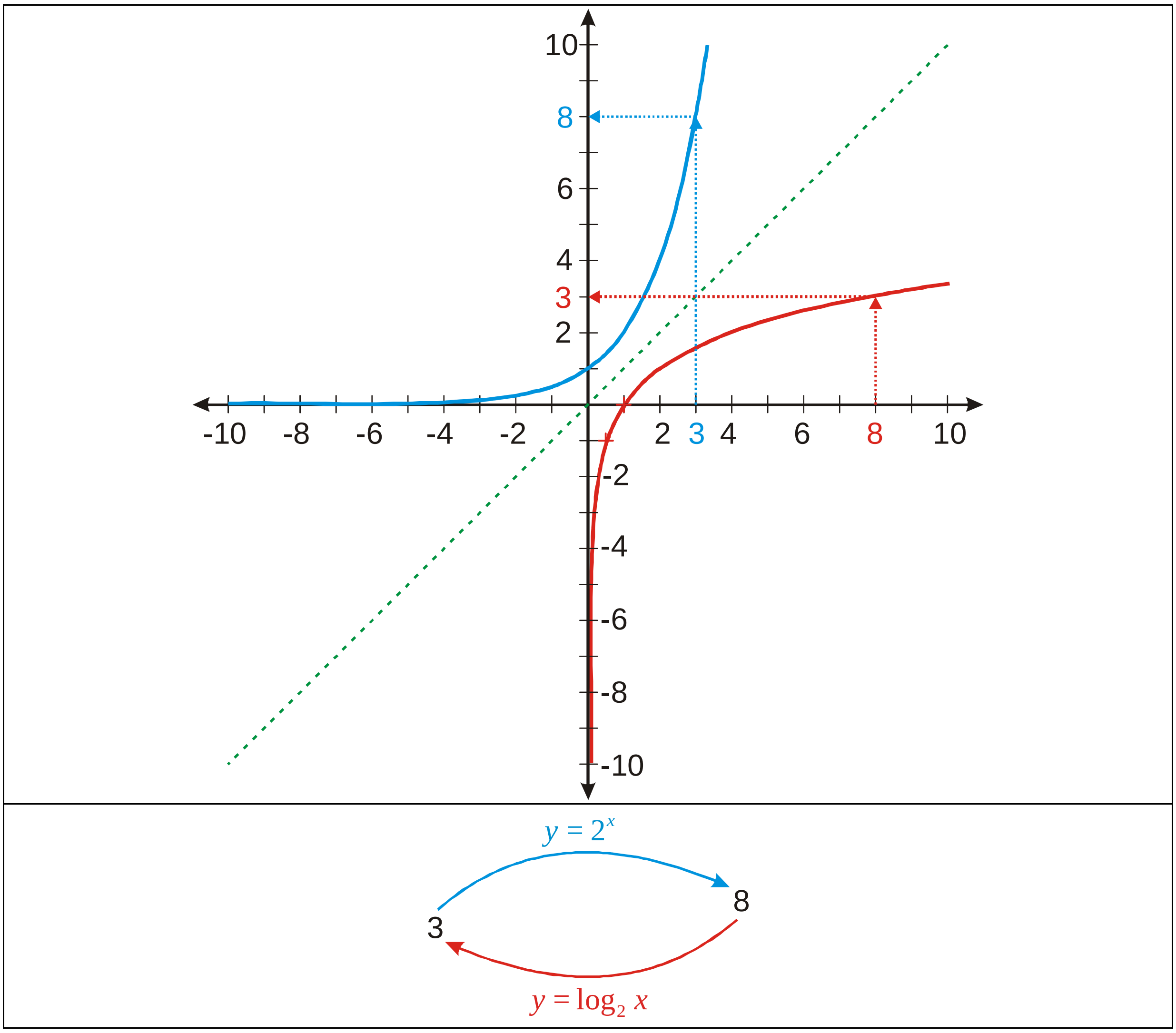
Některé dosud probírané funkce můžeme spojit do dvojic:

Kvadratická funkce	Druhá odmocnina
$y = x^2$, $x \in \langle 0;\infty)$	$y = \sqrt{x}$
$2 \rightarrow 4$	$4 \rightarrow 2$
	$\sqrt{4}$ je číslo, jehož druhá mocnina se rovná 4.





Exponenciální funkce	Logaritmická funkce
$y = 2^x$	$y = \log_2 x$
$3 \rightarrow 8$	$8 \rightarrow 3$
	$\log_2 8$ je číslo, na které musíme umocnit 2, aby vyšlo 8.



Dvojici tvoří dvě navzájem inverzní funkce, které mají obrácené dvojice $[\textit{proměnná}; \textit{hodnota}]$**.**

- Druhá odmocnina je inverzní funkcí k druhé mocnině a používáme ji, když potřebujeme zjistit, jaké číslo dát na druhou, aby vyšla požadovaná hodnota druhé mocniny.
- Logaritmus je inverzní funkcí k exponenciální funkci a používáme ho, když potřebujeme zjistit, na jaké číslo umocnit základ, aby vyšla požadovaná hodnota.

Goniometrické funkce vyrábějí z hodnoty úhlu souřadnici bodu na jednotkové kružnici. Odpovídají na otázku: „**Jaký bude poměr stran, když úhel bude** $60°$ **?**“.

Je možné položit i obrácenou otázku: „**Jaký musí být úhel, aby poměr stran byl 0,4?**“ Podobná obrácená otázka stála u zavedení odmocnin a logaritmů (inverzních funkcí) $\Rightarrow$ **potřebujeme najít inverzní funkce k funkcím goniometrickým.**

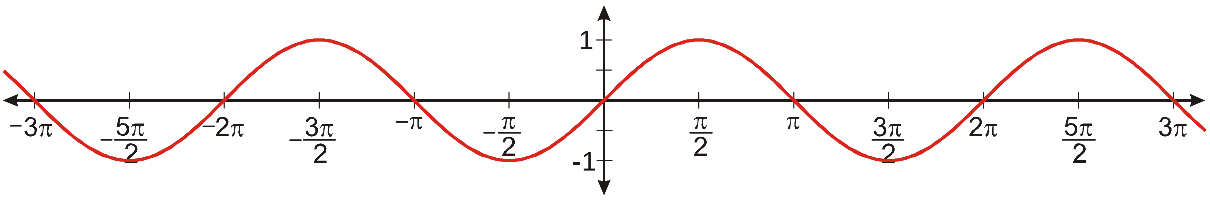
Tyto funkce ve skutečnosti již dávno používáme. Na kalkulačkách jsou označeny většinou $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ případně $\tan^{-1}$ a používali jsme je vždy, když jsme potřebovali zjistit velikost

úhlu při známé hodnotě některé z goniometrických funkcí (hledali jsme odpověď na obrácenou otázku).
Hodnoty inverzních funkcí k funkcím goniometrickým jsme již určovali v jedné předchozích hodin, kdy jsme hledali úhly k zadaným hodnotám goniometrických funkcí.
Nyní je zavedeme pořádně.

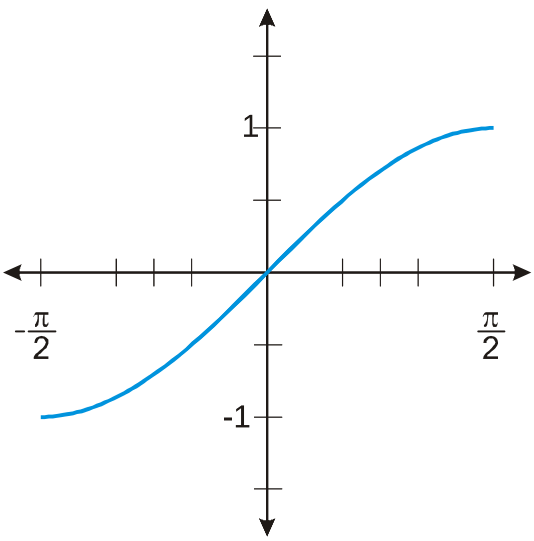
Jaké požadavky musí splňovat funkce, ke které chceme najít funkci inverzní?

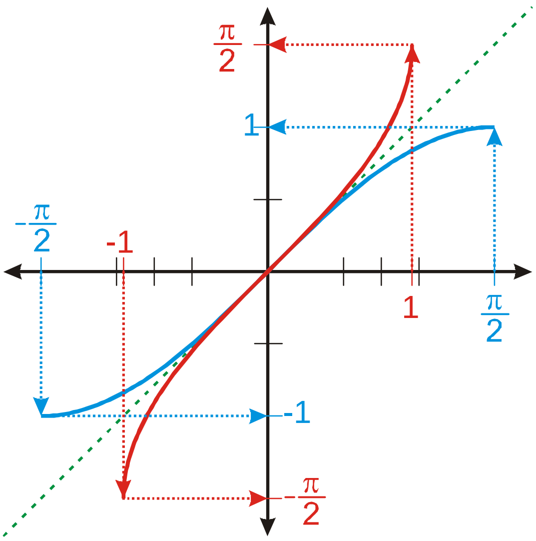
Funkce musí být prostá (aby po obrácení šipek z každého čísla vycházela pouze jedna).
$\Rightarrow$ **Problém:** goniometrické funkce nejsou prosté, protože jsou periodické $\Rightarrow$ budeme muset omezit definiční obor (stejně jako u kvadratické funkce).

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \sin x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \sin x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$.





Funkce inverzní k funkci $y = \sin x$ se nazývá $y = \arcsin x$ (arkus sinus).

Př. 2: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \sin x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \arcsin x$.

$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$	$D(f) = \langle -1;1 \rangle$

$H(f)=\langle -1;1\rangle$	$H(f)=\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$
funkce je rostoucí	funkce je rostoucí

Př. 3: Urči: a) $\arcsin 1$ b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\arcsin 0$

d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ f) $\arcsin(-1)$

g) $\arcsin 2$.

a) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ (protože $\sin\frac{\pi}{2}=1$)

b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

c) $\arcsin 0=0$ (protože $\sin 0=0$)

d) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ (protože $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$)

e) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$)

f) $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$ (protože $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$)

g) $\arcsin 2=$ *neexistuje* (protože funkce $y=\sin x$ nemá nikdy hodnotu 2)

Př. 4: Urči pomocí kalkulačky ve stupních s přesností na minuty přibližné hodnoty:

a) $\arcsin 0,2$ b) $\arcsin(-0,7)$ c) $\arcsin\frac{2}{3}$

d) $\arcsin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

a) $\arcsin 0,2 \doteq 11°13'$ b) $\arcsin(-0,7)\doteq -44°25'$

c) $\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)\doteq 41°48'$

d) $\arcsin\frac{\pi}{2}=$ *neexistuje* (protože funkce $y=\sin x$ nemá nikdy hodnotu větší než 1 a $\frac{\pi}{2}\doteq 1,57$)

e) $\arcsin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\doteq -51°45'$ ($-\frac{\pi}{4}\doteq -0,79$)

U kvadratické funkce a druhé odmocniny:

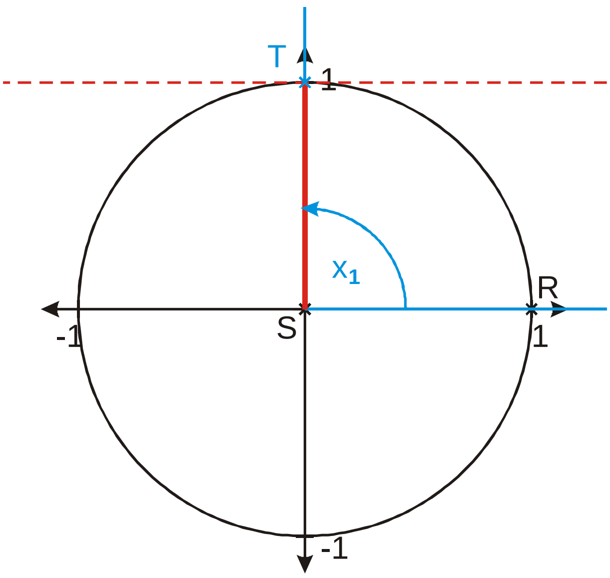
- $\sqrt{4}=2$ - druhá odmocnina ze čtyř má pouze jednu hodnotu (aby byla určena jednoznačně).
- $x^2=4$

  $x_1=-2$, $x_2=2$ - čísla, která po umocnění na druhou dají 4, jsou dvě, hodnota $\sqrt{4}=2$ a číslo k ní opačné $-\sqrt{4}=-2$.

$\Rightarrow$ U neprostých původních funkcí není výpočet inverzní funkce to samé jako nalezení všech hodnot, které dají v původní funkci požadovaný výsledek. Tedy $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, ale čísel pro které platí $\sin x=1$ je více (nekonečně mnoho).

Př. 5: Najdi všechna *x*, pro která platí $\sin x=1$.

$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, tím jsme našli pouze čísla z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Nakreslíme jednotkovou kružnici:



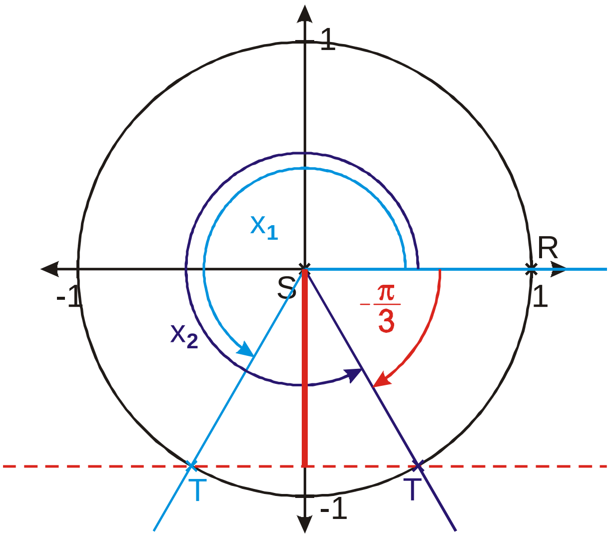
V intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$ žádné další takové *x* není.

Protože funkce $y=\sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π, platí $\sin x=1$ i pro všechny další velikosti úhlu $\frac{\pi}{2}$ (čísla vzdálená o násobky 2π).

$\sin x=1$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right\}$.

Př. 6: Najdi všechna *x*, pro která platí $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, tím jsme našli pouze čísla z intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Nakreslíme jednotkovou kružnici:



Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$ existují dvě hodnoty *x*, pro které platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

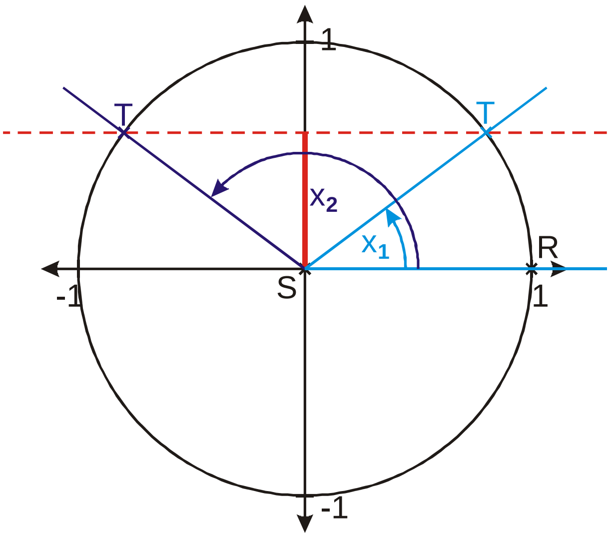
$x_1 = \frac{4}{3}\pi$ a $x_2 = \frac{5}{3}\pi$ (základní velikost úhlu $-\frac{\pi}{3}$).

Protože funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou 2π, platí $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i pro všechny další velikosti obou úhlů.

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z} = \left\{\frac{4}{3}\pi + k\cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$.

Př. 7: Najdi všechna *x*, pro která platí $\sin x = 0,6$. Výsledek uveď v desetinné míře s přesností na minuty.

Protože 0,6 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \sin x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu *x* (stejně jako nedokážeme zapsat přesně hodnotu čísla, které se po umocnění na druhou rovná 2).
Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin 0,6 \doteq 36°52'$ (podobně přibližná hodnota $\sqrt{2} \doteq 1,414$).



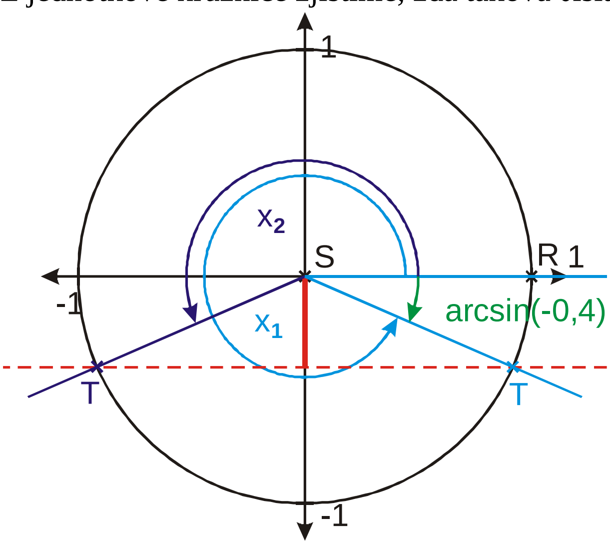
Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0;360°\rangle$ existují dvě hodnoty *x*, pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = 36°52'$ a $x_2 = 180° - 36°52' = 143°8'$.
Protože funkce $y = \sin x$ je periodická s nejmenší periodou $360°$, platí $\sin x = 0,6$ pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z} = \{36°52' + k\cdot 360°; 143°8' + k\cdot 360°\}$.

Přesně musíme zapisovat úhel, pro který platí $\sin x = 0,6$ pomocí funkce arcsin jako $\arcsin 0,6$ (stejně jako používáme pro přesné vyjádření čísla, které se po umocnění rovná 2 symbol $\sqrt{2}$).
Platí tedy $x_1 = \arcsin 0,6$. Z obrázku jednotkové kružnice je vidět, že v intervalu $\langle 0;360°\rangle$ existují dvě hodnoty *x*, pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = \arcsin 0,6$ a $x_2 = 180° - \arcsin 0,6$.
$\sin x = 0,6$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z} = \{\arcsin 0,6 + k\cdot 360°; 180° - \arcsin 0,6 + k\cdot 360°\}$.

Dodatek: Řešení předchozího příkladu můžeme zapsat i v obloukové míře. Z obrázku jednotkové kružnice je vidět, že v intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$ existují dvě hodnoty *x*, pro které platí $\sin x = 0,6$: $x_1 = \arcsin 0,6$ a $x_2 = \pi - \arcsin 0,6$.
$\sin x = 0,6$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k\in Z} = \{\arcsin 0,6 + k\cdot 2\pi; \pi - \arcsin 0,6 + k\cdot 2\pi\}$.

Př. 8: Najdi všechna $x \in \langle 0;2\pi\rangle$, pro která platí $\sin x = -0,4$.

Protože -0,4 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \sin x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu *x*.
Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arcsin(-0,4) \doteq -23°35'$.
Přesně zapisujeme požadovaný úhel, pro který platí $\sin x = -0,4$ pomocí funkce arcsin jako $\arcsin(-0,4)$.
Bohužel $\arcsin(-0,4)$ je záporné číslo a nepatří mezi čísla, která hledáme.
Z jednotkové kružnice zjistíme, zda taková čísla existují:



Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x, pro které platí $\sin x = -0,4$.
Můžeme je vyjádřit pomocí úhlu $\arcsin(-0,4)$ (tento úhel je záporný) :
$x_1 = \arcsin(-0,4) + 2\pi$ a $x_2 = \pi - \arcsin(-0,4)$.

Dodatek: Funkce $y = \arcsin x$ je lichá. Hodnoty můžeme vyjadřovat i pomocí kladného úhlu $\arcsin(0,4) = -\arcsin(-0,4)$: $x_1 = 2\pi - \arcsin(0,4)$ a $x_2 = \pi + \arcsin(0,4)$.

Př. 9: Petáková:
strana 44/cvičení 43, 44 hodnoty arcsin

Shrnutí: Inverzní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $\arcsin x$.