4.3.6 Základní goniometrické vzorce III

Předpoklady: 4301, 4305

Pedagogická poznámka: Je zřejmé, že samostatně studenti všechny rovnice za jednu hodinu nevyřeší. Pokud se objeví větší rozdíly mezi různými částmi třídy je možné změnit strategii a nejdříve si projít všechna zadání, popovídat si o metodách řešení a pak nechat třídu počítat.

Př. 1: Vyřeš rovnici $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$.

Problém: V rovnici se vyskytují dvě různé goniometrické funkce $\Rightarrow$ pomocí vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ je můžeme vzájemně převádět $\Rightarrow$ nahradíme $\cos x$, protože je v druhé mocnině (vyhneme se odmocninám).

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$$
$$2\left(1-\sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$$
$$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

Substituce: $y = \sin x \Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{3+5}{4} = 2$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \sin x_1 = -\frac{1}{2} \qquad y_2 = \sin x = 2$$

$$K_1 = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7}{6}\pi + k\cdot 2\pi; \frac{11}{6}\pi + k\cdot 2\pi\right\} \qquad K_2 = \emptyset$$

$$K = \bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{7}{6}\pi + k\cdot 2\pi; \frac{11}{6}\pi + k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 2: Vyřeš rovnici $4\sin^2 x - \mathrm{tg}^2 x = 1$.

$$4\sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$
$$4\sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\left(1-\sin^2 x\right)} = 1$$

Substituce: $a = \sin^2 x$

$$4a - \frac{a}{1-a} = 1 /\cdot(1-a)$$
$$4a(1-a) - a = 1 - a$$
$$4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot4}=\frac{4\pm0}{8}$$

$$a_1=a_2=\frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$a=\sin^2 x=\frac{1}{2}$$

$$|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K_1=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{4}\pi+k\cdot2\pi;\frac{3}{4}\pi+k\cdot2\pi\right\} \qquad K_2=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{5}{4}\pi+k\cdot2\pi;\frac{7}{4}\pi+k\cdot2\pi\right\}$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{4}\pi+k\cdot2\pi;\frac{3}{4}\pi+k\cdot2\pi;\frac{5}{4}\pi+k\cdot2\pi;\frac{7}{4}\pi+k\cdot2\pi\right\}$$

Jednotlivé kořeny se liší navzájem o $\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ výsledek můžeme zapsat úsporněji:

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{1}{4}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $2\cos^2 3x-\sin 3x-1=0$.

$$2\cos^2 3x-\sin 3x-1=0$$

Problém: Uvnitř obou funkcí je 3x.

Substituce: $a=3x$

$$2\cos^2 a-\sin a-1=0$$

$$2\left(1-\sin^2 a\right)-\sin a-1=0$$

$$2-2\sin^2 a-\sin a-1=0$$

$$2\sin^2 a+\sin a-1=0$$

Substituce: $y=\sin a$

$$2y^2+y-1=0$$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm3}{4}$$

$$y_1=-1 \qquad y_2=\frac{1}{2}$$

Návrat k předchozí proměnné:

$$y_1=\sin a_1=-1$$

$$a_1=\frac{3}{2}\pi+k\cdot2\pi$$

$$y_2=\sin a_2=\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{1}{6}\pi+k\cdot2\pi \qquad a_3=\frac{5}{6}\pi+k\cdot2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$a_1=3x_1=\frac{3}{2}\pi+k\cdot2\pi \qquad a_2=3x_2=\frac{1}{6}\pi+k\cdot2\pi \qquad a_3=3x_3=\frac{5}{6}\pi+k\cdot2\pi$$

$3x_1=\frac{3}{2}\pi+k\cdot 2\pi \quad /:3$ $\qquad 3x_2=\frac{1}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad /:3$ $\qquad 3x_2=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad /:3$

$x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ $\qquad x_2=\frac{1}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$ $\qquad x_3=\frac{5}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{2}+k\cdot\frac{2}{3}\pi;\frac{1}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi;\frac{5}{18}\pi+k\cdot\frac{2}{3}\pi\right\}$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x$.

$\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x$

Zadání svádí k dělení (které nesmíme provést kvůli ztrátě kořenů) $\Rightarrow$ převedeme vše na levou stranu a vytkneme: $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0$

$\sin x\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)=0$

Součinový tvar:

$\sin x=0$

$x_1=0+k\cdot 2\pi$

$x_2=\pi+k\cdot 2\pi$

Jednodušeji: $x_1=k\cdot\pi$.

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

$\sin x=\sqrt{3}\cos x$

Problém: Dvě goniometrické funkce, ani jedna ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem $\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

Rovnice obsahuje pouze členy s $\cos x$ a $\sin x$ $\Rightarrow$ vydělíme rovnici jednou z těchto funkcí a převedeme na $\mathrm{tg}\, x$ nebo $\mathrm{cotg}\, x$:

$\sin x=\sqrt{3}\cos x \quad /:\cos x \qquad \cos x\neq 0$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\sqrt{3}$

$\mathrm{tg}\, x=\sqrt{3} \qquad x_2=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{k\cdot\pi;\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\right\}$

Př. 5: Vyřeš rovnici $3\cos^2 x=\sin^2 x$.

Podobné předchozímu příkladu: $3\cos^2 x=\sin^2 x \qquad /:\cos^2 x$.

$3=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$3=\mathrm{tg}^2\, x$

$\mathrm{tg}^2\, x-3=0$

$\left(\mathrm{tg}\, x-\sqrt{3}\right)\left(\mathrm{tg}\, x+\sqrt{3}\right)=0$

Součinový tvar:

$\left(\mathrm{tg}\, x-\sqrt{3}\right)=0$

$\mathrm{tg}\, x=\sqrt{3}$

$x_1=\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$

$\left(\mathrm{tg}\, x+\sqrt{3}\right)=0$

$\mathrm{tg}\, x=-\sqrt{3}$

$x_2=-\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi ; \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \right\}$$

Dodatek: Předchozí rovnici samozřejmě můžeme řešit (ovšem pomaleji) převedením na $\sin x$ nebo $\cos x$ pomocí vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$.

$\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x \cos x = 0$

Problém: Dvě goniometrické funkce, ani jedna pouze ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Rovnice obsahuje pouze členy s $\cos x$ a $\sin x$, vždy ve druhé mocnině $\Rightarrow$ vydělíme jedním z těchto výrazů a tím převedeme rovnici na $\operatorname{tg} x$ nebo $\operatorname{cotg} x$.

$\sin^2 x - 2\cos^2 x + \sin x \cos x = 0 \quad / : \cos^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0$$

$\operatorname{tg}^2 x - 2 + \operatorname{tg} x = 0$

Substituce: $y = \operatorname{tg} x$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$y_1 = -2$

$y_2 = 1$

Návrat k původní proměnné:

$y_1 = \operatorname{tg} x_1 = -2$

$$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \operatorname{arctg}(-2) + k \cdot \pi \right\}$$

$y_2 = \operatorname{tg} x_2 = 1$

$$K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \operatorname{arctg}(-2) + k \cdot \pi ; \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

Dodatek: Metoda použitá na vyřešení předchozí příkladu je velmi podobná metodě, kterou jsme používali na řešení exponenciálních rovnic typu $20 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 3^{x+2} - 3^x$.

Př. 7: Vyřeš rovnici $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$.

Problém: Dvě goniometrické funkce, ani jedna pouze ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Nepomůže ani dělení výrazem (na pravé straně 1, funkce, kterou bychom rovnici vydělili by zůstala ve jmenovateli). Nezbývá než umocnit na druhou a pak dělat zkoušku. Před umocněním převedeme jeden z výrazů na levé straně na pravou, abychom jednu z funkcí měli pouze ve druhé mocnině.

$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$

$\sqrt{3} \sin x = 1 - \cos x \quad /^2$

$\left(\sqrt{3} \sin x\right)^2 = (1 - \cos x)^2$

$3\sin^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x$

$3\left(1-\cos^2 x\right)=1-2\cos x+\cos^2 x$

$3-3\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$

$0=-2-2\cos x+4\cos^2 x$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

Substituce: $y=\cos x$

$2y^2-y-1=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}$$

$y_1=\frac{1+3}{4}=1$ $\qquad$ $y_2=\frac{1-3}{4}=-\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\cos x_1=1$

$x_1=0+k\cdot 2\pi$

$y_2=\cos x_2=-\frac{1}{2}$

$x_2=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi$ $\qquad$ $x_3=\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

Během řešení rovnice jsme umocňovali $\Rightarrow$ je třeba provést zkoušku.

Zkouška:

$x_1=0+k\cdot 2\pi:$

$L\left(0+k\cdot 2\pi\right)=\cos 0+\sqrt{3}\sin 0=1+0=1$

$P\left(0+k\cdot 2\pi\right)=1$

$L\left(0+k\cdot 2\pi\right)=P\left(0+k\cdot 2\pi\right)$

$x_2=\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi:$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$$

$$P\left(\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)=1$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)=P\left(\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)$$

$x_3=\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi:$

$$L\left(\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)=\cos\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$$

$$P\left(\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)=1$$

$$L\left(\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)\neq P\left(\frac{4}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right)$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{0+k\cdot 2\pi;\frac{2}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Rovnici $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$ můžeme řešit i pomocí vzorce $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Získáme tak soustavu rovnic: $\begin{array}{c} \cos x + \sqrt{3}\sin x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{array}$.

Substituce: $a = \cos x$, $b = \sin x$.

$\begin{array}{c} a + b\sqrt{3} = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array} \Rightarrow a = 1 - b\sqrt{3}$ dosadíme do druhé rovnice.

$\left(1 - b\sqrt{3}\right)^2 + b^2 = 1$

$1 - 2b\sqrt{3} + 3b^2 + b^2 = 1$

$4b^2 - 2b\sqrt{3} = 0$

$2b\left(2b - \sqrt{3}\right) = 0 \Rightarrow b = 0$ nebo $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$b_1 = \sin x_1 = 0$

$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$, $x_2 = \pi + k \cdot 2\pi$

$b_2 = \sin x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $x_4 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Během řešení rovnice jsme umocňovali (při dosazení $\left(1 - b\sqrt{3}\right)^2$) $\Rightarrow$ je třeba provést zkoušku.

Zkouška:

$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$:

$L\left(0 + k \cdot 2\pi\right) = \cos 0 + \sqrt{3}\sin 0 = 1 + 0 = 1$

$P\left(0 + k \cdot 2\pi\right) = 1$

$L\left(0 + k \cdot 2\pi\right) = P\left(0 + k \cdot 2\pi\right)$

$x_2 = \pi + k \cdot 2\pi$:

$L\left(\pi + k \cdot 2\pi\right) = \cos \pi + \sqrt{3}\sin \pi = -1 + 0 = -1$

$P\left(0 + k \cdot 2\pi\right) = 1$

$L\left(0 + k \cdot 2\pi\right) \neq P\left(0 + k \cdot 2\pi\right)$

$x_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$:

$L\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$P\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = 1$

$L\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) \neq P\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$

Podle očekávání se oba kořeny, které jsme nezískali předchozí metodou, ukázali jako falešné.

$x_4 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$:

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

$$K = \bigcup_{k \in Z}\left\{0 + k \cdot 2\pi; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right\}$$

Př. 8: Petáková:
strana 52, cvičení 7 d), f), i), k)
strana 53, cvičení 8 c)
strana 53, cvičení 9 b)
strana 53, cvičení 10 c), d), f)
strana 53, cvičení 11 c), d)

Př. 9: Vyřeš s pomocí nápovědy ve výsledkách příklad Petáková strana 53, cvičení 12 d). Pokud nebude nápověda dostatečná, vyřeš nejprve příklad Petáková strana 53, cvičení 12 b).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je zajímavé cvičení na porozumění textu a schopnost číst vůbec.

Př. 10: Petáková: strana 55/cvičení 23 b) c)

Shrnutí: