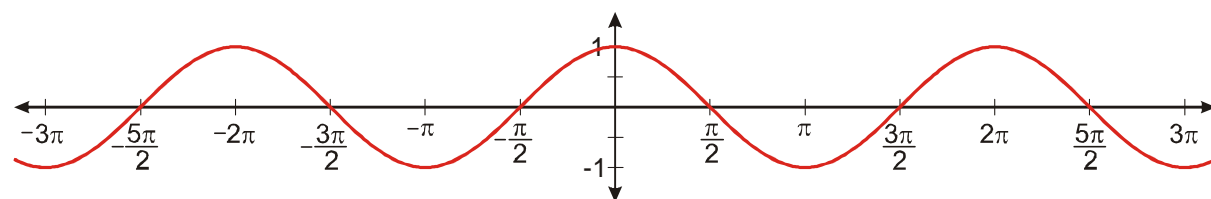


4.2.17 Cyklometrické funkce

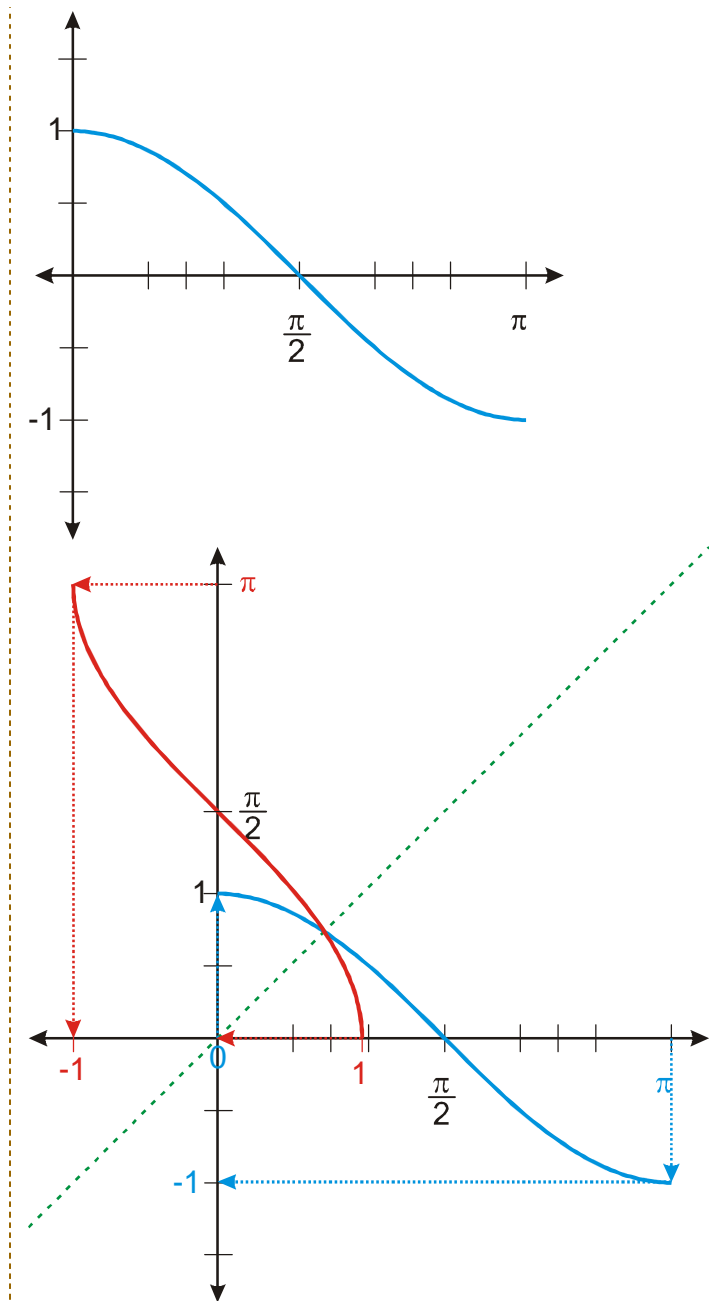
Předpoklady: 4216

Cyklometrické funkce: funkce inverzní k funkcím goniometrickým \Rightarrow z minulé hodiny známe první cyklometrickou funkci $y = \arcsin x$ (inverzní k funkci $y = \sin x$).

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \cos x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \cos x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \langle 0; \pi \rangle$.



Funkce inverzní k funkci $y = \cos x$ se nazývá $y = \arccos x$ (**arkus kosinus**).

Př. 2: Srovnej v tabulce vlastnosti funkcí $y = \cos x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \arccos x$.

$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$D(f) = \langle 0; \pi \rangle$	$D(f) = \langle -1; 1 \rangle$
$H(f) = \langle -1; 1 \rangle$	$H(f) = \langle 0; \pi \rangle$
funkce je klesající	funkce je klesající

- Př. 3:** Urči: a) $\arccos 1$ b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $\arccos 0$
d) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\arccos(-1)$ f) $\arccos(-2)$.

- a) $\arccos 1 = 0$ (protože $\cos 0 = 1$)
b) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$ (protože $\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$)
c) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ (protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$)
d) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (protože $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$)
e) $\arccos(-1) = \pi$ (protože $\cos \pi = -1$)
f) $\arccos(-2) = \text{neexistuje}$ (protože funkce $y = \cos x$ nemá nikdy hodnotu -2)

Př. 4: Urči pomocí kalkulačky ve stupních s přesností na minuty přibližné hodnoty:

- a) $\arccos 0,2$ b) $\arccos(-0,7)$ c) $\arccos \frac{2}{3}$ d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
a) $\arccos 0,2 \doteq 78^{\circ}28'$ b) $\arccos(-0,7) \doteq 134^{\circ}26'$
c) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right) \doteq 48^{\circ}11'$ d) $\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \doteq 121^{\circ}34'$

Př. 5: Urči v obloukové míře: a) $y = \arccos \frac{1}{3}$ b) $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Hledané hodnoty nejdříve odhadni, poté je urči s pomocí kalkulačky s přesností na setiny.

Funkce \arccos je klesající, platí $\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \doteq 1,57 \Rightarrow$ hledaná hodnota bude větší než

$\frac{\pi}{3} \doteq 1,05$ a menší než $\frac{\pi}{2} \doteq 1,57$. Kalkulačka: $\arccos \frac{1}{3} \doteq 1,23 \text{ rad}$.

$-\frac{\pi}{4} \doteq -0,79$. Funkce \arccos je klesající, platí $\arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4}\pi \doteq 2,36 \Rightarrow$ hledaná hodnota

bude větší než $\frac{3}{4}\pi \doteq 2,36$ a menší než $\frac{5}{6}\pi \doteq 2,62$. Kalkulačka: $\arccos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \doteq 2,47 \text{ rad}$.

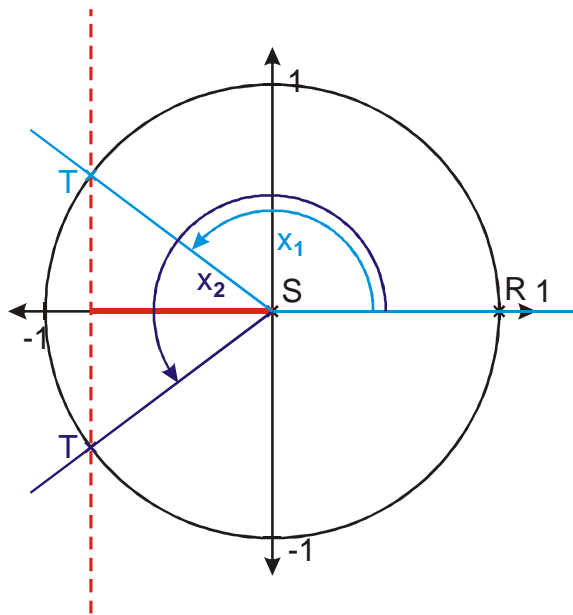
Př. 6: Najdi všechna x , pro která platí $\cos x = -0,8$.

$-0,8$ není tabulková hodnota funkce $y = \cos x \Rightarrow$ nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu x .

Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\arccos(-0,8) \doteq 143^{\circ}8'$.

Přesně musíme zapisovat požadovaný úhel, pro který platí $\cos x = -0,8$, pomocí funkce arccos jako $\arccos(-0,8)$.

Platí tedy $x_1 = \arccos(-0,8)$. Z jednotkové kružnice zjistíme, zda existují další taková čísla:



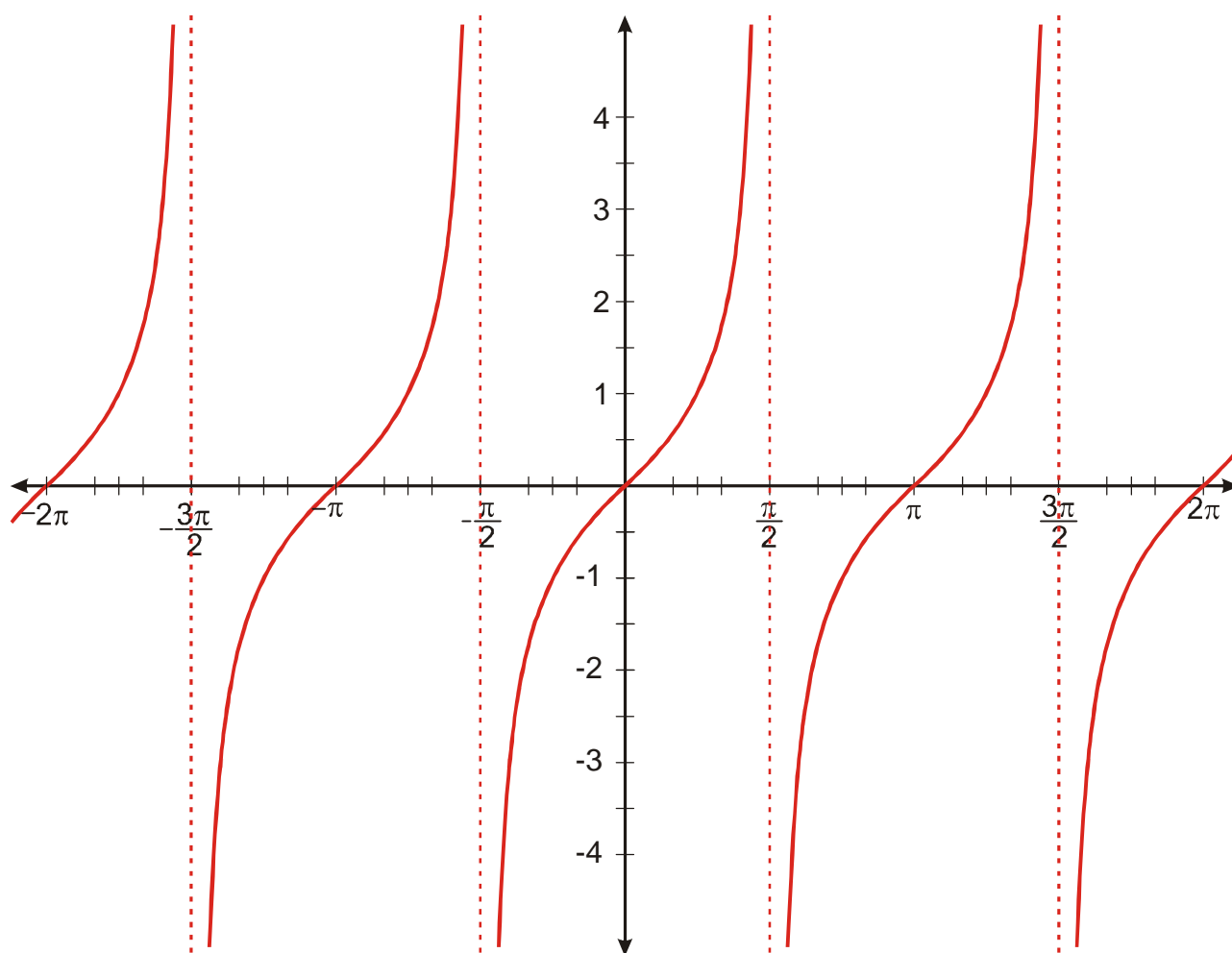
Z obrázku je vidět, že v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ existují dvě hodnoty x , pro které platí $\cos x = -0,8$:

$x_1 = \arccos(-0,8)$ a $x_2 = 2\pi - \arccos(-0,8)$.

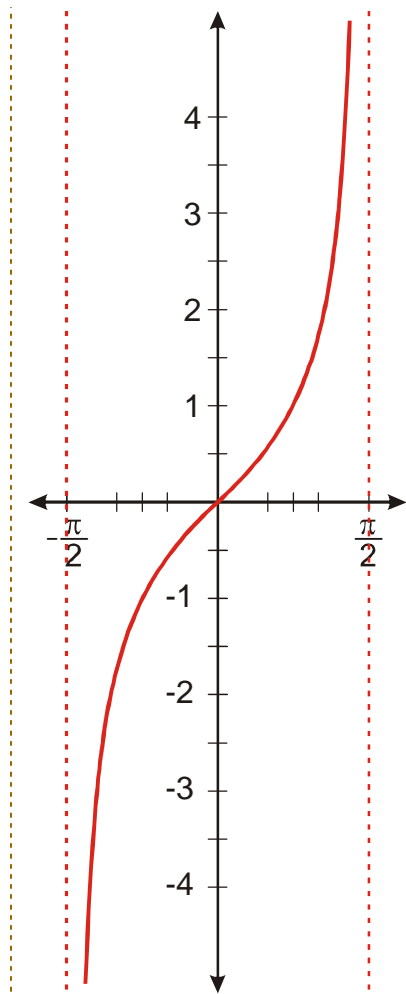
Funkce $y = \cos x$ je periodická s nejmenší periodou $2\pi \Rightarrow \cos x = -0,8$ platí pro všechna čísla $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} = \{ \arccos(-0,8) + k \cdot 2\pi; 2\pi - \arccos(-0,8) + k \cdot 2\pi \}$.

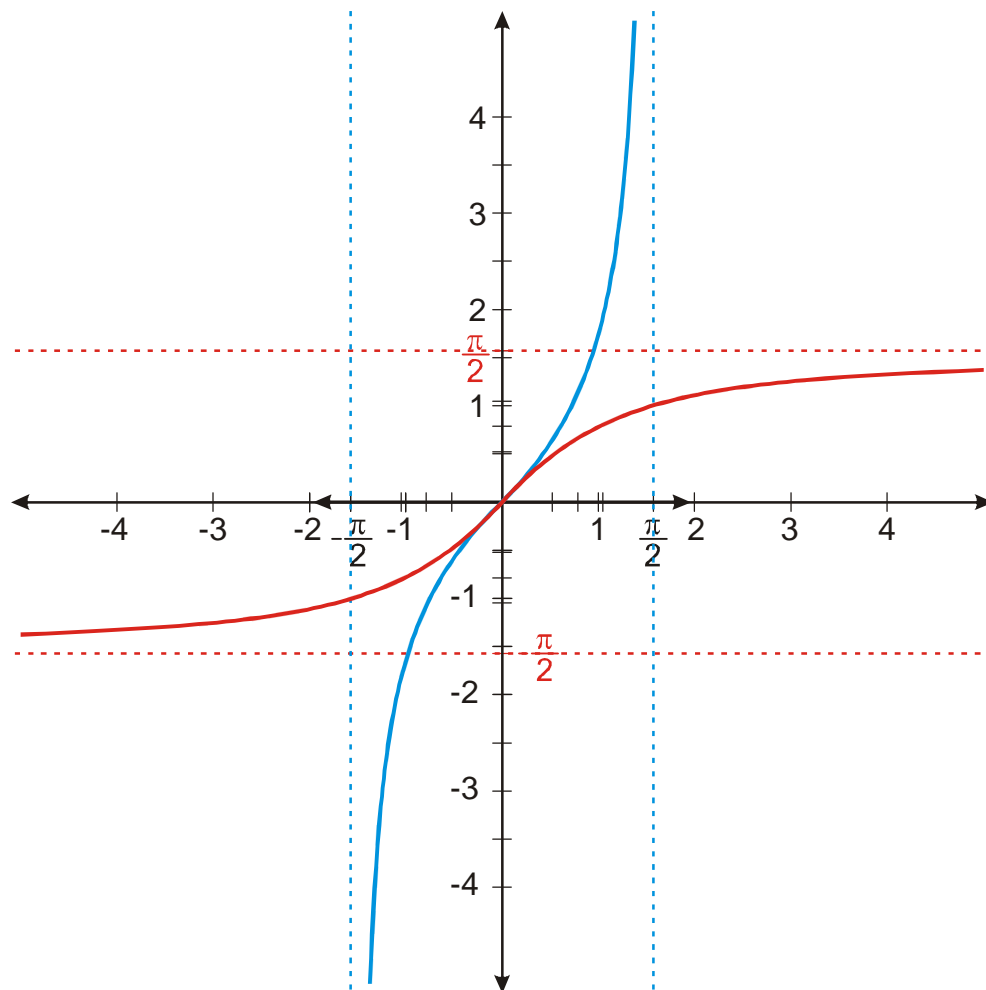
Podobně budeme postupovat i u dalších goniometrických funkcí:

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = \operatorname{tg} x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



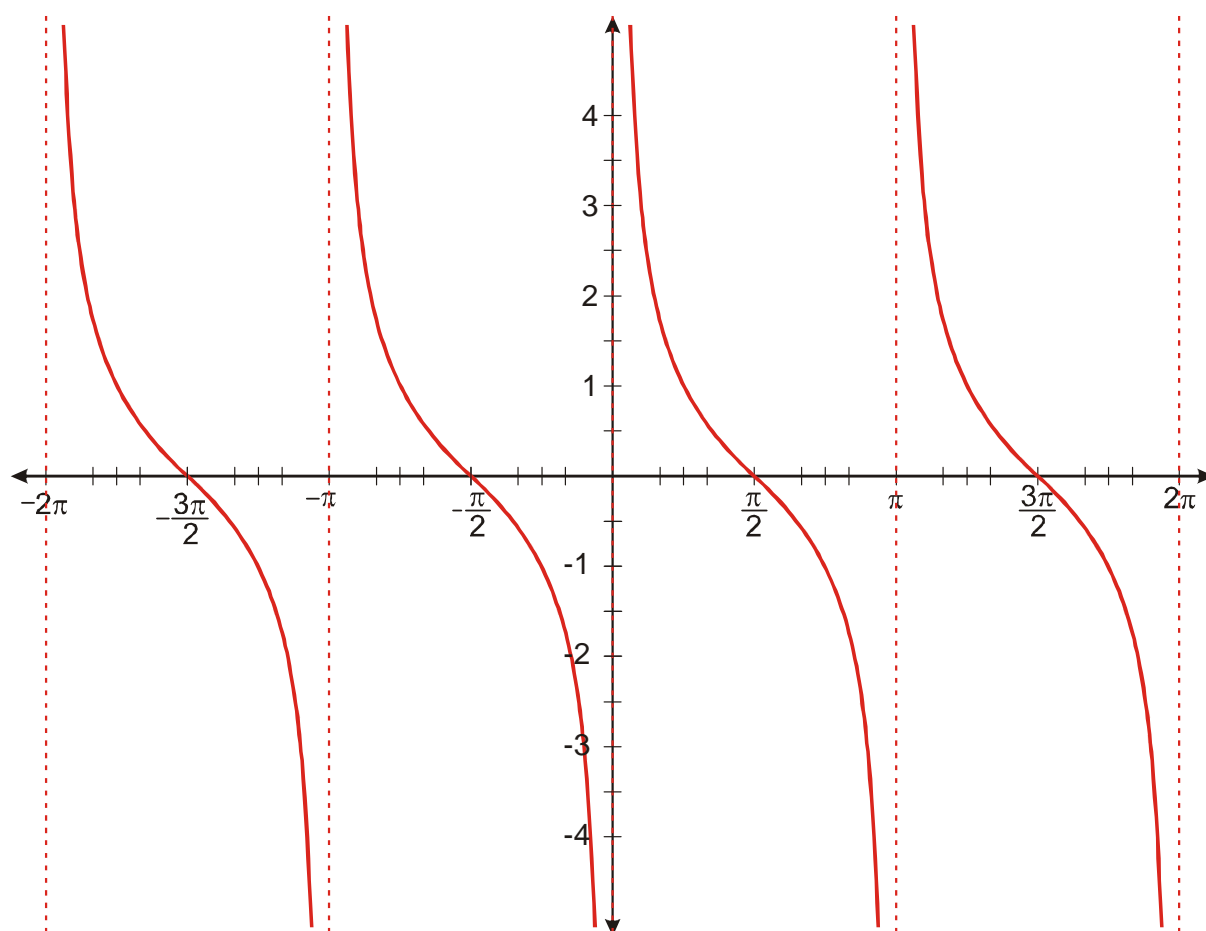


Funkce inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$ se nazývá $y = \operatorname{arctg} x$ (**arkus tangens**).

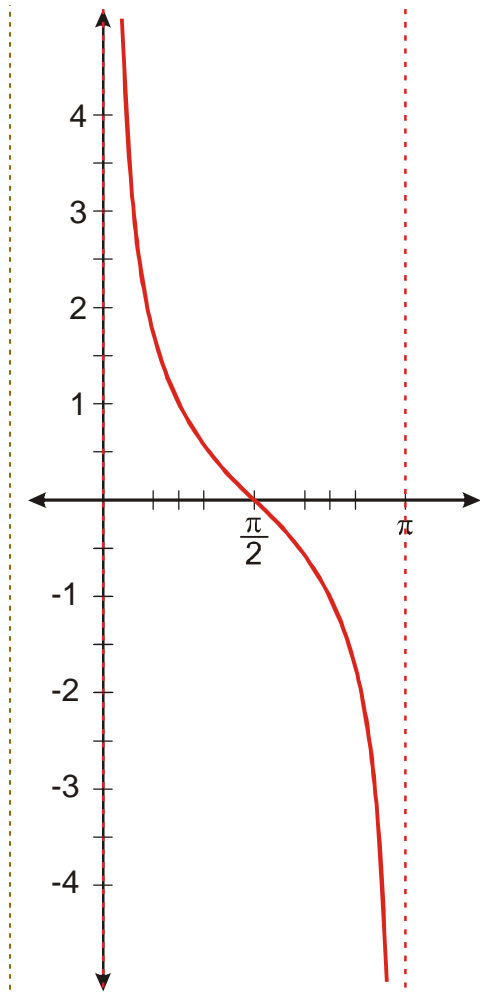
Př. 8: Srovnaj v tabulce vlastnosti funkcí $y = \operatorname{tg} x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \operatorname{arctg} x$.

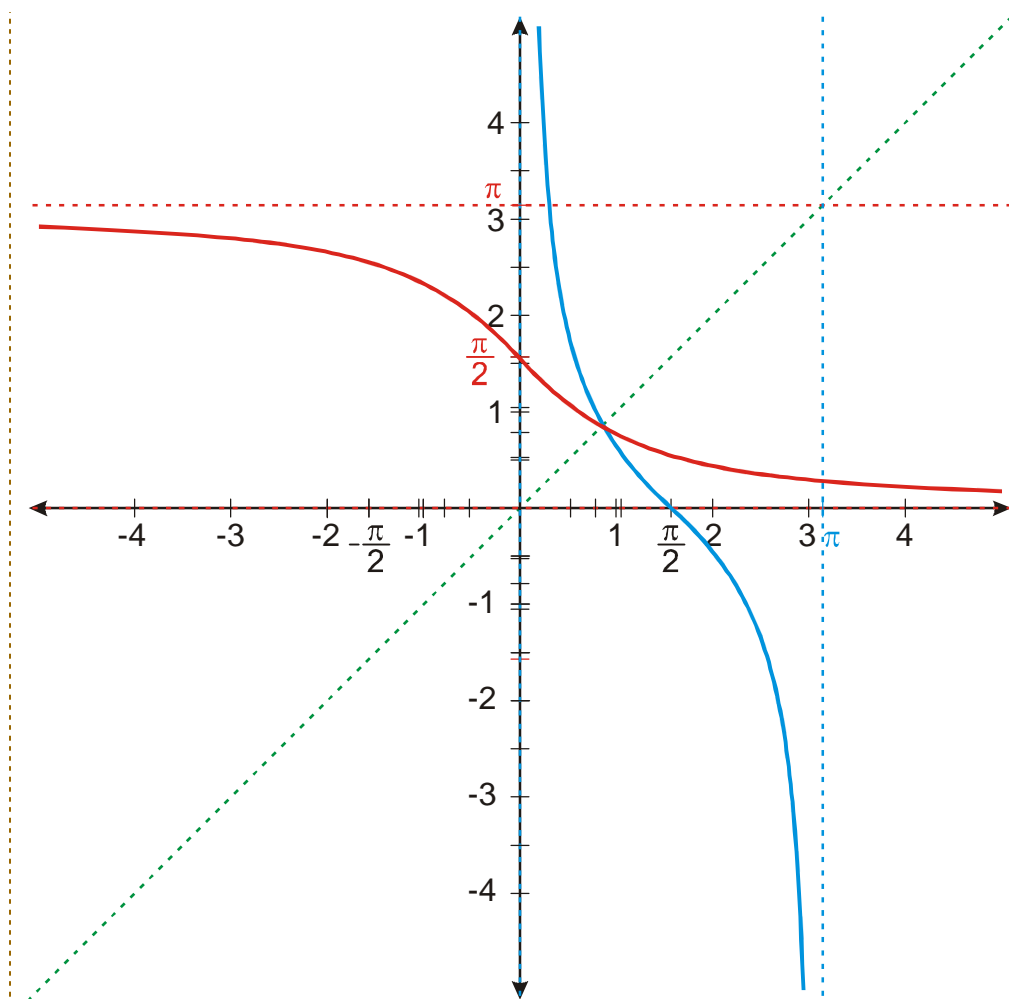
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
$D(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \mathbb{R}$	$H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
funkce je rostoucí	funkce je rostoucí
funkce je lichá	funkce je lichá

Př. 12: Nakresli graf funkce $y = \cotg x$. Omez její definiční obor tak, aby bylo možné nalézt inverzní funkci. Nakresli do nového obrázku graf funkce $y = \cotg x$ s omezeným definičním oborem a graf funkce k ní inverzní.



Omezíme definiční obor pouze na $D(f) = (0; \pi)$.





Funkce inverzní k funkci $y = \cotg x$ se nazývá $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens).

Př. 13: Srovnaj v tabulce vlastnosti funkcí $y = \cotg x$ (s omezeným definičním oborem) a $y = \operatorname{arccotg} x$.

$y = \cotg x$	$y = \operatorname{arccotg} x$
$D(f) = (0; \pi)$	$D(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \mathbb{R}$	$H(f) = (0; \pi)$
funkce je klesající	funkce je klesající

Př. 14: Urči: a) $\operatorname{arccotg}(-1)$ b) $\operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ c) $\operatorname{arccotg} 0$ d) $\operatorname{arccotg} \sqrt{3}$.

a) $\operatorname{arccotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$ (protože $\cotg \frac{3}{4}\pi = -1$)

$$\text{b) } \operatorname{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \quad (\text{protože } \operatorname{cotg}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\text{c) } \operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{protože } \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0)$$

$$\text{d) } \operatorname{arccotg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} \quad (\text{protože } \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3})$$

Př. 15: Urči pomocí kalkulačky přibližně ve stupňové míře:

$$\text{a) } \operatorname{arctg} 0,1 \quad \text{b) } \operatorname{arctg} 5 \quad \text{c) } \operatorname{arctg} -2$$

Problém: Většina kalkulaček neobsahuje tlačítko funkce $\operatorname{arccotg} x$ (\cot^{-1}), kalkulačky mají pouze tlačítko funkce $\operatorname{arctg} x$ (\tan^{-1}).

\Rightarrow použijeme vzorec $\operatorname{tg} x = (\operatorname{cotg} x)^{-1}$, z hodnoty $\operatorname{cotg} x$ určíme hodnotu $\operatorname{tg} x$ a z ní vypočteme úhel x .

$$\text{a) } \operatorname{arccotg} 0,1 \doteq 84^{\circ}17' \quad (\operatorname{cotg} x = 0,1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (0,1)^{-1} = 10, \operatorname{arctg} 10 \doteq 84^{\circ}17')$$

$$\text{b) } \operatorname{arccotg} 5 \doteq 11^{\circ}19' \quad (\operatorname{cotg} x = 5 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (5)^{-1} = 0,2, \operatorname{arctg} 0,2 \doteq 11^{\circ}19')$$

$$\text{c) } \operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153^{\circ}26' \quad (\operatorname{cotg} x = -2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (-2)^{-1} = -0,5, \operatorname{arctg}(-0,5) \doteq 26^{\circ}34', \text{ funkce } y = \operatorname{arccotg} x \text{ má hodnoty pouze v intervalu } (0; \pi) \Rightarrow \text{k hodnotě } \operatorname{arctg}(-0,5) \doteq -26^{\circ}34' \text{ přičtem } 180^{\circ} \Rightarrow \operatorname{arccotg}(-2) \doteq 153^{\circ}26')$$

Př. 16: Najdi všechna x , pro která platí $\operatorname{cotg} x = -3$. Výsledek urči přibližně pomocí kalkulačky i přesně pomocí cyklometrické funkce.

Protože -3 nepatří mezi tabulkové hodnoty funkce $y = \operatorname{cotg} x$, nemůžeme přesně určit hodnotu úhlu x .

Přibližná hodnota stanovená pomocí kalkulačky je rovna $\operatorname{arccotg}(-3) \doteq 161^{\circ}34'$.

(podrobněji u kalkulaček, které mají pouze funkci tangens:

$$\operatorname{cotg} x = -3 \Rightarrow \operatorname{tg} x = (-3)^{-1} = -\frac{1}{3}, \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \doteq -18^{\circ}26', \text{ funkce } y = \operatorname{arccotg} x \text{ má hodnoty}$$

$$\text{pouze v intervalu } (0; \pi) \Rightarrow \text{k hodnotě } \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) \doteq -18^{\circ}26' \text{ přičteme } 180^{\circ} \Rightarrow$$

$$\operatorname{arccotg}(-3) \doteq 161^{\circ}34')$$

Přesně musíme zapisovat požadovaný úhel, pro který platí $\operatorname{cotg} x = -3$ pomocí funkce $\operatorname{arccotg}$ jako $\operatorname{arccotg}(-3)$.

Platí tedy $x_1 = \operatorname{arctg}(-3)$.

Funkce $y = \operatorname{cotg} x$ je v rámci své jedné periody (například v intervalu $(0; \pi)$) prostá (viz. graf nahoře) \Rightarrow nemusíme hledat další hodnoty x , protože všechny další už se vyskytují v jiných periodách.

$$\operatorname{cotg} x = -3 \text{ platí pro všechna čísla } \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} = \{ \operatorname{arctg}(-3) + k \cdot \pi \}.$$

Př. 17: Petáková:

strana 44/cvičení 43, 44 hodnoty \arccos , \arctg , arccot

Shrnutí: