

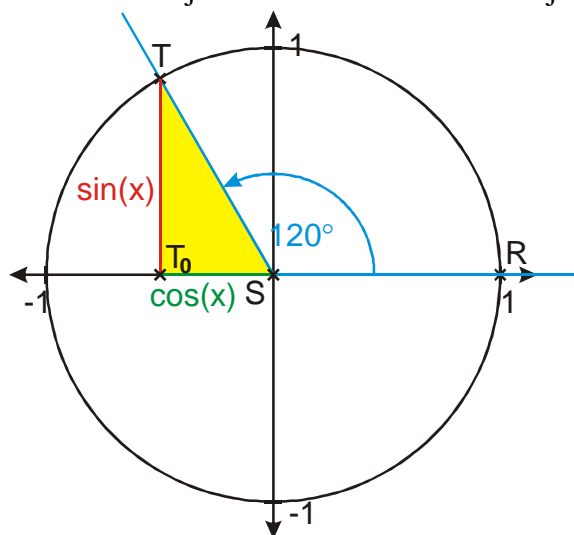
4.3.4 Základní goniometrické vzorce I

Předpoklady: 4301

Dva vzorce, oba známe už z prváku.

Pro každé $x \in R$ platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Důkaz: Použijeme definici obou funkcí v jednotkové kružnici:



Obě funkce jsou souřadnicemi bodu T na jednotkové kružnici \Rightarrow body STT_0 tvoří pravoúhlý trojúhelník \Rightarrow platí Pythagorova věta $|ST_0|^2 + |T_0T|^2 = |ST|^2 = 1$ (bod T leží na jednotkové kružnici).

Př. 1: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\sin x = \frac{3}{5}$ a

$$\text{zároveň } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right).$$

Hodnotu $\cos x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad (\text{protože } \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|)$$

$$|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos x \text{ je v intervalu } \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right) \text{ záporný } \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}.$$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

Př. 2: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\cos x = -\frac{1}{3}$ a zároveň $\sin x < 0$. Rozhodni, do kterého z intervalů $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$ a $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ náleží úhel x .

Hodnotu $\sin x$ určíme ze vzorce: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} \quad (\text{protože } \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|)$$

$$|\sin x| = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\sin x < 0)$$

Hodnoty ostatních funkcí zjistíme s definičních vztahů:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Protože hodnoty $\sin x$ i $\cos x$ jsou záporné, leží koncové rameno orientovaného úhlu x ve třetím kvadrantu a platí tedy $x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

Př. 3: Urči, kdy je definován výraz $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, a pak jej zjednoduš.

Definiční obor: Musí být definovány všechny funkce ve výrazu :

- $\operatorname{tg} x$ není definován pro $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$,
- $\operatorname{cotg} x$ není definován pro $x = 0 + k \cdot \pi$,

$$\Rightarrow \text{musíme vyloučit } x \neq \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; 0 + k \cdot \pi \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Žádné další hodnoty x vyloučit nemusíme, protože ve jmenovateli zlomku je součet druhé mocniny a jedničky, tedy číslo vždy kladné.

Upravujeme výraz:

$$\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Druhý vzorec:

$$\text{Pro každé } x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ platí: } \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1.$$

Vzorec se používá i v jiných tvarech: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x}$ nebo $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$..

Př. 4: Vysvětli, proč je ve vzorci $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$ uvedena podmínka $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Jak jsme zjistili při řešení příkladu 3, pro $x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$ není vždy jedna z obou funkcí $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$ definována \Rightarrow nemá smysl uvažovat o platnosti vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Př. 5: Dokaž platnost vztahu $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

Dosadíme: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$\frac{\sin x \cos x}{\cos x \sin x} = 1$$

$$1 = 1$$

Př. 6: Zjednoduš výraz $\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ pomocí vzorce $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$.

$$\frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{1 + \frac{1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{1 + \operatorname{cotg}^2 x}{\frac{\operatorname{cotg}^2 x + 1}{\operatorname{cotg}^2 x}} = \frac{\operatorname{cotg}^2 x (1 + \operatorname{cotg}^2 x)}{\operatorname{cotg}^2 x + 1} = \operatorname{cotg}^2 x$$

Př. 7: Odhadni výsledek, který vznikne zjednodušením výrazu $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$. Odhad potvrd' výpočtem.

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \operatorname{tg}^2 x$$

Umíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , pokud známe hodnotu $\sin x$ nebo $\cos x$ a znaménko druhé funkce (případně interval). Dokážeme určit hodnoty i v případě, že budeme znát hodnoty $\operatorname{tg} x$ ($\operatorname{cotg} x$)?

Zkusíme určit hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\operatorname{tg} x = -2$ a zároveň $x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

Snadno určíme $\operatorname{cotg} x$: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1 \Rightarrow \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}$.

Hodnoty dalších funkcí: vztahy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -2$ i $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

z obou vztahů získáme rovnici: $\sin x = -2 \cos x \Rightarrow$ nevede k cíli (1 rovnice na dvě neznámé)
 \Rightarrow musíme přidat další rovnici \Rightarrow použijeme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$ 2 rovnice na dvě neznámé.

Rychlejší postup: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad /: \cos^2 x$

$$\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

V intervalu $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$ jsou hodnoty $\cos x$ kladné $\Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \cos x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot (-2)$$

$$\sin x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí postup ukážu studentům rychle na tabuli s tím, že si jej nemají opisovat. Postup si zachytí do sešitu při řešení následujícího příkladu (který je velmi podobný). Při jeho řešení nechávám předchozí postup na tabuli.

Př. 8: Urči hodnoty všech goniometrických funkcí v bodě x , jestliže platí $\operatorname{cotg} x = \sqrt{2}$ a zároveň $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Podobný postup jako výše:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad /: \sin^2 x$ (potřebujeme získat zlomek $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$)

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow |\sin x| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

V intervalu $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty $\sin x$ kladné $\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

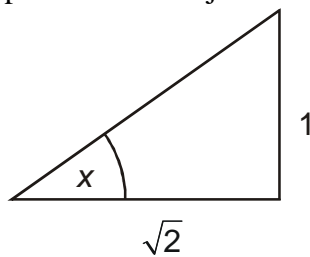
$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cotg x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí pravoúhlého trojúhelníku s vhodně zvolenými délkami stran.

Pro $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ jsou hodnoty všech goniometrických funkcí kladné.

Platí: $\cotg x = \sqrt{2} \Rightarrow$ poměr odvěsen pravoúhlého trojúhelníku $\cotg x = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$ s úhlem x

je $\sqrt{2} \Rightarrow$ hodnoty goniometrických funkcí můžeme určovat například z následujícího pravoúhlého trojúhelníku:



Délka přepony: $c^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$.

Hodnoty zbývajících goniometrických funkcí:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Pedagogická poznámka: Postup z příkladu 9 je sice méně elegantní a exaktní, ale pro většinu studentů snáze přijatelný. Ve skutečnosti si podobný trojúhelník můžeme nakreslit i pro úhly se základní velikostí mimo interval $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Z pravoúhlého trojúhelníku si určíme absolutní hodnoty hodnot goniometrických funkcí a znaménka zjistíme z polohy koncového ramene úhlu.

Př. 10: Petáková: strana 44, cvičení 45 c)

Shrnutí: Platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (pravoúhlý trojúhelník) a $\tg x \cdot \cotg x = 1$ (definice).