4.3.8 Součtové vzorce I

Předpoklady: 040307

Pedagogická poznámka: Z hodiny probíráme většinou pouze první část (k důkazu), zbytek využíváme na písemku.

Pedagogická poznámka: Úspěch této hodiny (a hodin následujících) je zcela závislý na míře, ve které studenti chápou dosazování do vzorce jako používání předem připravené formy, ve které označení proměnných (typicky *x*, *y*) nesouvisí s označením proměnných v řešeném příkladě (a proto se může stát, že *x* je *y*). Pokud narazíte na problémy, je dobré si ověřit, zda této skutečnosti žák rozumí a v případě potřeby mu ujasnit samotný princip.

Závorku ve výrazu $\sin(x+y)$ není možné jen tak roznásobit ani rozdělit:

$$0=\sin(\pi)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\neq\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2.$$

Způsob, jakým goniometrické funkce vyrábějí ze zadaných čísel hodnoty, sice známe, ale je tak neprůhledný, že není možné používat závorkové úpravy na výrazy uvnitř funkcí $\Rightarrow$ hodnotu goniometrické funkce musíme počítat z čísla $(x+y)$ a na úpravy výrazu můžeme použít pouze odvozené goniometrické vzorce.

Pedagogická poznámka: Smyslem červeného rámečku je vytvořit (upevnit) ve žácích vědomí, že sin před závorkou není další proměnnou ale příkazem k poměrně složité přeměně úhlu uvnitř na poměr. Podstatná část žáků tuto skutečnost ignoruje a to pak ústí do mnoha zbytečných chyb.

Vzorců je hodně, patří do několika skupin – první skupinu tvoří **součtové vzorce**.
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí: $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ **.**

Př. 1: Dokaž platnost vztahu $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\cos x\sin\frac{\pi}{2}=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

Př. 2: Využij vztah pro $\sin(x+y)$ k odvození vzorce pro $\sin(x-y)$.

$\sin(x-y)=\sin[x+(-y)]=\sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$.

Podobné vzorce můžeme odvodit i pro funkci $\cos x$.

Součtové vzorce:
Pro všechna reálná čísla *x*, *y* platí:

- $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
- $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
- $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
- $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

Pedagogická poznámka: Nepožaduji po studentech, aby vzorce uměli nazpaměť. Součtové vzorce (stejně jako vzorce, probírané v následujících hodinách) si mohou napsat na speciální papír, který mohou kromě hodin používat i při psaní písemek.

Pedagogická poznámka: Odvození součtových vzorců pro $\sin(x+y)$ a $\cos(x+y)$ v hodinách neprovádím. Je uvedeno na konci hodiny pro zájemce.

Př. 3: Dokaž platnost vztahu $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Použijeme vzorec $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, abychom odstranili závorku na pravé straně rovnosti, dosazujeme $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\sin\frac{\pi}{2}=\cos x\cdot 0+\sin x\cdot 1=\sin x$$

Př. 4: Zjednoduš výraz: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\sin\frac{\pi}{6}=2\sin x\frac{1}{2}=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Některým studentů dělá problémy pochopit, že za *y* ve při rozkladu $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ dosazujeme *x*. Většina z nich má problém s celou filozofií dosazování do vzorce.

Př. 5: Dokaž rovnost: $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\cos x\cdot\frac{2}{2}+\sin x\cdot\frac{2}{2}=\sin x+\cos x$$

Př. 6: Dokaž rovnost: $\sin x=\sin(\pi-x)=-\sin(\pi+x)=-\sin(2\pi-x)$

$$\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\cos\pi\sin x=0\cdot\cos x-(-1)\sin x=\sin x$$

$$-\sin(\pi+x)=-(\sin\pi\cos x+\cos\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x+(-1)\sin x)=\sin x$$

$$-\sin(2\pi-x)=-(\sin 2\pi\cos x-\cos 2\pi\sin x)=-(0\cdot\cos x-1\cdot\sin x)=\sin x$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad slouží k synchronizaci třídy. Pokud učím hodinu ve formátu polovina + celá, zde končím v té počáteční polovině.

Př. 7: Petáková:
strana 47, cvičení 56 d), e)
strana 47, cvičení 57 b), d), h) , l)

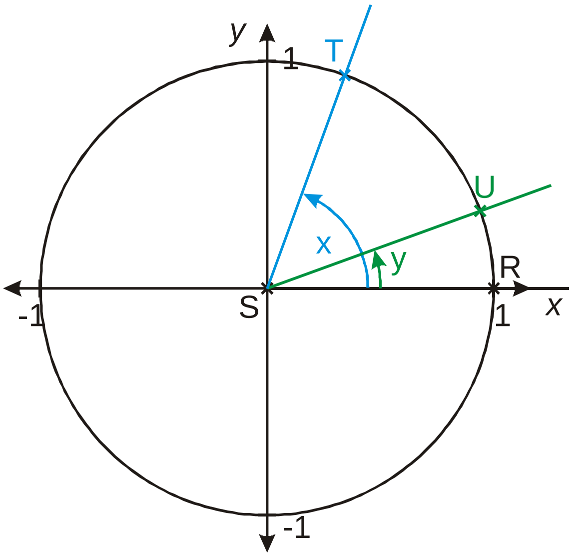
Pedagogická poznámka: Následující odvození o hodinách vynechávám, učebnice ho obsahuje pouze kvůli případným zájemcům, přesto je odvození psáno stylem, který v učebnici používám pro vysvětlování normální látky, aby v důležitých místech studenti získali čas a námět na zamyšlení.

Pedagogická poznámka: V podstatě sledujeme odvození z učebnice Goniometrie: Odvárko, Prometheus.

Odvození součtových vzorců

K odvození součtových vzorců použijeme jednotkovou kružnici.

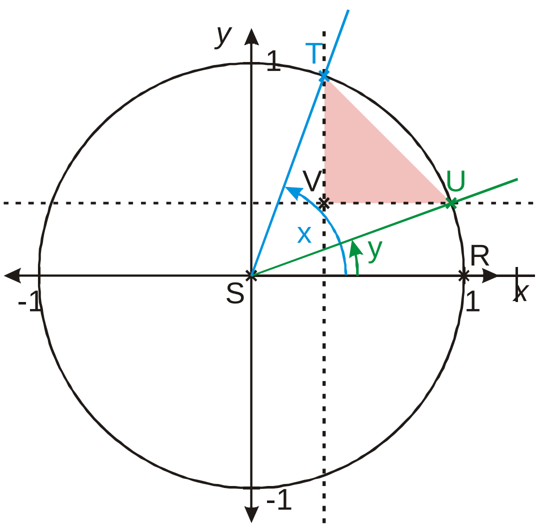
Zakreslíme do obrázku jednotkové kružnice dva orientované úhly $x=\widehat{RST}$, $y=\widehat{RSU}$, tak aby platilo $x>y$.

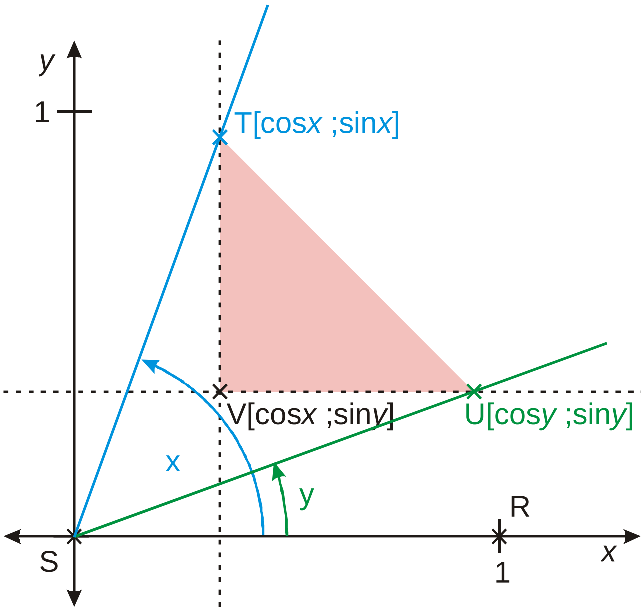


Př. 8: Urči souřadnice bodů R, T, U souřadné soustavě Sxy.

Platí: $R[1;0]$, $T[\cos x, \sin x]$, $U[\cos y, \sin y]$.

Bodem T vedeme rovnoběžku s osou x, bodem U rovnoběžku s osou x. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník TUV.





Př. 9: Urči délky stran trojúhelníku TUV.

Z obrázku vidíme: $|VU| = |\cos x - \cos y|$, $|TV| = |\sin x - \sin y|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

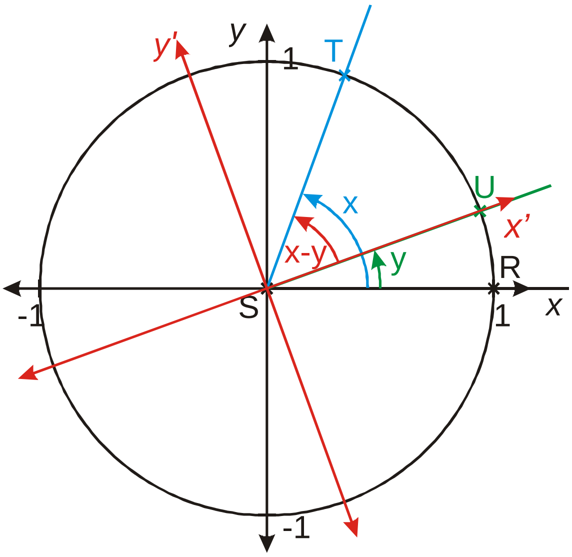
$$|TU|^2 = |\cos x - \cos y|^2 + |\sin x - \sin y|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$|TU|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 y + \sin^2 y - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y$$

$$|TU|^2 = 1 + 1 - 2\cos x \cos y - 2\sin x \sin y = 2(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

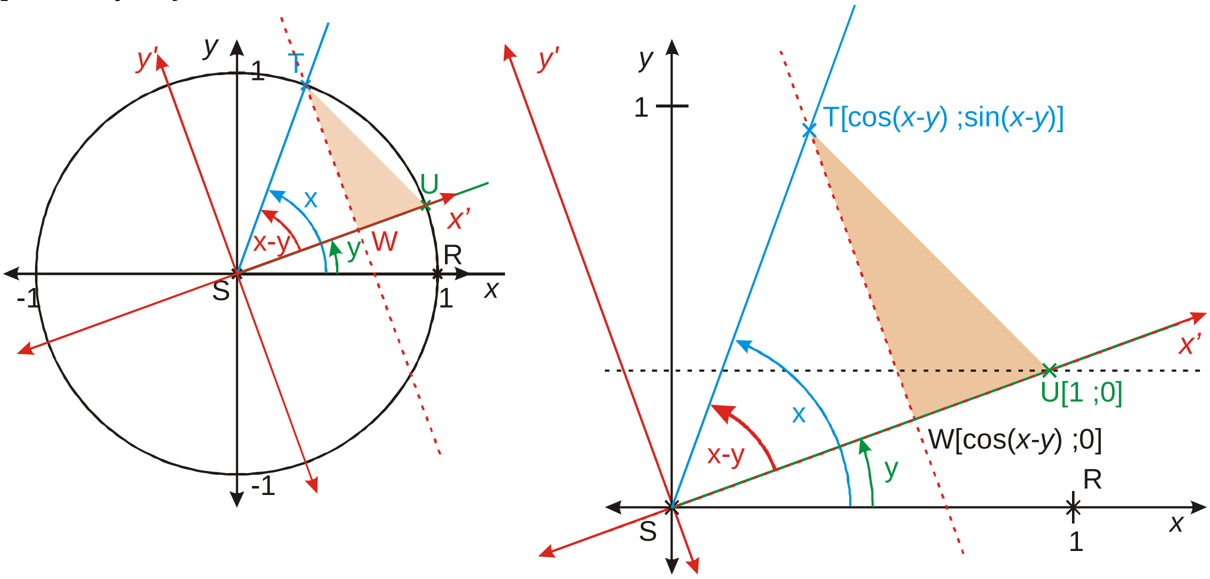
Nyní zopakujeme celý postup vzhledem k nové soustavě souřadnic $Sx'y'$, kterou získáme otočením soustavy Sxy o úhel $y = \widehat{RSU}$.



Př. 10: Urči souřadnice bodů T, U souřadné soustavě $Sx'y'$.

Platí: $T\left[\cos(x-y),\sin(x-y)\right]$, $U[1,0]$.

Bodem T vedeme rovnoběžku s osou y', bodem U rovnoběžku s osou x'. Vznikne tak pravoúhlý trojúhelník TUW.



Př. 11: Urči délky stran trojúhelníku TUW.

Z obrázku vidíme: $|WU| = |1-\cos(x-y)|$, $|TW| = |\sin(x-y)|$.

Délku přepony určíme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$.

$$|TU|^2 = |1-\cos(x-y)|^2 + |\sin(x-y)|^2 = \left[1-\cos(x-y)\right]^2 + \left[\sin(x-y)\right]^2$$

$$|TU|^2 = 1 - 2\cos(x-y) + \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) = 1 - 2\cos(x-y) + 1$$

$$|TU|^2 = 2 - 2\cos(x-y) = 2\left[1-\cos(x-y)\right]$$

Otočením soustavy souřadnic se nemůže změnit vzdálenost bodů T, U $\Rightarrow$ obě vyjádření délky úsečky TU musí být shodné: $2\left[1-\cos\left(x-y\right)\right]=2\left(1-\cos x\cos y-\sin x\sin y\right)$.

$1-\cos\left(x-y\right)=1-\cos x\cos y-\sin x\sin y$

$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ - jeden ze vzorců, které jsme si ukázali na začátku hodiny.

Odvození není zcela kompletní. Musíme ověřit případy, které jsme vynechali v našich předpokladech:
$x>y$, $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$.

Ověření pro $x=y$**,** $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$**:** Dosadíme do odvozeného vzorce: $x=y$:

$\cos\left(x-y\right)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\cos\left(x-x\right)=\cos x\cos x+\sin x\sin x$

$\cos 0=\cos^2 x+\sin^2 x=1$ - platí.

Ověření pro $x<y$**,** $x,y\in\left\langle 0;2\pi\right)$ **:**

$\cos\left(x-y\right)=\cos\left[-\left(y-x\right)\right]=\cos\left(y-x\right)=\cos y\cos x+\sin y\sin x$

Platí: $\cos\left[-\left(y-x\right)\right]=\cos\left(y-x\right)$, protože $\cos x$ je sudá funkce.

Ověření pro $x,y\in R$ **:**

Víme, že pro $x,y\in R$ existují: $x_0,y_0\in\left\langle 0;2\pi\right)$ a $k,m\in Z$, tak, že platí:

$x=x_0+k\cdot 2\pi$, $y=y_0+m\cdot 2\pi$

Dosadíme do obou stran vzorce (využijeme periodičnost funkcí $y=\sin x$ a $y=\cos x$):

$\cos\left(x-y\right)=\cos\left[x_0+k\cdot 2\pi-\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)\right]=\cos\left[x_0-y_0+\left(k-m\right)\cdot 2\pi\right]=\cos\left(x_0-y_0\right)$

$\cos x\cos y+\sin x\sin y=$

$\cos\left(x_0+k\cdot 2\pi\right)\cos\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)+\sin\left(x_0+k\cdot 2\pi\right)\sin\left(y_0+m\cdot 2\pi\right)=$

$\cos x_0\cos y_0+\sin x_0\sin y_0$

Odvození vztahu $\sin\left(x+y\right)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ **:**

Platí: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{2}\sin x=0\cdot\cos x+1\cdot\sin x=\sin x$.

Platí: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ (předchozí vztah).

$\sin\left(x+y\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x+y\right)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right]=\cos x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y=$

$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

Ostatní vzorce jsme z nyní získaných odvodili již v začátku hodiny pomocí přezávorkování a sudosti a lichosti goniometrických funkcí.

Shrnutí: Rozkládat výrazy uvnitř goniometrických funkcí můžeme pouze pomocí goniometrických vzorců.