

4.3.5 Základní goniometrické vzorce II

Předpoklady: 4304

Pedagogická poznámka: Při procvičování úprav je dokazování rovností zařazeno před zjednodušování výrazů záměrně. Při dokazování rovností mohou studenti používat i ekvivalentní úpravy (násobení rovnic apod.), které se potom někteří snaží uplatnit i u výrazů. Opět je v takovém případě (až po chybách) potřeba třídu upozornit, že jde o dva rozdílné úkoly, které je nutné řešit různými způsoby.

Připomenutí:

- $y = \sin x$ je lichá funkce \Rightarrow platí $\sin(-x) = -\sin x$,
- $y = \cos x$ je sudá funkce \Rightarrow platí $\cos(-x) = \cos x$.

Známe dva vztahy mezi goniometrickými funkcemi \Rightarrow je možné vymyslet mnoho dalších rovností, které je pak třeba dokazovat.

Jak například dokázat, že platí rovnost: $\frac{1 + \sin x}{\sin x \cdot \cos(-x)} = \frac{\cotg x}{1 + \sin(-x)}$?

Nejdříve musíme zjistit, pro která x je rovnost definována:

- použité funkce $\cotg x \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- zlomky: $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(-x) = \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \sin(-x) = 1 - \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

Dokazujeme rovnost \Rightarrow můžeme upravovat jako rovnici až do okamžiku, kdy na obou stranách získáme stejné výrazy.

$$\frac{1 + \sin x}{\sin x \cdot \cos(-x)} = \frac{\cotg x}{1 + \sin(-x)} \quad \text{odstraníme výrazy } (-x) \text{ uvnitř funkcí}$$

$$\frac{1 + \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cotg x}{1 - \sin x} \quad / \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot (1 - \sin x) \quad \text{odstraníme zlomky (výhoda)}$$

$$(1 + \sin x)(1 - \sin x) = \cotg x \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$1 - \sin^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x \quad \text{rovnost platí.}$$

Pedagogická poznámka: V některých případech je nutná diskuse o tom, že platnost rovnosti znamená, že při dosazení libovolného čísla z definičního oboru, vyjde na obou stranách stejná hodnota.

Př. 1: Urči, kdy je definovaná rovnost $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin(-x)}{\cos(-x)}$, a pak ji dokaž.

Na obou stranách rovnosti jsou zlomky \Rightarrow nesmíme dělit nulou:

- $1 + \sin x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi, k \in Z$
- $\cos(-x) \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in Z$

$$\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$$

Odstraníme znaménka uvnitř funkcí: $\sin(-x) = -\sin x$ (lichá fce), $\cos(-x) = \cos x$ (sudá fce).

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad / \cdot (1 + \sin x) \cos x$$

$$\cos x \cdot \cos x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \cos^2 x$$

Př. 2: Urči definiční obory následujících rovností a dokaž je.

a) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x$ b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

c) $2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$

a) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1 - \cos^2 x$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in Z \Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \right\}$.

$$\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

$$x \in R$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos^2 x$$

$$(\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 1 = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

c) $2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$

Rovnost obsahuje funkci $\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq 0 + k\pi \Rightarrow x \neq 0 + k \frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$.

Tím jsme vyřešili i hodnoty x , pro které platí $\operatorname{tg} x = 0$ nebo $\operatorname{cotg} x$ (když je jedna z těchto

funkcí nulová, druhá není definována) $\Rightarrow x \in R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$2 \sin x \cos x + \operatorname{tg} x \operatorname{cotg} x = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} \right)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = (\cos x + \sin x)^2$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos x + 1 = 2 \sin x \cos x + 1 \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

Při zjednodušování výrazů jsou naše možnosti omezenější, nemůžeme odstraňovat zlomky vynásobením, můžeme pouze rozšiřovat, násobit jedničkou nebo přičítat nulu (samozřejmě ve vhodných tvarech).

Zjednodušíme výraz $\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x}$.

Nejdříve definiční obor:

$$\text{zlomek: } \sin^3 x - \sin x = \sin x (\sin^2 x - 1) \neq 0$$

- $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin^2 x - 1 = -\cos^2 x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\frac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x} = \frac{\cos x (\cos^2 x - 1)}{\sin x (\sin^2 x - 1)} = \frac{\cos x (-\sin^2 x)}{\sin x (-\cos^2 x)} = \frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Př. 3: Urči definiční obor výrazu a poté ho zjednoduš.

$$\text{a) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \qquad \text{b) } \frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} \qquad \text{c) } \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x (\operatorname{tg}^2 x + 1)}$$

$$\text{d) } \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$\text{a) } \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

Definiční obor: dělíme $\Rightarrow 1 - \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k \cdot 2\pi\}$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\text{b) } \frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow 1 + \operatorname{tg} x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x \neq -1 \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$
- $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = \cos x$$

c) $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x(\operatorname{tg}^2 x + 1)}$

Definiční obor:

- dělíme $\Rightarrow \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
- $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x(\operatorname{tg}^2 x + 1)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x \frac{1}{\cos^2 x}} = \sin x$$

d) $\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

Definiční obor: $\operatorname{tg} x \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \operatorname{cotg} x \Rightarrow x \neq k\pi$

$$x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$\sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1$$

Př. 4: Petáková:

strana 45, cvičení 47 c), f), i), m)

strana 45, cvičení 46 b), c), e), h), m)

Shrnutí:

