4.3.3 Goniometrické nerovnice

Předpoklady: 4302

Pedagogická poznámka: Nerovnice je stejně jako rovnice možné řešit grafem i jednotkovou kružnicí. Oba způsoby mají své výhody i nevýhody a jsou v podstatě rovnocenné. Po vyřešení prvních čtyř příkladů nechávám studentům svobodu volby. Při řešení nerovnic, které obsahují tg nebo cotg používáme grafy funkcí.

V této hodině se projeví, jak jsou na tom studenti opravdu s představami o zachycení goniometrických funkcí v jednotkové kružnici. Pokud se objeví tyto problémy, je třeba nejdříve odstranit je a pak se teprve zabývat nerovnicemi.

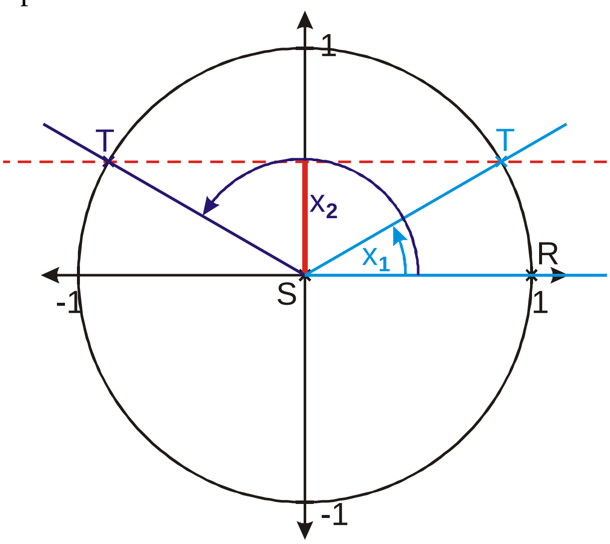
Pedagogická poznámka: Připravená látka zaplňuje dvě vyučovací hodiny, v té první se řeší prvních šest příkladů, v té druhé zbytek.

Goniometrické funkce (zejména sinus a cosinu) mají něco společného s kvadratickou funkcí – nejsou prosté $\Rightarrow$ řešení goniometrický nerovnic probíhá podobně jako řešení kvadratických nerovnic ve dvou krocích:

- vyřešíme rovnici
- kořeny získané v předchozím kroku využijeme k nakreslení obrázku nebo vynesení do grafu, podle kterého rozhodneme o řešení nerovnice.

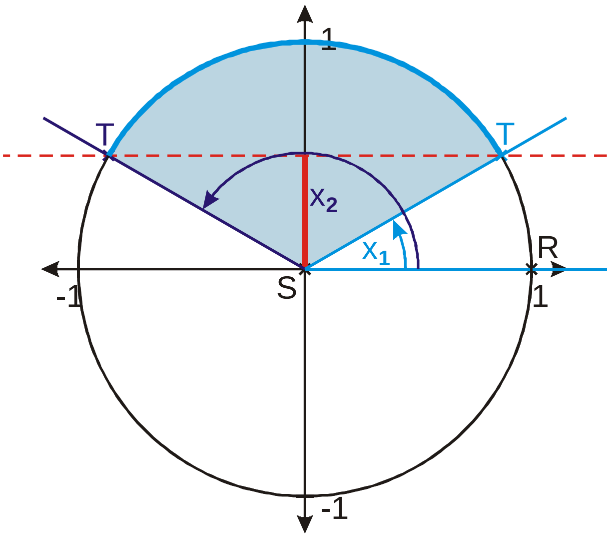
Př. 1: Vyřeš nerovnici $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Umíme vyřešit rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$. Nakreslíme jednotkovou kružnici a vyřešíme nerovnost s pomocí obrázku.



Řešení rovnice $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5}{6}\pi$.

Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\sin x \geq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ mají y-ovou souřadnici větší (nebo rovnou) $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ jsou výše (nebo stejně vysoko) než čísla vyhovující rovnici $\sin x = \frac{1}{2}$.



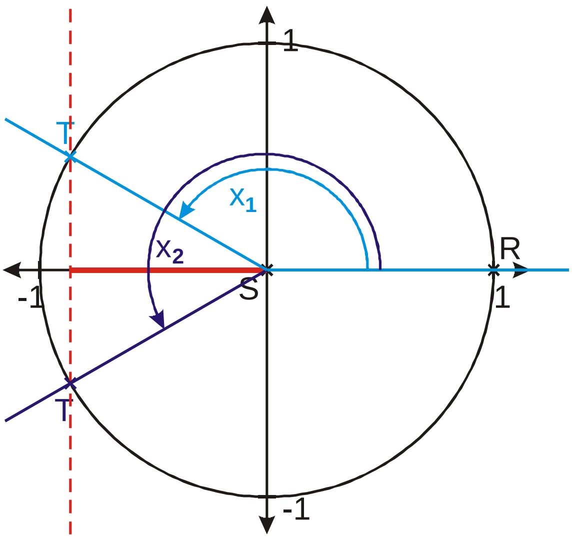
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$

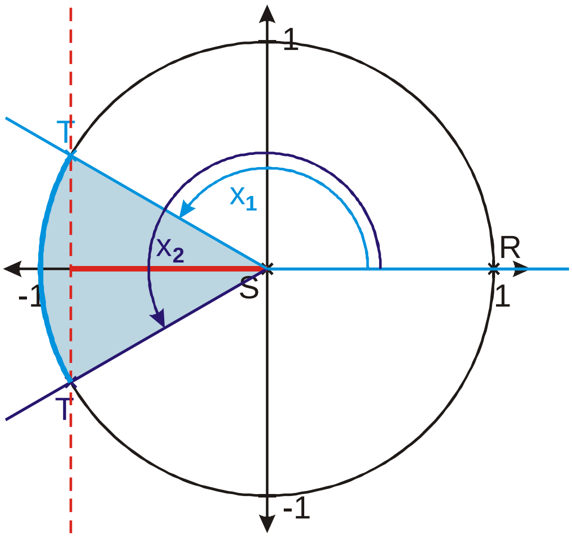
Př. 2: Vyřeš nerovnici $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kromě jednotkové kružnice využij i graf funkce $y = \cos x$.

Umíme vyřešit rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešení rovnice $x_1 = \frac{5}{6}\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$.

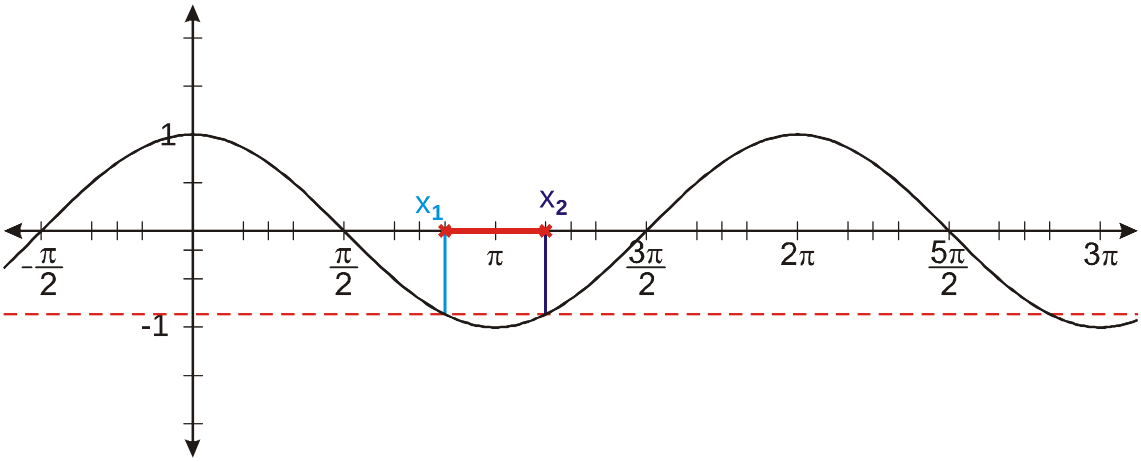
Na jednotkové kružnici hledáme čísla, pro která $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ mají x-ovou souřadnici menší (nebo rovnou) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ jsou více vlevo (nebo stejně vlevo) jako čísla vyhovující rovnici $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi ; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Kontrola pomocí grafu funkce $y = \cos x$.

Do grafu vyznačíme hodnotu $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:



Na ose x hledáme čísla, pro která $\cos x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce jsou menší (nebo jsou rovny) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ jsou níže (nebo stejně nízko) jako body přímky $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

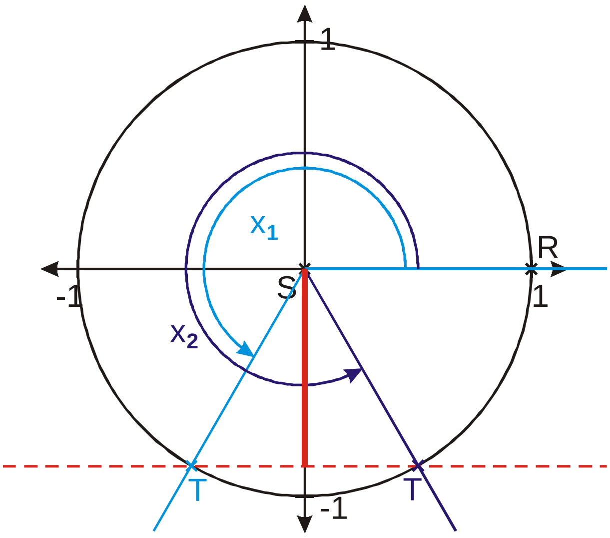
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left\langle \frac{5}{6}\pi ; \frac{7}{6}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi ; \frac{7}{6}\pi + k\cdot 2\pi \right\rangle$.

$$K = \bigcup_{k\in Z} \left\langle \frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi ; \frac{7}{6}\pi + k\cdot 2\pi \right\rangle$$

Pedagogická poznámka: U slabších studentů povoluji, aby ve všech následujících příkladech používali metodu, která je pro ně jednodušší.

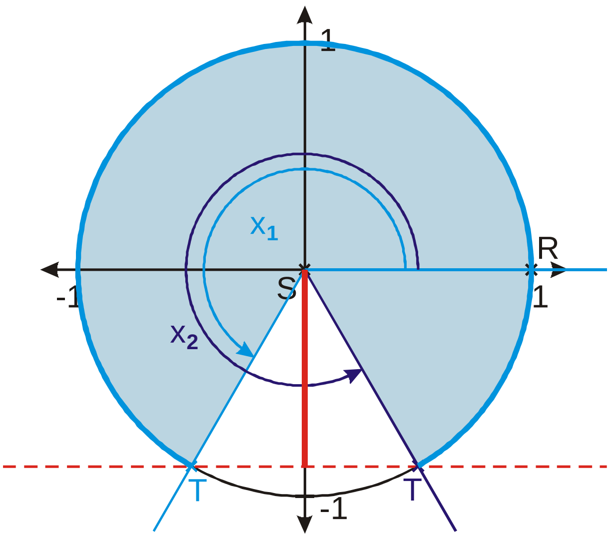
Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Při řešení využij obrázek jednotkové kružnice.



Základní řešení rovnice $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = \frac{4}{3}\pi$, $x_2 = \frac{5}{3}\pi$.

Hledáme čísla, pro která $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ mají y-ovou souřadnici větší než $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ leží na jednotkové kružnici výše než čísla vyhovující rovnici $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Vybarvená čísla nemůžeme zapsat intervaly:

- $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$ (v intervalu píšeme vždy nejdříve menší číslo)
- $\left\langle \frac{4}{3}\pi; \frac{5}{3}\pi \right\rangle$ (ten obsahuje mimo krajní body čísla, která nejsou řešením nerovnice)

$\Rightarrow$ použijeme pro jeden z krajních bodů číslo, které není v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ $\Rightarrow$ dvě možnosti:

- $\frac{5}{3}\pi - 2\pi = -\frac{1}{3}\pi$ $\Rightarrow$ získáme interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi \right\rangle$,

- $\frac{4}{3}\pi + 2\pi = \frac{10}{3}\pi \Rightarrow$ získáme interval $\left\langle \frac{5}{3}\pi; \frac{10}{3}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π.

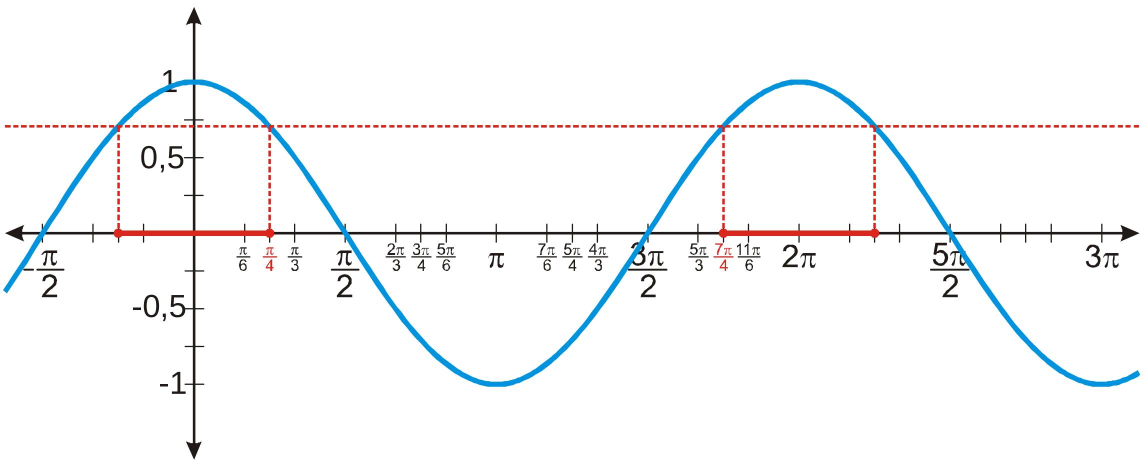
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle$

Př. 4: Vyřeš nerovnici $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Při řešení využij graf funkce $y = \cos x$.

Rovnice $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ má v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ dvě řešení: $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešení v intervalu $\langle 0; 2\pi)$ bychom museli zapsat pomocí dvou intervalů $\left\langle 0; \frac{\pi}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{4}\pi; 2\pi \right)$.

Zápis se značně zjednoduší, když vybereme čísla mimo interval $\langle 0; 2\pi)$:

- řešení pomocí intervalu kolem 0 $\Rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right\rangle$,
- řešení pomocí intervalu kolem $2\pi \Rightarrow \left\langle \frac{7}{4}\pi; \frac{9}{4}\pi \right\rangle$.

Oba předchozí intervaly jsou navzájem posunuté o 2π.

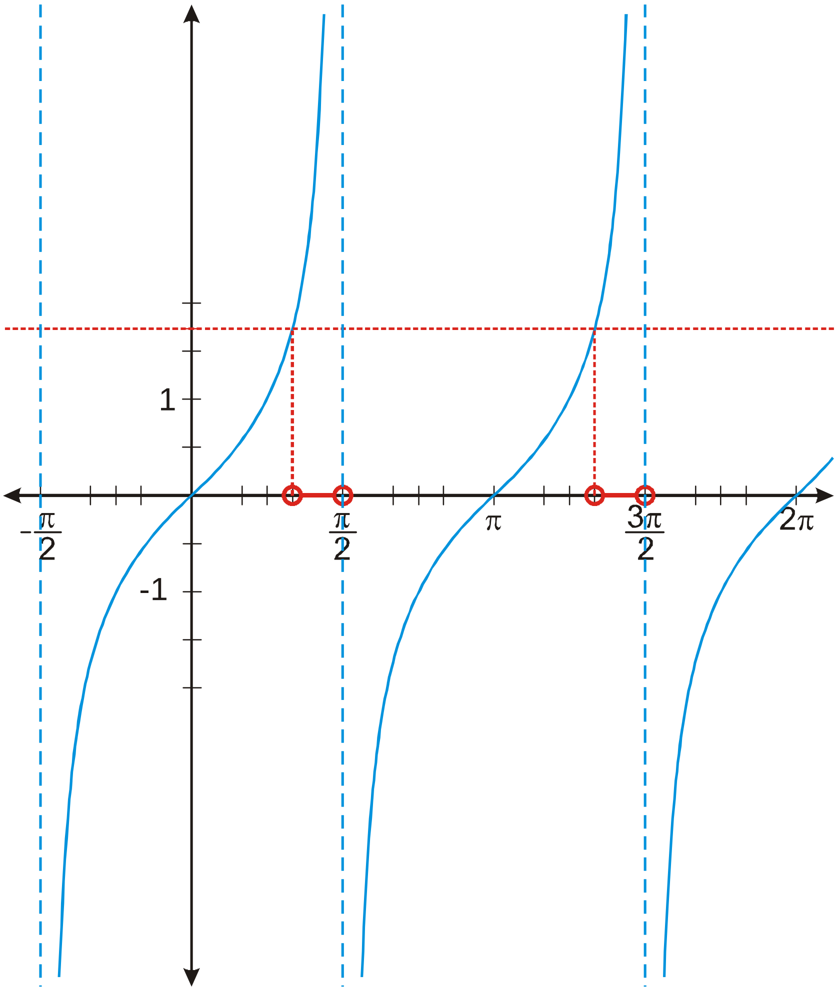
Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$ řešením je každý interval $\left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$.

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right\rangle$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Rovnice $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ má v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ jediné řešení: $x = \frac{\pi}{3}$.

Nakreslíme graf funkce $y = \operatorname{tg} x$ a zobrazíme do něj hodnotu $\sqrt{3}$.

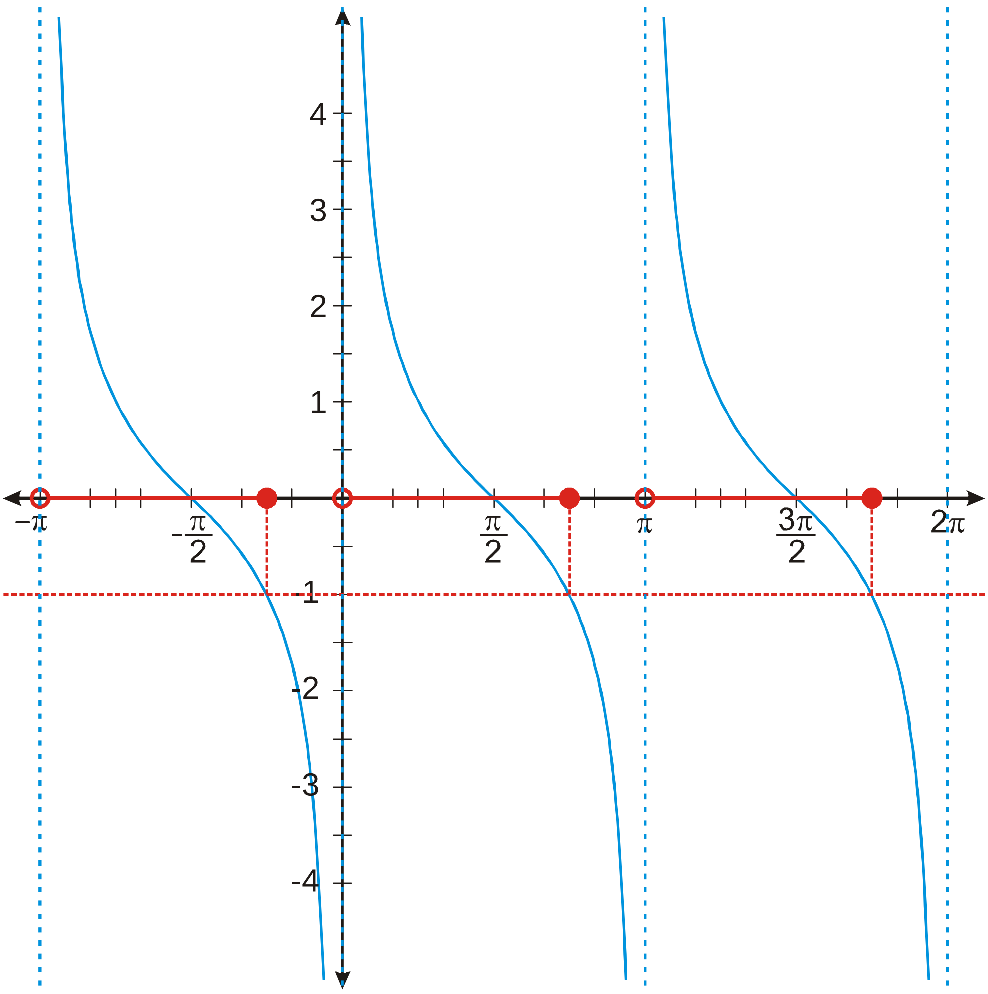


Řešení v intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ můžeme zapsat jako $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$, hodnoty funkce $y = \operatorname{tg} x$ se opakují s periodou $\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi;\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$.

Př. 6: Vyřeš nerovnici $\operatorname{cotg} x \geq -1$.

Rovnice $\operatorname{cotg} x = -1$ má v intervalu $(0;\pi)$ jediné řešení: $x = \frac{3}{4}\pi$.

Nakreslíme graf funkce a zobrazíme do něj hodnotu -1.



Řešení v intervalu $(0;\pi)$ můžeme zapsat jako $\left(0;\frac{3}{4}\pi\right\rangle$, hodnoty funkce $y=\text{cotg}\,x$ se opakují s periodou π $\Rightarrow$ $K=\bigcup_{k\in Z}\left(0+k\cdot\pi;\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi\right\rangle$.

Pedagogická poznámka: Před řešením následujících příkladů je dobré zdůraznit dvě věci:
jde o těžší příklady, které nemusí zvládnout každý (on je také zdaleka každý nestihne),
k jejich řešení není třeba nic nového mimo využití postupů, které jsme používali už dříve u jiných typů rovnic.

Př. 7: Vyřeš nerovnici $-\frac{1}{2}<\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problém: Nerovnice obsahuje dvě nerovnosti $\Rightarrow$ dvě možnosti řešení:

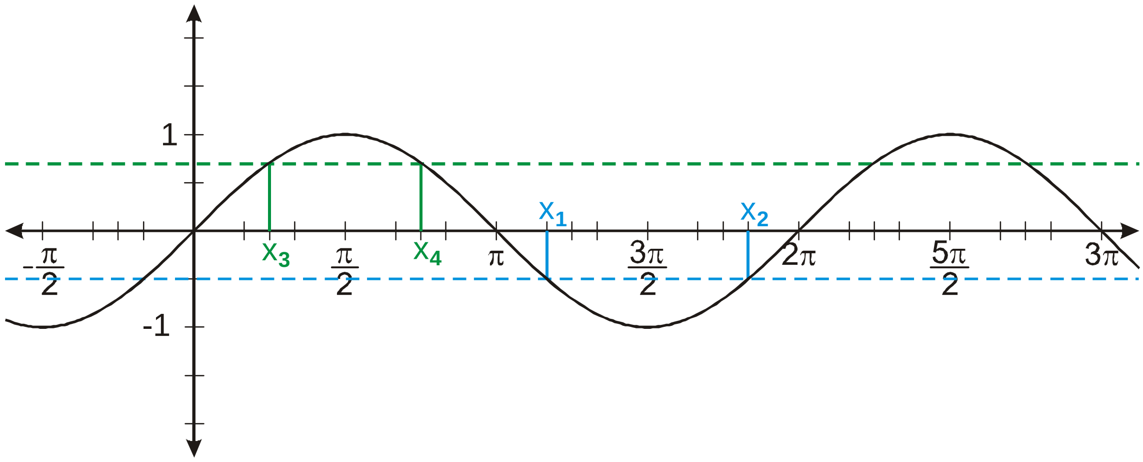
- vyřešíme každou nerovnost samostatně a výsledek určíme jako průnik obou řešení (musí platit obě nerovnosti současně) $\Rightarrow$ nevýhoda – dvojí práce s kreslením grafu (nebo kružnice),

- samostatně řešíme pouze rovnice $\sin x = -\frac{1}{2}$ a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, získané úhly nakreslíme do jednoho obrázku, kde rovnou určíme řešení (rychlejší postup s menší pravděpodobností chyby).

Základní řešení rovnic:

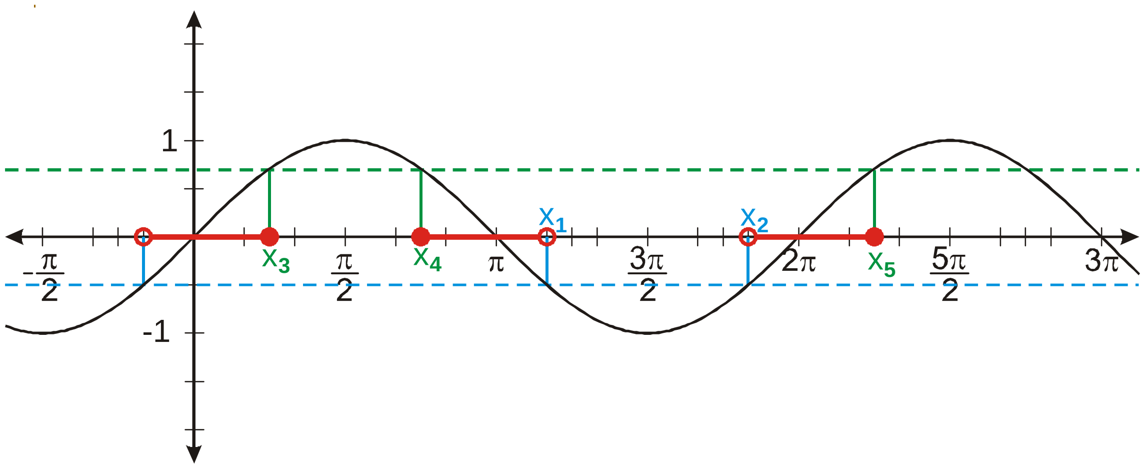
- $\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{7}{6}\pi$, $x_2 = \frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině),
- $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3}{4}\pi$ (čtvrtinové úhly v kladné polorovině).

Do grafu vyznačíme přímky $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a všechny čtyři určené hodnoty úhlů:



Na ose *x* hledáme čísla, pro která:

- $\sin x \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod (nebo stejně nízko) přímkou $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- $\sin x > -\frac{1}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = -\frac{1}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalech $\left\langle \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{6}\pi \right)$ a $\left(\frac{11}{6}\pi; \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9}{4}\pi \right\rangle$.

Hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \left\langle \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{9}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\rangle \right\}$$

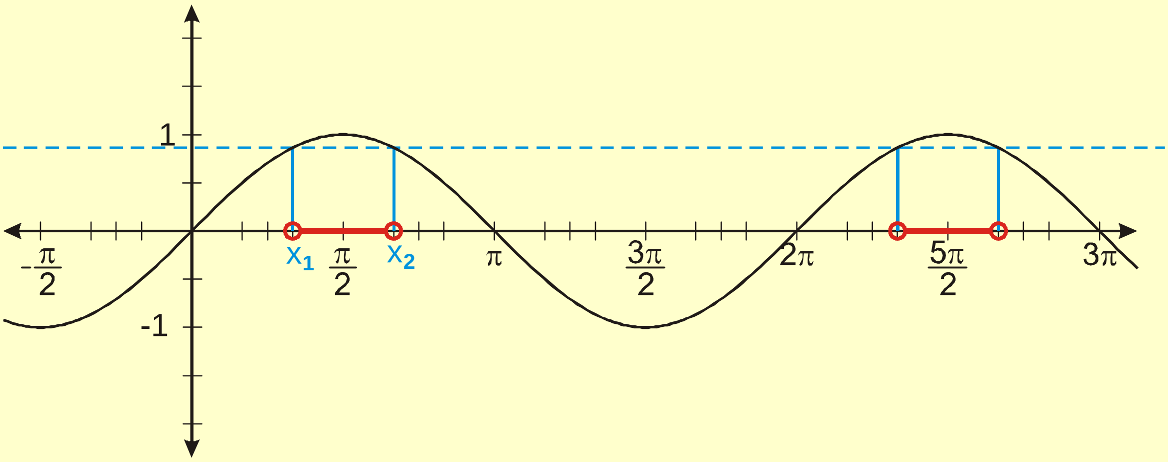
Př. 8: Vyřeš nerovnici $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problém: uvnitř sinu je složitější výraz $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $z=3x-\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ nerovnice $\sin z>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Základní řešení rovnice: $\sin z=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $z_1=\frac{\pi}{3}$, $z_2=\frac{2}{3}\pi$ (třetinové úhly v kladné polorovině).

Do grafu vyznačíme přímku $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů z_1, z_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin z>\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2}{3}\pi\right)$.

Hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ $K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi;\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$z_1=3x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$

$3x_1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi \quad /+\frac{\pi}{3}$

$3x_1=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \quad /:3$

$x_1=\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

$z_2=3x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$3x_2-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi \quad /+\frac{\pi}{3}$

$3x_2=\pi+k\cdot 2\pi \quad /:3$

$x_2=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{2}{9}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi;\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2}{3}\pi\right)$

Pedagogická poznámka: Při substituci nepoužíváme standardní označení proměnné *y*, kvůli možnosti záměny s označením osy *y* v grafu. Studenti samozřejmě budou *y* při substituci často používat, pokud se jim nezačne plést s označením osy, není to na závadu.

Př. 9: Vyřeš nerovnici $|\cos x| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problém: $\cos x$ je uvnitř absolutní hodnoty $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $a = \cos x$ $\Rightarrow$ nerovnice $|a| = |a-0| > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hledáme čísla vzdálená od nuly více než o $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ platí $y \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right)$.

Přepíšeme interval hodnot $a = \cos x$ pomocí nerovnic:

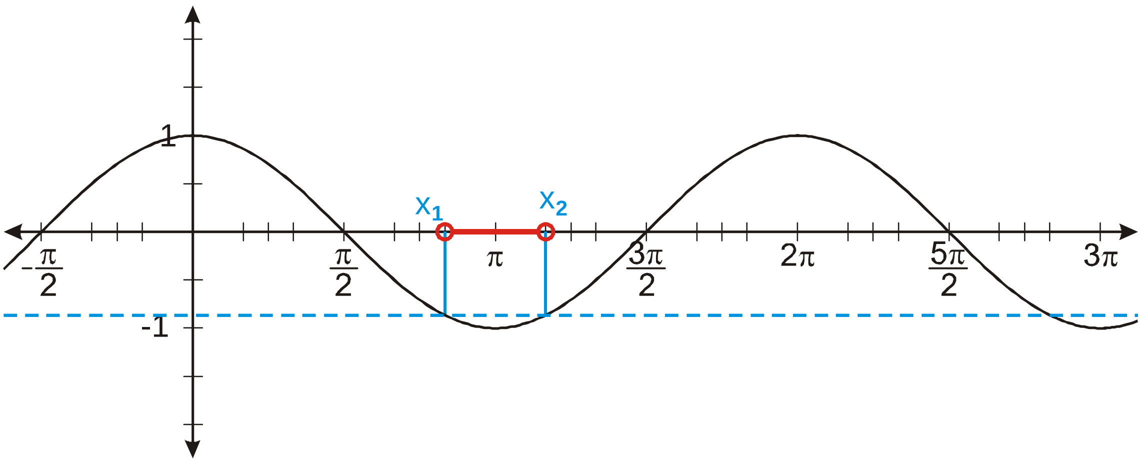
$a = \cos x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \infty\right) \Leftrightarrow a = \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ nebo $a = \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{5}{6}\pi$, $x_2 = \frac{7}{6}\pi$ (šestinové úhly v záporné polorovině osy x).

Do grafu vyznačíme přímku $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod přímkou $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

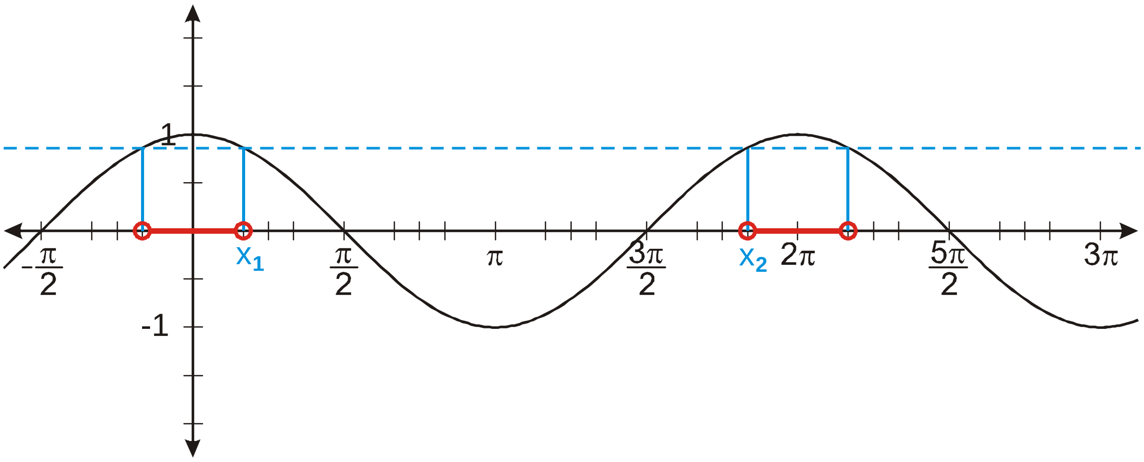


Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{5}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou 2π $\Rightarrow$ $K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{6}\pi + k \cdot 2\pi\right)$.

b) $y = \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{11}{6}\pi$ (šestinové úhly v kladné polorovině osy x).

Do grafu vyznačíme přímku $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad přímkou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K_2 = \bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)$.

$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\left(\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi;\frac{7}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right)\right\}$$

Př. 10: Vyřeš nerovnici $|2\sin x-1|\geq 1$.

Problém: $\sin x$ je uvnitř absolutní hodnoty $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=\sin x \Rightarrow$ nerovnice $|2a-1|\geq 1$.

Nerovnici nemůže ihned interpretovat pomocí vzdálenosti obrazů bodů na číselné ose $\Rightarrow$ upravíme: $|2a-1| = 2\left|a-\frac{1}{2}\right|$

$2\left|a-\frac{1}{2}\right|\geq 1 \quad /:2$

$\left|a-\frac{1}{2}\right|\geq \frac{1}{2}$

Hledáme čísla vzdálená od $\frac{1}{2}$ více než o (nebo přesně o) $\frac{1}{2} \Rightarrow$ platí $a\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 1;\infty)$.

Přepíšeme interval hodnot $a=\sin x$ pomocí nerovnic:

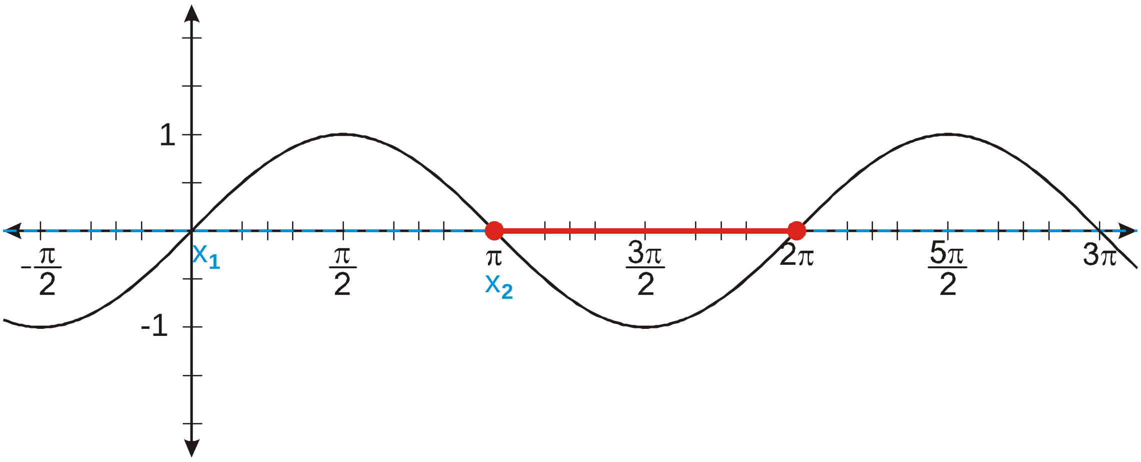
$a=\sin x\in(-\infty;0\rangle\cup\langle 1;\infty) \Leftrightarrow a=\sin x\leq 0$ nebo $a=\sin x\geq 1$.

Získali jsme dvě nerovnice, každou vyřešíme zvlášť. Protože stačí, aby nalezená hodnota x splňovala jednu z podmínek, získáme celkové řešení jako sjednocení.

a) $a = \sin x \le 0$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$, $x_2 = \pi$.

Do grafu vyznačíme přímku $y = 0$ a určené hodnoty úhlů x_1, x_2. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \le 0 \;\Rightarrow$ hodnoty funkce leží pod nebo na přímce $y = 0$.



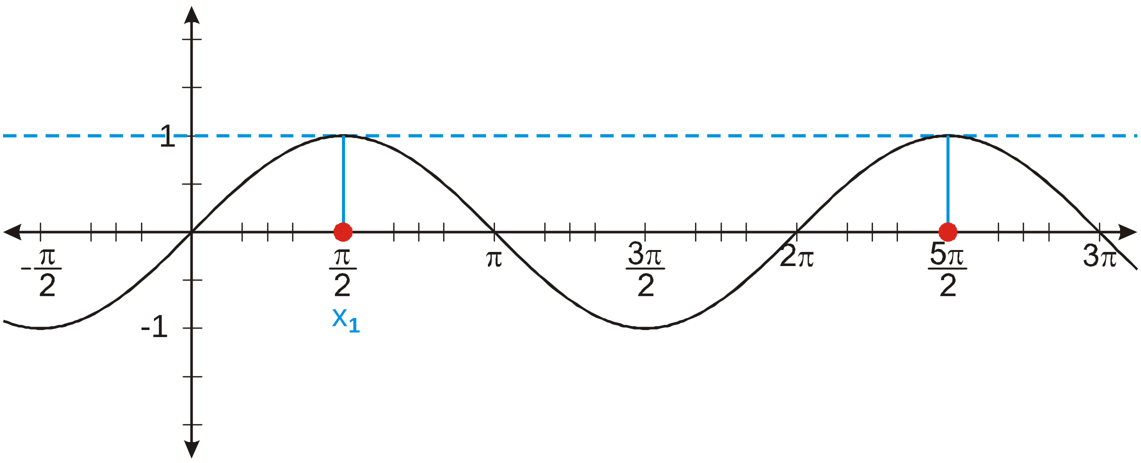
Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\langle \pi; 2\pi \rangle$, hodnoty se opakují s periodou 2π

$\Rightarrow\; K_1 = \bigcup_{k\in Z} \langle \pi + k\cdot 2\pi; 2\pi + k\cdot 2\pi \rangle$.

b) $a = \sin x \ge 1$

Základní řešení rovnice: $\sin x = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Do grafu vyznačíme přímku $y = 1$ a určenou hodnotu úhlu x_1. Na ose x hledáme čísla, pro která $\sin x \ge 1 \;\Rightarrow$ hodnoty funkce leží nad nebo na přímce $y = 1$.



Řešením nerovnice je číslo $\dfrac{\pi}{2}$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \;\Rightarrow\; K_2 = \bigcup_{k\in Z} \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \right\}$.

$$K = \bigcup_{k\in Z} \left\{ \langle \pi + k\cdot 2\pi; 2\pi + k\cdot 2\pi \rangle \cup \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \right\}$$

Př. 11: Petáková:
strana 55/cvičení 26 a) b) e) f)
strana 55/cvičení 27 a) b)

Shrnutí: Při řešení goniometrických nerovnic využíváme grafy goniometrických funkcí (nebo znázornění pomocí jednotkové kružnice) a řešení odpovídajících goniometrických rovnic.