

### 4.3.8 Součtové vzorce I

**Předpoklady:** 040307

**Pedagogická poznámka:** Z hodiny probíráme většinou pouze první část (k důkazu), zbytek využíváme na písemku.

**Pedagogická poznámka:** Úspěch této hodiny (a hodin následujících) je zcela závislý na míře, ve které studenti chápou dosazování do vzorce jako používání předem připravené formy, ve které označení proměnných (typicky  $x, y$ ) nesouvisí s označením proměnných v řešeném příkladě (a proto se může stát, že  $x$  je  $y$ ). Pokud narazíte na problémy, je dobré si ověřit, zda této skutečnosti žák rozumí a v případě potřeby mu ujasnit samotný princip.

**Závorku ve výrazu  $\sin(x + y)$  není možné jen tak roznásobit ani rozdělit:**

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \neq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2.$$

**Způsob, jakým goniometrické funkce vyrábějí ze zadaných čísel hodnoty, sice známe, ale je tak neprůhledný, že není možné používat závorkové úpravy na výrazy uvnitř funkcí  $\Rightarrow$  hodnotu goniometrické funkce musíme počítat z čísla  $(x + y)$  a na úpravy výrazu můžeme použít pouze odvozené goniometrické vzorce.**

**Pedagogická poznámka:** Smyslem červeného rámečku je vytvořit (upevnit) v žácích vědomí, že  $\sin$  před závorkou není další proměnnou ale příkazem k poměrně složité přeměně úhlu uvnitř na poměr. Podstatná část žáků tuto skutečnost ignoruje a to pak ústí do mnoha zbytečných chyb.

Vzorců je hodně, patří do několika skupin – první skupinu tvoří **součtové vzorce**.

**Pro všechna reálná čísla  $x, y$  platí:**  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ .

**Př. 1:** Dokaž platnost vztahu  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Použijeme vzorec  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ , abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme  $y = \frac{\pi}{2}$ .

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

**Př. 2:** Využij vztah pro  $\sin(x+y)$  k odvození vzorce pro  $\sin(x-y)$ .

$$\sin(x-y) = \sin[x+(-y)] = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro funkci  $\cos x$ .

#### **Součtové vzorce:**

Pro všechna reálná čísla  $x, y$  platí:

- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

**Pedagogická poznámka:** Nepožaduji po studentech, aby vzorce uměli nazpaměť. Součtové vzorce (stejně jako vzorce probírané v následujících hodinách) si mohou napsat na speciální papír, který mohou kromě hodin používat i při psaní písemek.

**Pedagogická poznámka:** Odvození součtových vzorců pro  $\sin(x+y)$  a  $\cos(x+y)$  v hodinách neprovádím. Je uvedeno na konci hodiny pro zájemce.

**Př. 3:** Dokaž platnost vztahu  $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Použijeme vzorec  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ , abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme  $y = \frac{\pi}{2}$ .

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot 1 = \sin x$$

**Př. 4:** Zjednoduš výraz:  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x - \left(\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right) = \\ \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x - \cos x \cos \frac{\pi}{6} + \sin x \sin \frac{\pi}{6} &= 2 \sin x \sin \frac{\pi}{6} = 2 \sin x \frac{1}{2} = \sin x \end{aligned}$$

**Pedagogická poznámka:** Některým studentů dělá problémy pochopit, že za  $y$  při rozkladu

$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$  dosazujeme  $x$ . Většina z nich má problém s celou filozofií dosazování do vzorce.

**Př. 5:** Dokaž rovnost:  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$ .

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2} \left( \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \cos x \cdot \frac{2}{2} + \sin x \cdot \frac{2}{2} = \sin x + \cos x\end{aligned}$$

**Př. 6:** Dokaž rovnost:  $\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = 0 \cdot \cos x - (-1) \sin x = \sin x \\ -\sin(\pi + x) &= -(\sin \pi \cos x + \cos \pi \sin x) = -(0 \cdot \cos x + (-1) \sin x) = \sin x \\ -\sin(2\pi - x) &= -(\sin 2\pi \cos x - \cos 2\pi \sin x) = -(0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x) = \sin x\end{aligned}$$

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad slouží k synchronizaci třídy. Pokud učím hodinu ve formátu polovina + celá, zde končím v té počáteční polovině.

**Př. 7:** Petáková:  
strana 47, cvičení 56 d), e)  
strana 47, cvičení 57 b), d), h), l)

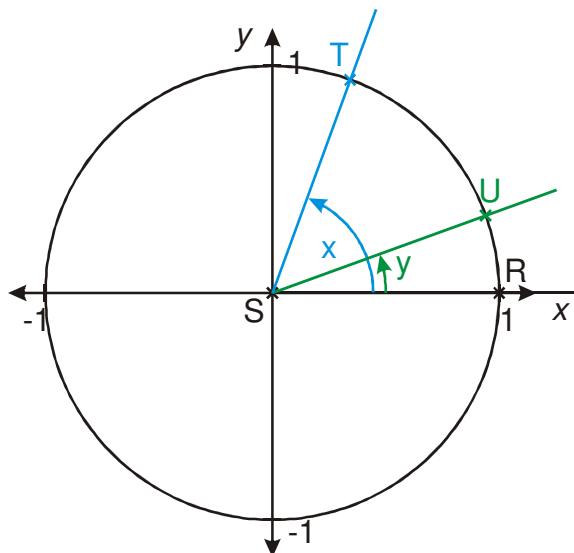
**Pedagogická poznámka:** Následující odvození o hodinách vynechávám, učebnice ho obsahuje pouze kvůli případným zájemcům, přesto je odvození psáno stylem, který v učebnici používám pro vysvětlování normální látky, aby v důležitých místech studenti získali čas a námět na zamyšlení.

**Pedagogická poznámka:** V podstatě sledujeme odvození z učebnice Goniometrie: Odvárko, Prometheus.

### Odvození součtových vzorců

K odvození součtových vzorců použijeme jednotkovou kružnici.

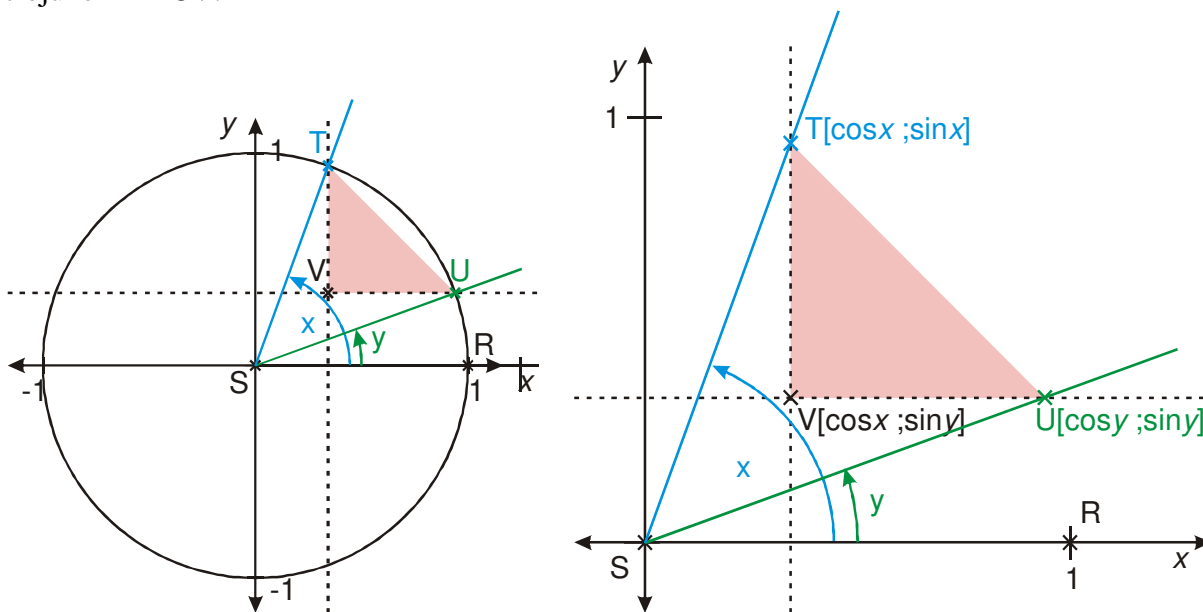
Zakreslíme do obrázku jednotkové kružnice dva orientované úhly  $x = \widehat{RST}$ ,  $y = \widehat{RSU}$ , tak aby platilo  $x > y$ .



**Př. 8:** Urči souřadnice bodů  $R, T, U$  v souřadné soustavě  $Sxy$ .

Platí:  $R[1;0]$ ,  $T[\cos x, \sin x]$ ,  $U[\cos y, \sin y]$ .

Bodem  $T$  vedeme rovnoběžku s osou  $y$ , bodem  $U$  rovnoběžku s osou  $x$ . Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník  $TUV$ .



**Př. 9:** Urči délky stran trojúhelníku  $TUV$ .

Z obrázku vidíme:  $|VU| = |\cos x - \cos y|$ ,  $|TV| = |\sin x - \sin y|$ .

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

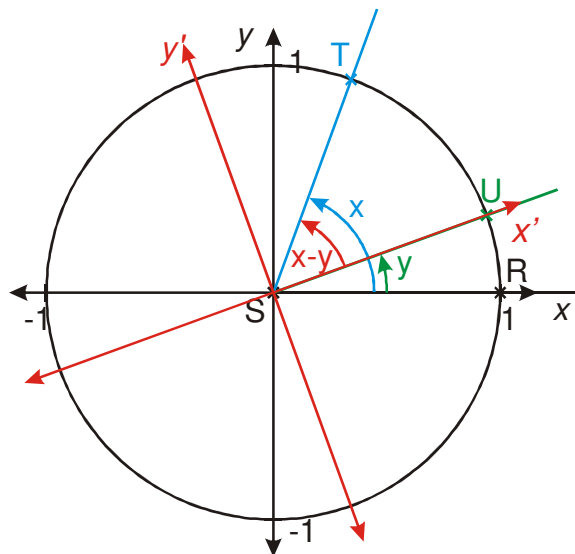
$$|TU|^2 = |\cos x - \cos y|^2 + |\sin x - \sin y|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2 \sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y - 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y$$

$$|TU|^2 = 1 + 1 - 2 \cos x \cos y - 2 \sin x \sin y = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

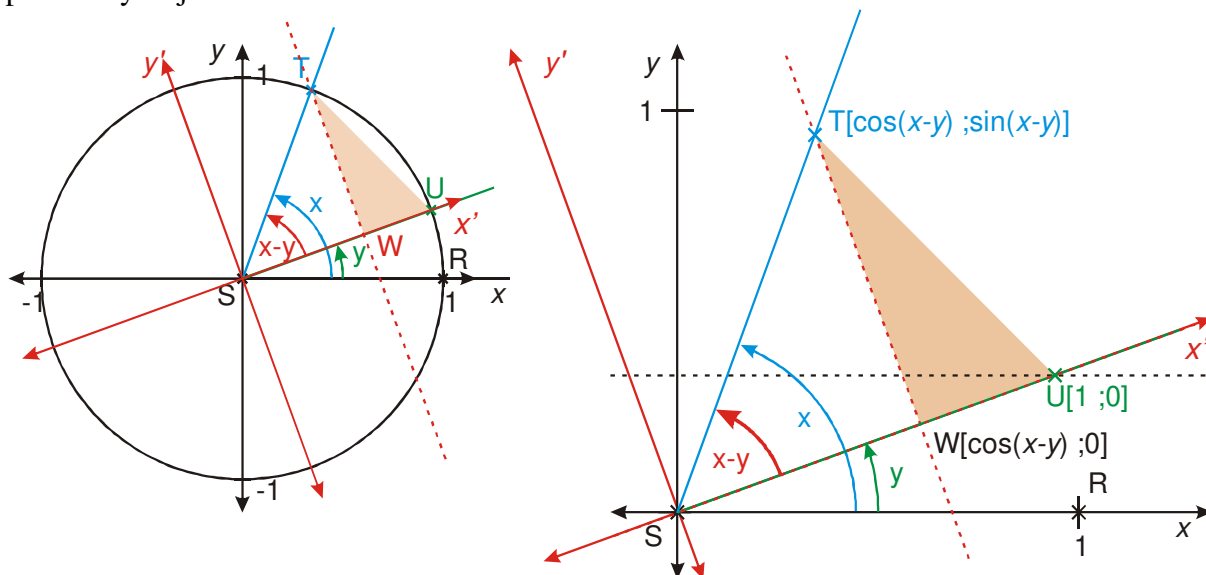
Nyní zopakujeme celý postup vzhledem k nové soustavě souřadnic  $Sx'y'$ , kterou získáme otočením soustavy  $Sxy$  o úhel  $y = \widehat{RSU}$ .



**Př. 10:** Urči souřadnice bodů  $T, U$  v souřadné soustavě  $Sx'y'$ .

Platí:  $T[\cos(x-y), \sin(x-y)]$ ,  $U[1,0]$ .

Bodem  $T$  vedeme rovnoběžku s osou  $y'$ , bodem  $U$  rovnoběžku s osou  $x'$ . Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník  $TUW$ .



**Př. 11:** Urči délky stran trojúhelníku  $TUW$ .

Z obrázku vidíme:  $|WU| = |1 - \cos(x-y)|$ ,  $|TW| = |\sin(x-y)|$ .

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty:  $c^2 = a^2 + b^2$ .

$$|TU|^2 = |1 - \cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2 = [1 - \cos(x-y)]^2 + [\sin(x-y)]^2$$

$$|TU|^2 = 1 - 2\cos(x-y) + \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) = 1 - 2\cos(x-y) + 1$$

$$|TU|^2 = 2 - 2\cos(x-y) = 2[1 - \cos(x-y)]$$

Otočením soustavy souřadnic se nemůže změnit vzdálenost bodů  $T, U \Rightarrow$  obě vyjádření délky úsečky  $TU$  musí být shodné:  $2[1 - \cos(x - y)] = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$ .

$$1 - \cos(x - y) = 1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$  - jeden ze vzorců, které jsme si ukázali na začátku hodiny.

Odvození není zcela kompletní. Musíme ověřit případy, které jsme vynechali v našich předpokladech:

$$x > y, x, y \in (0; 2\pi).$$

**Ověření pro  $x = y, x, y \in (0; 2\pi)$  :** Dosadíme do odvozeného vzorce:  $x = y$  :

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x - x) = \cos x \cos x + \sin x \sin x$$

$$\cos 0 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 - \text{platí.}$$

**Ověření pro  $x < y, x, y \in (0; 2\pi)$  :**

$$\cos(x - y) = \cos[-(y - x)] = \cos(y - x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$$

Platí:  $\cos[-(y - x)] = \cos(y - x)$ , protože  $\cos x$  je sudá funkce.

**Ověření pro  $x, y \in R$  :**

Víme, že pro  $x, y \in R$  existují:  $x_0, y_0 \in (0; 2\pi)$  a  $k, m \in Z$ , tak, že platí:

$$x = x_0 + k \cdot 2\pi, y = y_0 + m \cdot 2\pi$$

Dosadíme do obou stran vzorce (využijeme periodičnost funkcí  $y = \sin x$  a  $y = \cos x$ ):

$$\cos(x - y) = \cos[x_0 + k \cdot 2\pi - (y_0 + m \cdot 2\pi)] = \cos[x_0 - y_0 + (k - m) \cdot 2\pi] = \cos(x_0 - y_0)$$

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y =$$

$$\cos(x_0 + k \cdot 2\pi) \cos(y_0 + m \cdot 2\pi) + \sin(x_0 + k \cdot 2\pi) \sin(y_0 + m \cdot 2\pi) =$$

$$\cos x_0 \cos y_0 + \sin x_0 \sin y_0$$

**Odvození vztahu  $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$  :**

$$\text{Platí: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.$$

$$\text{Platí: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{ (předchozí vztah).}$$

$$\sin(x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + y)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right] = \cos x \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y =$$

$$= \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Ostatní vzorce jsme z nyní získaných odvodili již v začátku hodiny pomocí přezávorkování a sudosti a lichosti goniometrických funkcí.

**Shrnutí:** Rozkládat výrazy uvnitř goniometrických funkcí můžeme pouze pomocí goniometrických vzorců.