

### 4.3.7 Základní goniometrické vzorce III

**Předpoklady:** 040301, 040306

**Pedagogická poznámka:** Je zřejmé, že samostatně studenti všechny rovnice za jednu hodinu nevyřeší. Pokud se objeví větší rozdíly mezi různými částmi třídy je možné změnit strategii a nejdříve si projít všechna zadání, popovídat si o metodách řešení a pak nechat třídu počítat.

**Př. 1:** Vyřeš rovnici  $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$ .

**Problém:** V rovnici se vyskytují dvě různé goniometrické funkce  $\Rightarrow$  pomocí vzorce  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  je můžeme vzájemně převádět  $\Rightarrow$  nahradíme  $\cos x$ , protože je v druhé mocnině (vyhneme se odmocninám).

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0$$

$$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0$$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$$

**Substituce:**  $y = \sin x \Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$y_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{3+5}{4} = 2$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = \sin x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$y_2 = \sin x = 2$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K_2 = \emptyset$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{7}{6} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 2:** Vyřeš rovnici  $4 \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 1$ .

$$4 \sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$4 \sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{(1 - \sin^2 x)} = 1$$

**Substituce:**  $a = \sin^2 x$

$$4a - \frac{a}{1-a} = 1 \cdot (1-a)$$

$$4a(1-a) - a = 1 - a$$

$$4a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8}$$

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$a = \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{4}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{7}{4}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Jednotlivé kořeny se liší navzájem o  $\frac{\pi}{2} \Rightarrow$  výsledek můžeme zapsat úsporněji:

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}.$$

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $2 \cos^2 3x - \sin 3x - 1 = 0$ .

$$2 \cos^2 3x - \sin 3x - 1 = 0$$

**Problém:** Uvnitř obou funkcí je  $3x$ .

**Substitute:**  $a = 3x$

$$2 \cos^2 a - \sin a - 1 = 0$$

$$2(1 - \sin^2 a) - \sin a - 1 = 0$$

$$2 - 2 \sin^2 a - \sin a - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 a + \sin a - 1 = 0$$

**Substitute:**  $y = \sin a$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = -1 \qquad y_2 = \frac{1}{2}$$

**Návrat k předchozí proměnné:**

$$y_1 = \sin a_1 = -1$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = \sin a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$a_3 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$a_1 = 3x_1 = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = 3x_2 = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$a_3 = 3x_3 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$3x_1 = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:3$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$3x_2 = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:3$$

$$x_2 = \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$3x_3 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:3$$

$$x_3 = \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2}{3}\pi; \frac{1}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{18}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi \right\}$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x$ .

$$\sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x$$

Zadání svádí k dělení (které nesmíme provést kvůli ztrátě kořenů)  $\Rightarrow$  převedeme vše na levou stranu a vytkneme:  $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$

$$\sin x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$$

**Součinný tvar:**

$$\sin x = 0$$

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \pi + k \cdot 2\pi$$

Jednodušeji:  $x_1 = k \cdot \pi$ .

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x$$

**Problém:** Dvě goniometrické funkce, ani jedna ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

Rovnice obsahuje pouze členy s  $\cos x$  a  $\sin x \Rightarrow$  vydělíme rovnici jednou z těchto funkcí a převedeme na  $\operatorname{tg} x$  nebo  $\operatorname{cotg} x$ :

$$\sin x = \sqrt{3} \cos x \quad /: \cos x \quad \cos x \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \pi; \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \right\}$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $3 \cos^2 x = \sin^2 x$ .

Podobné předchozímu příkladu:  $3 \cos^2 x = \sin^2 x \quad /: \cos^2 x$ .

$$3 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$3 = \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$$

$$(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$$

**Součinný tvar:**

$$(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi; \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \right\}$$

**Dodatek:** Předchozí rovnici samozřejmě můžeme řešit (ovšem pomaleji) převedením na  $\sin x$  nebo  $\cos x$  pomocí vzorce  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $\sin^2 x - 2 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$ .

$$\sin^2 x - 2 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0$$

**Problém:** Dvě goniometrické funkce, ani jedna pouze ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ).

Rovnice obsahuje pouze členy s  $\cos x$  a  $\sin x$ , vždy ve druhé mocnině  $\Rightarrow$  vydělíme jedním z těchto výrazů a tím převedeme rovnici na  $\operatorname{tg} x$  nebo  $\operatorname{cotg} x$ .

$$\sin^2 x - 2 \cos^2 x + \sin x \cos x = 0 \quad /: \cos^2 x$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 + \operatorname{tg} x = 0$$

**Substitute:**  $y = \operatorname{tg} x$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y+2)(y-1) = 0$$

$$y_1 = -2$$

$$y_2 = 1$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = \operatorname{tg} x_1 = -2$$

$$y_2 = \operatorname{tg} x_2 = 1$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg}(-2) + k \cdot \pi \right\}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \operatorname{arctg}(-2) + k \cdot \pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \right\}$$

**Dodatek:** Metoda použitá na vyřešení předchozí příkladu je velmi podobná metodě, kterou jsme používali na řešení exponenciálních rovnic typu  $20 \cdot 2^x - 2^{x+1} = 3^{x+2} - 3^x$ .

**Př. 7:** Vyřeš rovnici  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$ .

**Problém:** Dvě goniometrické funkce, ani jedna pouze ve druhé mocnině (nelze je snadno převést vzorcem  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ). Nepomůže ani dělení výrazem (na pravé straně 1, funkce, kterou bychom rovnici vydělili by zůstala ve jmenovateli). Nezbyvá než umocnit na druhou a pak dělat zkoušku. Před umocněním převedeme jeden z výrazů na levé straně na pravou, abychom jednu z funkcí měli pouze ve druhé mocnině.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$$

$$\sqrt{3} \sin x = 1 - \cos x \quad /^2$$

$$(\sqrt{3} \sin x)^2 = (1 - \cos x)^2$$

$$3 \sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$3(1 - \cos^2 x) = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$3 - 3 \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$0 = -2 - 2 \cos x + 4 \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

**Substitute:**  $y = \cos x$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \qquad y_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y_1 = \cos x_1 = 1$$

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = \cos x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x_3 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Během řešení rovnice jsme umocňovali  $\Rightarrow$  je třeba provést zkoušku.

**Zkouška:**

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi :$$

$$L(0 + k \cdot 2\pi) = \cos 0 + \sqrt{3} \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

$$P(0 + k \cdot 2\pi) = 1$$

$$L(0 + k \cdot 2\pi) = P(0 + k \cdot 2\pi)$$

$$x_2 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi :$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = \cos \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \sin \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

$$x_3 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi :$$

$$L\left(\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = \cos \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} \sin \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

$$P\left(\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$L\left(\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) \neq P\left(\frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 0 + k \cdot 2\pi; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Rovnici  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$  můžeme řešit i pomocí vzorce  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Získáme tak soustavu rovnic: 
$$\begin{cases} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Substituce:  $a = \cos x$ ,  $b = \sin x$ .

$a + b\sqrt{3} = 1 \Rightarrow a = 1 - b\sqrt{3}$  dosadíme do druhé rovnice.

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$(1 - b\sqrt{3})^2 + b^2 = 1$$

$$1 - 2b\sqrt{3} + 3b^2 + b^2 = 1$$

$$4b^2 - 2b\sqrt{3} = 0$$

$$2b(2b - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ nebo } b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$b_1 = \sin x_1 = 0$$

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi, \quad x_2 = \pi + k \cdot 2\pi$$

$$b_2 = \sin x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad x_4 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

Během řešení rovnice jsme umocňovali (při dosazení  $(1 - b\sqrt{3})^2$ )  $\Rightarrow$  je třeba provést zkoušku.

**Zkouška:**

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi:$$

$$L(0 + k \cdot 2\pi) = \cos 0 + \sqrt{3} \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

$$P(0 + k \cdot 2\pi) = 1$$

$$L(0 + k \cdot 2\pi) = P(0 + k \cdot 2\pi)$$

$$x_2 = \pi + k \cdot 2\pi:$$

$$L(\pi + k \cdot 2\pi) = \cos \pi + \sqrt{3} \sin \pi = -1 + 0 = -1$$

$$P(0 + k \cdot 2\pi) = 1$$

$$L(0 + k \cdot 2\pi) \neq P(0 + k \cdot 2\pi)$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi:$$

$$L\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$P\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$L\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right) \neq P\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$$

Podle očekávání se oba kořeny, které jsme nezískali předchozí metodou, ukázali jako falešné.

$$x_4 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi :$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$

$$P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = 1$$

$$L\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right) = P\left(\frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi\right)$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 0 + k \cdot 2\pi; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Př. 8:** Petáková:  
strana 52, cvičení 7 d), f), i), k)  
strana 53, cvičení 8 c)  
strana 53, cvičení 9 b)  
strana 53, cvičení 10 c), d), f)  
strana 53, cvičení 11 c), d)

**Př. 9:** Vyřeš s pomocí nápovědy ve výsledkách příklad Petáková strana 53, cvičení 12 d).  
Pokud nebude nápověda dostatečná, vyřeš nejprve příklad Petáková strana 53, cvičení 12 b).

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je zajímavé cvičení na porozumění textu a schopnost číst vůbec.

**Př. 10:** Petáková: strana 55/cvícení 23 b) c)

**Shrnutí:**