4.3.7 Součtové vzorce

Předpoklady: 4306

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje látku na přibližně jeden a půl vyučovací hodiny, první část kombinuji s písemkou.

Pedagogická poznámka: Úspěch této hodiny (a hodin následujících) je zcela závislý na míře, ve které studenti chápou dosazování do vzorce jako používání předem připravené formy, ve které označení proměnných (typicky *x*, *y*) nesouvisí s označením proměnných v řešeném příkladě (a proto se může stát, že *x* je *y*). Pokud narazíte na problémy, je dobré si ověřit, zda této skutečnosti žák rozumí a v případě potřeby mu ujasnit samotný princip.

Závorku ve výrazu $\sin(x+y)$ není možné jen tak roznásobit ani rozdělit:

$$0=\sin(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2\,.$$

Způsob, jakým goniometrické funkce vyrábějí ze zadaných čísel hodnoty, sice známe, ale je tak neprůhledný, že není možné používat závorkové úpravy na výrazy uvnitř funkcí $\Rightarrow$ hodnotu goniometrické funkce musíme počítat z čísla $(x+y)$ a na úpravy výrazu můžeme použít pouze odvozené goniometrické vzorce.

Pedagogická poznámka: Smyslem červeného rámečku je vytvořit (upevnit) ve žácích vědomí, že sin před závorkou není další proměnnou ale příkazem k poměrně složité přeměně úhlu uvnitř na poměr. Podstatná část žáků tuto skutečnost ignoruje a to pak ústí do mnoha zbytečných chyb.

Vzorců je hodně, patří do několika skupin – první skupinu tvoří **součtové vzorce**.
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí: $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ **.**

Př. 1: Dokaž platnost vztahu $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

Př. 2: Využij vztah pro $\sin(x+y)$ k odvození vzorce pro $\sin(x-y)$.

$\sin(x-y)=\sin[x+(-y)]=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$.

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro funkci $\cos x$.

Součtové vzorce:
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí:

- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
- $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

Pedagogická poznámka: Nepožaduji po studentech, aby vzorce uměli nazpaměť. Součtové vzorce (stejně jako vzorce, probírané v následujících hodinách) si mohou napsat na speciální papír, který mohou kromě hodin používat i při psaní písemek.

Pedagogická poznámka: Odvození součtových vzorců pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$ v hodinách neprovádím. Je uvedeno na konci hodiny pro zájemce.

Př. 3: Dokaž platnost vztahu $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x\cdot 0+\sin x\cdot 1=\sin x$$

Př. 4: Zjednoduš výraz: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\frac{1}{2}=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Některým studentů dělá problémy pochopit, že za *y* ve při rozkladu $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ dosazujeme *x*. Většina z nich má problém s celou filozofií dosazování do vzorce.

Př. 5: Dokaž rovnost: $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$
$$=\cos x\cdot\frac{2}{2}+\sin x\cdot\frac{2}{2}=\sin x+\cos x$$

Př. 6: Dokaž rovnost: $\sin x=\sin(\pi-x)=-\sin(\pi+x)=-\sin(2\pi-x)$

$$\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x=0\cdot\cos x-(-1)\sin x=\sin x$$
$$-\sin(\pi+x)=-(\sin\pi\cos x+\cos\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x+(-1)\sin x)=\sin x$$
$$-\sin(2\pi-x)=-(\sin 2\pi\cos x-\cos 2\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x-1\cdot\sin x)=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k synchronizaci třídy. Pokud učím hodinu ve formátu polovina + celá, zde končím v té počáteční polovině.

Př. 7: Odvoď součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x+y)$.

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=$$

Potřebujeme výraz upravit tak, aby obsahoval $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$, kvůli rozdílu (neodstranitelném) ve jmenovateli půjde o zlomek $\Rightarrow$ musíme vytvořit $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$ ve jmenovateli i čitateli $\Rightarrow$ vynásobíme čitatel i jmenovatel výrazem $\frac{1}{\cos x\cos y}$:

$$\frac{\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\frac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y}+\frac{\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

Pedagogická poznámka: Rozšíření zlomku výrazem $\cos x\cos y$ je studentům třeba poradit.

Př. 8: Odvoď součtový vzorec pro $\operatorname{tg}(x-y)$.

Problém: Odvození přes poměr $\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$ je příliš dlouhé $\Rightarrow$ použijeme $\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}[x+(-y)]$.

$$\operatorname{tg}(x-y)=\operatorname{tg}[x+(-y)]=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(-y)}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(-y)}$$

Použijeme $\operatorname{tg}(-y)=-\operatorname{tg}y$ ($\operatorname{tg}x$ je lichá funkce).

$$\mathrm{tg}(x-y)=\mathrm{tg}\left[x+(-y)\right]=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}(-y)}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}(-y)}=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$$

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\cos 75°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $75°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $75° = 45° + 30°$.

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Př. 10: Urči přesnou hodnotu $\sin 15°$.

Problém: Známe přesné hodnoty pouze pro tabulkové hodnoty $30°$, $45°$, $60°$
$\Rightarrow$ zkusíme vyjádřit $15°$ sčítáním (odčítáním) tabulkových hodnot: $15° = 45° - 30°$.

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Pedagogická poznámka: Můžete vyzvat studenty, aby vysvětlili shodu výsledků dvou předchozích příkladů, případně podiskutovat o způsobu, jak získat přesné hodnoty goniometrických funkcí v dalších bodech.

Př. 11: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x = 1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtového vzorce rozložíme argument v cosinu, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x = 1$$

$$\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2}+\sin x = 1$$

$$\cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 + \sin x = 1$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ x_2=\frac{5}{6}\pi + k\cdot 2\pi.$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 12: Vyřeš rovnici: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$.

Problém: Dvě různé goniometrické funkce s různými argumenty $\Rightarrow$ pomocí součtových vzorců rozložíme argumenty obou cosinů, aby uvnitř všech goniometrických funkcí bylo pouze *x*.

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$$

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=1$$

$$\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1$$

$$2\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos x\sqrt{2}=1$$

$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$ čtvrtinové úhly v kladné polorovině na ose x $\Rightarrow$

$x_1=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$, $x_2=\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi$.

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi;\frac{7}{4}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 13: Vyřeš nerovnici: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

Problém: Závorky u obou sinů se nerovnají, nemůžeme tedy substituovat $\Rightarrow$ rozložíme pomocí součtových vzorců.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)>0$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}-\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}>0$$

$$2\cos x\sin\frac{\pi}{4}>0$$

$$2\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}>0$$

$$\cos x>0$$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)$$

Př. 14: Petáková:
strana 47, cvičení 55 a), c), e)
strana 47, cvičení 56 d), e)

strana 47, cvičení 57 b), d), h) , l)
strana 54, cvičení 22 a), g), h)

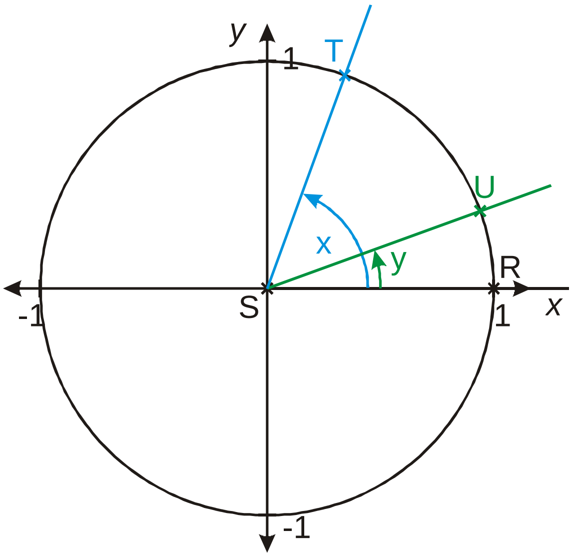
Pedagogická poznámka: Následující odvození o hodinách vynechávám, učebnice ho obsahuje pouze kvůli případným zájemcům, přesto je odvození psáno stylem, který v učebnici používám pro vysvětlování normální látky, aby v důležitých místech studenti získali čas a námět na zamyšlení.

Pedagogická poznámka: V podstatě sledujeme odvození z učebnice Goniometrie: Odvárko, Prometheus.

Odvození součtových vzorců

K odvození součtových vzorců použijeme jednotkovou kružnici.

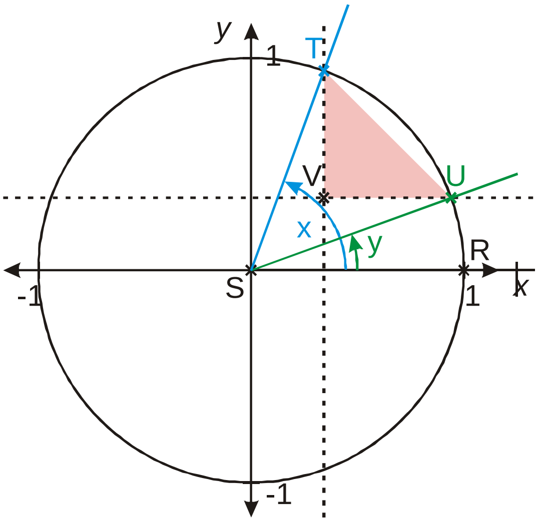
Zakreslíme do obrázku jednotkové kružnice dva orientované úhly $x = \widehat{RST}$, $y = \widehat{RSU}$, tak aby platilo $x > y$.

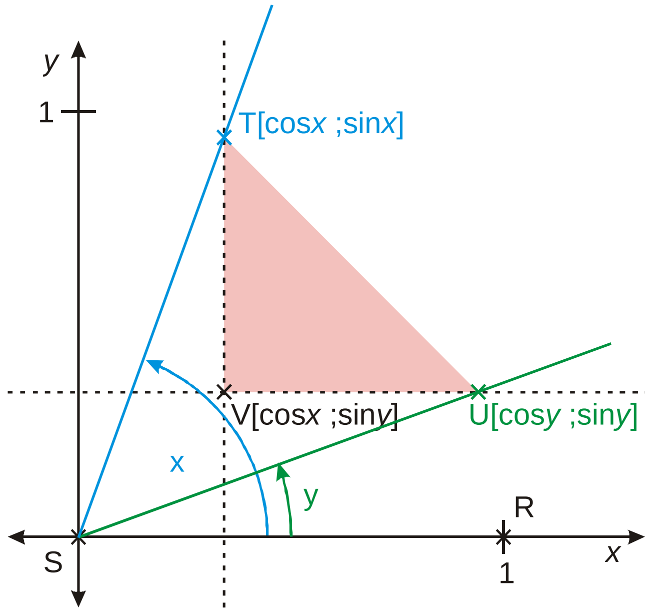


Př. 15: Urči souřadnice bodů R, T, U souřadné soustavě Sxy.

Platí: $R[1;0]$, $T[\cos x, \sin x]$, $U[\cos y, \sin y]$.

Bodem *T* vedeme rovnoběžku s osou *x*, bodem *U* rovnoběžku s osou *x*. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník *TUV*.





Př. 16: Urči délky stran trojúhelníku TUV.

Z obrázku vidíme: $|VU| = |\cos x - \cos y|$, $|TV| = |\sin x - \sin y|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

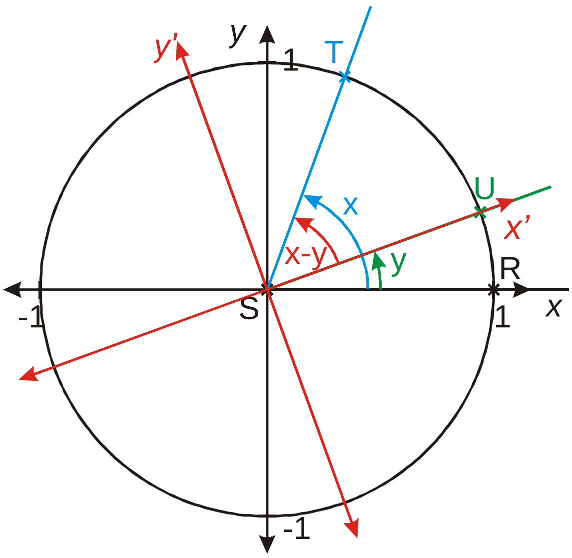
$$|TU|^2 = |\cos x - \cos y|^2 + |\sin x - \sin y|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y$$

$$|TU|^2 = 1 + 1 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

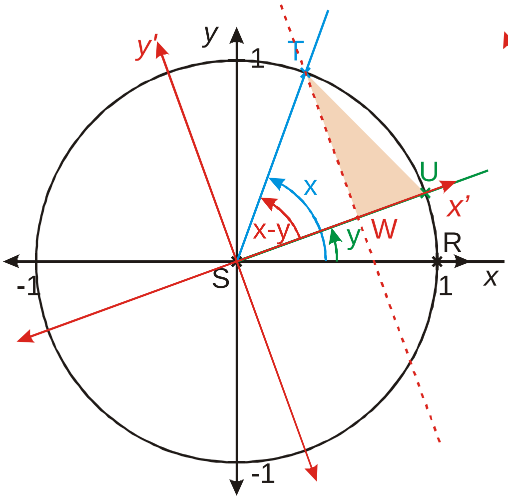
Nyní zopakujeme celý postup vzhledem k nové soustavě souřadnic $Sx'y'$, kterou získáme otočením soustavy Sxy o úhel $y = \widehat{RSU}$.

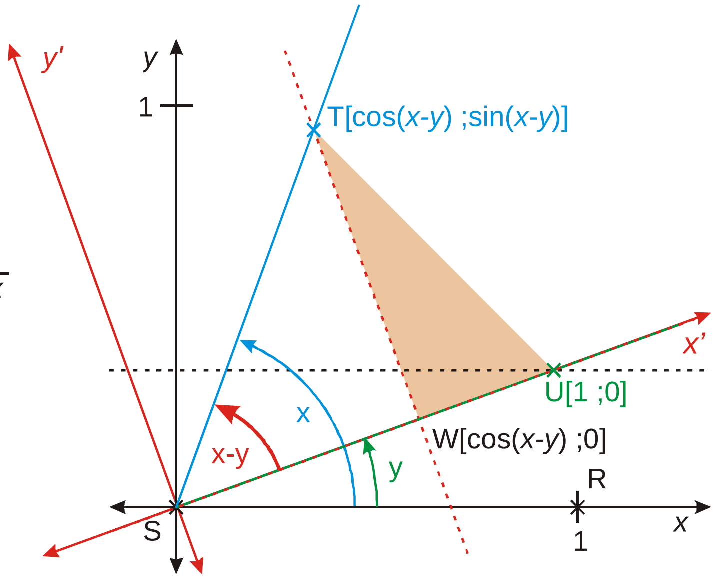


Př. 17: Urči souřadnice bodů T, U souřadné soustavě $Sx'y'$.

Platí: $T[\cos(x-y), \sin(x-y)]$, $U[1,0]$.

Bodem *T* vedeme rovnoběžku s osou y', bodem *U* rovnoběžku s osou x'. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník *TUW*.





Př. 18: Urči délky stran trojúhelníku *TUW*.

Z obrázku vidíme: $|WU| = |1-\cos(x-y)|$, $|TW| = |\sin(x-y)|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

$$|TU|^2 = |1-\cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2 = [1-\cos(x-y)]^2 + [\sin(x-y)]^2$$

$$|TU|^2 = 1-2\cos(x-y)+\cos^2(x-y)+\sin^2(x-y) = 1-2\cos(x-y)+1$$

$$|TU|^2 = 2-2\cos(x-y) = 2[1-\cos(x-y)]$$

Otočením soustavy souřadnic se nemůže změnit vzdálenost bodů *T*, *U* $\Rightarrow$ obě vyjádření délky úsečky *TU* musí být shodné: $2[1-\cos(x-y)] = 2(1-\cos x\cos y - \sin x \sin y)$.

$1-\cos(x-y) = 1-\cos x\cos y - \sin x\sin y$

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ - jeden ze vzorců, které jsme si ukázali na začátku hodiny.

Odvození není zcela kompletní. Musíme ověřit případy, které jsme vynechali v našich předpokladech:
$x > y$, $x, y \in \langle 0; 2\pi)$.

Ověření pro $x = y$, $x, y \in \langle 0; 2\pi)$: Dosadíme do odvozeného vzorce: $x = y$:

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$\cos(x-x) = \cos x\cos x + \sin x\sin x$

$\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ - platí.

Ověření pro $x < y$**,** $x, y \in \langle 0; 2\pi)$ **:**

$\cos(x-y) = \cos[-(y-x)] = \cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$

Platí: $\cos[-(y-x)] = \cos(y-x)$, protože $\cos x$ je sudá funkce.

Ověření pro $x, y \in R$**:**

Víme, že pro $x, y \in R$ existují: $x_0, y_0 \in \langle 0; 2\pi)$ a $k, m \in Z$, tak, že platí:

$x = x_0 + k \cdot 2\pi$, $y = y_0 + m \cdot 2\pi$

Dosadíme do obou stran vzorce (využijeme periodičnost funkcí $y = \sin x$ a $y = \cos x$):

$\cos(x-y) = \cos[x_0 + k \cdot 2\pi - (y_0 + m \cdot 2\pi)] = \cos[x_0 - y_0 + (k-m) \cdot 2\pi] = \cos(x_0 - y_0)$

$\cos x \cos y + \sin x \sin y =$

$\cos(x_0 + k \cdot 2\pi)\cos(y_0 + m \cdot 2\pi) + \sin(x_0 + k \cdot 2\pi)\sin(y_0 + m \cdot 2\pi) =$

$\cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0$

Odvození vztahu $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ **:**

Platí: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$.

Platí: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ (předchozí vztah).

$\sin(x+y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x+y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin y =$

$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Ostatní vzorce jsme z nyní získaných odvodili již v začátku hodiny pomocí přezávorkování a sudosti a lichosti goniometrických funkcí.

Shrnutí: Rozkládat výrazy uvnitř goniometrických funkcí můžeme pouze pomocí goniometrických vzorců.