4.3.9 Vzorce pro dvojnásobný úhel II

Předpoklady: 4308

Př. 1: Urči definiční obor výrazů a zjednoduš je.

a) $\left(\sin x+\cos x\right)^2-\sin 2x$ b) $\dfrac{\sin 2x+2\cos^2 x\sin x}{2\cos x+\cos 2x+1}$

a) $\left(\sin x+\cos x\right)^2-\sin 2x$

$x\in R$

$\left(\sin x+\cos x\right)^2-\sin 2x=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

b) $\dfrac{\sin 2x+2\cos^2 x\sin x}{2\cos x+\cos 2x+1}$

Zlomek $\Rightarrow$ nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ výraz je příliš složitý, počkáme na stav po úpravách.

$$\frac{\sin 2x+2\cos^2 x\sin x}{2\cos x+\cos 2x+1}=\frac{2\sin x\cos x+2\cos^2 x\sin x}{2\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{2\sin x\cos x\left(1+\cos x\right)}{2\cos x+2\cos^2 x}=$$

$$=\frac{2\sin x\cos x\left(1+\cos x\right)}{2\cos x\left(1+\cos x\right)}=\sin x$$

Čitatel zlomku před krácením: $2\cos x\left(1+\cos x\right)\Rightarrow$

- $\cos x\neq 0\Rightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$
- $1+\cos x\neq 0\Rightarrow\cos x\neq -1\Rightarrow x\neq\pi+k\cdot 2\pi$

$\Rightarrow x\in R-\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi;\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

Pedagogická poznámka: U druhého příkladu potřebuje většina studentů trochu popostrčit.

Př. 2: Vyřeš rovnici $\sin x-\sin 2x=0$.

Problém: Uvnitř každého sinu je jiné číslo $\Rightarrow$ použijeme vzorec pro $\sin 2x$ a pak dořešíme.

$\sin x-\sin 2x=0$

$\sin x-2\sin x\cos x=0$

$\sin x\left(1-2\cos x\right)=0$

Součinový tvar:

$\sin x=0$

$K_1=\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{0+k\cdot\pi\right\}$

$\left(1-2\cos x\right)=0$

$2\cos x=1$

$\cos x=\dfrac{1}{2}$

$K_2=\bigcup\limits_{k\in Z}\left\{\dfrac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi;\dfrac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ k \cdot \pi ; \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi ; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

Problém: Na levé straně součin $\sin x$ a $\cos x$, vpravo není nula $\Rightarrow$ nejde na součinový tvar.
Nápad: Vlevo je téměř celý vzorec pro $\sin 2x$ $\Rightarrow$ zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat rovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \quad / \cdot 2$

$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}$ (použijeme $2 \sin x \cos x = \sin 2x$)

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

Substituce: $a = 2x$

$\sin a = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$a_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

Návrat k původní proměnné:

$2x_1 = a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad / : 2$

$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$

$K_1 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \right\}$

$2x_2 = a_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 2$

$x_2 = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

$K_2 = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \right\}$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi ; \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \right\}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyžaduje pomoc učitele u tabule. Jde o nový přístup, proto je dobré před ním třídu synchronizovat.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\cos 2x + \cos x = 0$.

Problém: Uvnitř každého cosinu je jiné číslo $\Rightarrow$ použijeme vzorec pro $\cos 2x$ a pak dořešíme.

$\cos 2x + \cos x = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$

$\cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) + \cos x = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Substituce: $y = \cos x$

$2y^2+y-1=0$

$$y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 3}{4}$$

$y_1=\frac{-1-3}{4}=-1$ $\qquad$ $y_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=\cos x_1=-1$

$K_1=\bigcup_{k\in Z}\{\pi+k\cdot 2\pi\}$

$y_2=\cos x_2=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ třetinové úhly v kladné polorovině osy x

$x_2=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi$, $x_3=\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi$

$K_2=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\pi+k\cdot 2\pi;\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi;\frac{5}{3}\pi+k\cdot 2\pi\right\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\sin 6x+2\cos^2 3x=0$.

Problém: Uvnitř obou funkcí je jiné číslo, navíc obě čísla jsou poměrně velká (nemáme na ně vzorce) $\Rightarrow$ substituce.

Substituce: $y=3x$

$\sin 2y+2\cos^2 y=0$ $\Rightarrow$ teď můžeme použít vzorec $\sin 2y=2\sin y\cos y$.

$2\sin y\cos y+2\cos^2 y=0 \qquad /:2$

$\sin y\cos y+\cos^2 y=0$

$\cos y(\sin y+\cos y)=0$ $\Rightarrow$ součinový tvar.

$\cos y=0$

$y_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$\sin y+\cos y=0$

$\sin y=-\cos y \qquad /:\cos y$ v této větvi $\cos y\neq 0$

$\frac{\sin y}{\cos y}=\operatorname{tg} y=-1$

$y_2=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y_1=3x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$3x_1=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \qquad /:3$

$x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3}$

$y_2=3x_2=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$

$3x_2=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi \qquad /:3$

$x_2=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{3}$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{3}\right\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4\cos 2x$.

Problém: Různé funkce, různé výrazy uvnitř funkcí $\Rightarrow$ přepíšeme $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pomocí $\sin x$ a $\cos x$.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4\cos 2x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 4\cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos x \sin x} = 4\cos 2x$$ (jmenovatel zlomku připomíná $\sin 2x = 2\sin x \cos x$)

$1 = 2\cos 2x \cdot 2\sin x \cos x$

$1 = 2\cos 2x \cdot \sin 2x$ (vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ použijeme ještě jednou)

$1 = \sin 4x$

Substituce: $a = 4x$

$\sin a = 1$

$$a = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = 4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad / : 4$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $4\sin 2x \cos 2x > 1$.

Problém: Na pravé straně není nula $\Rightarrow$ nemůžeme řešit jako nerovnici v součinovém tvaru.
Nápad: Vlevo je téměř celý vzorec pro $\sin 2x$ (s dvojnásobným argumentem) $\Rightarrow$ zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat nerovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$4\sin 2x \cos 2x > 1 \quad / : 2$

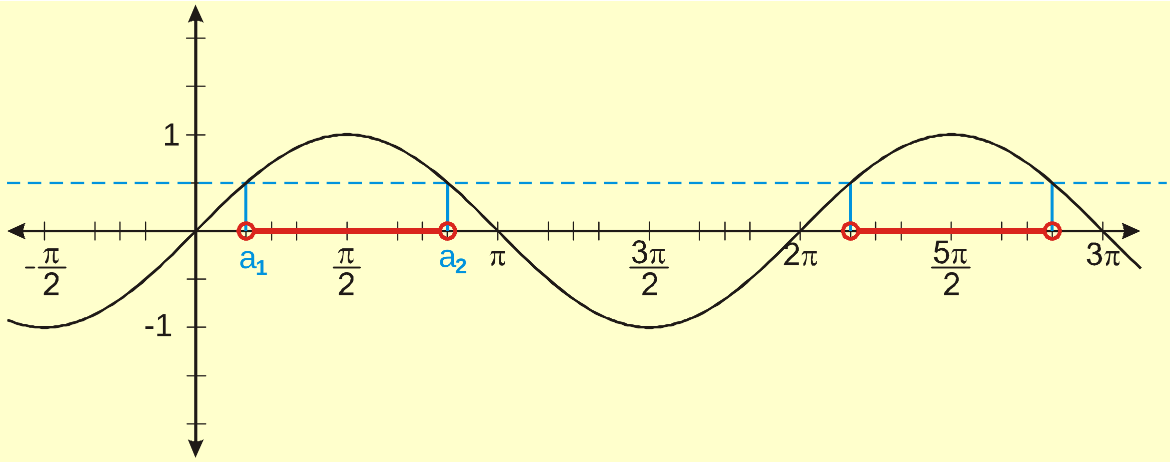
$$2\sin 2x \cos 2x > \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x > \frac{1}{2}$$

Substituce: $a = 4x$

$$\sin a > \frac{1}{2}$$

Základní řešení rovnice $\sin a = \frac{1}{2}$: $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $a_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{6};\frac{5}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi;\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$a_1=4x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$

$4x_1=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \quad /:4$

$x_1=\frac{\pi}{24}+k\cdot\frac{\pi}{2}$

$a_2=4x_2=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi$

$4x_2=\frac{5}{6}\pi+k\cdot 2\pi \quad /:4$

$x_2=\frac{5}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left(\frac{\pi}{24}+k\cdot\frac{\pi}{2};\frac{5}{24}\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

Př. 8: Vyřeš nerovnici $\cos^2 x-\sin^2 x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Na první pohled jasné řešení: $\cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$2\cos^2 x\le 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ problém číslo na pravé straně po odmocnění nebude patřit mezi tabulkové hodnoty $\Rightarrow$ budeme muset používat arccos $\Rightarrow$ zkusíme se vrátit k původnímu zadání: $\cos^2 x-\sin^2 x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

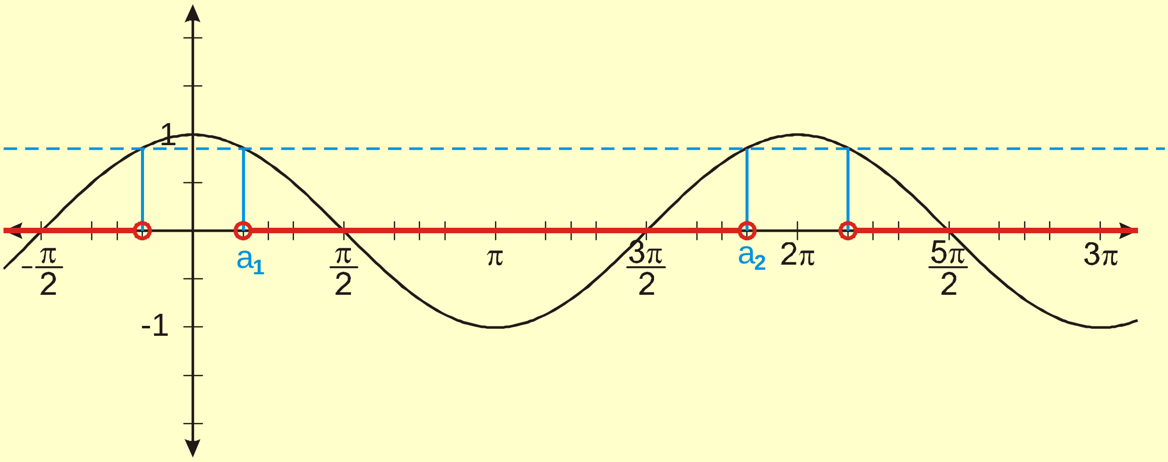
Nápad: Levá strana tvoří vzorec $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

$\cos 2x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ trivialitka.

Substituce: $a=2x$.

$\cos a\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

Základní řešení rovnice $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $a_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ (šestinové úhly v kladné polorovině *x*).



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in Z} \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$a_1 = 2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad / : 2$

$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$

$a_2 = 2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad / : 2$

$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$

$$K = \bigcup_{k \in Z} \left(\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi; \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi\right)$$

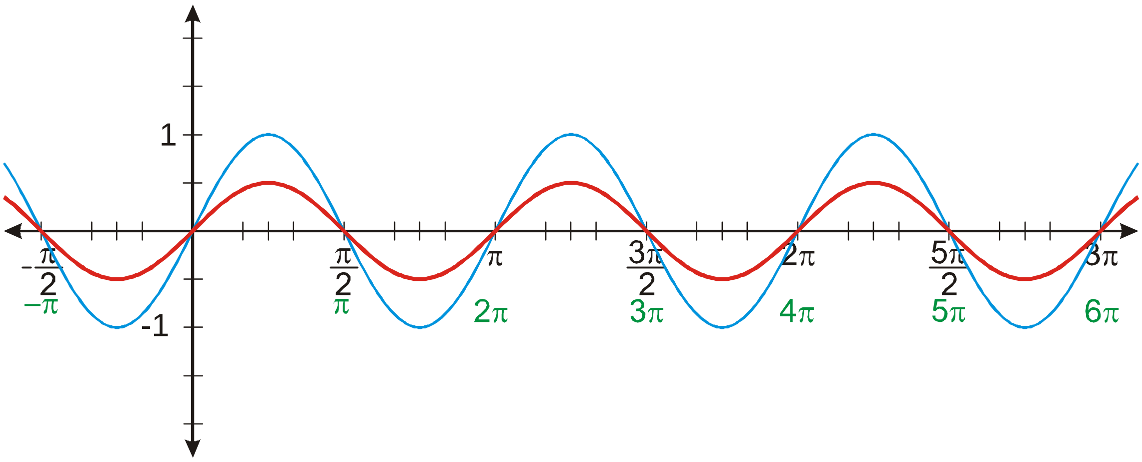
Př. 9: Nakresli graf funkce $y = \sin x \cos x$.

Problém: Funkce vznikla jako součin dvou goniometrických funkcí $\Rightarrow$ museli bychom nakreslit oba grafy a „násobit“ je mezi sebou.
Postřeh: Předpis funkce připomíná vzorec $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, funkci $y = \sin 2x$ bych nakreslil snadno.

$y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow$ kreslíme graf funkce $y = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Platí: $y = \frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2} f(2x)$

Zvolíme x.
Vypočteme $2x$.
Nakreslíme funkci $y = f(2x) = \sin(2x)$.
Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.



Př. 10: Petáková:
strana 46, cvičení 53 d), g), l)
strana 53, cvičení 13 d)
strana 53, cvičení 14 a), d)
strana 53, cvičení 15 a), d), g)
strana 53, cvičení 16 c)
strana 54, cvičení 17 d), f), g)
strana 54, cvičení 18 a)
strana 54, cvičení 19 d)

Shrnutí: