

4.3.11 Vzorce pro poloviční úhel

Předpoklady: 4309

Chceme získat vzorce pro poloviční úhel \Rightarrow vyjdeme ze vzorců pro dvojnásobný úhel:

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Výhodnější je vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, obsahuje obě funkce $\sin x$ a $\cos x$ ve druhé mocnině (tedy snadno převoditelné jednu na druhou).

Změníme proměnnou: $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y$ a pomocí substituce $y = \frac{x}{2}$ získáme poloviční

hodnotu: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Chceme vzorec pro $\sin \frac{x}{2} \Rightarrow$ nahradíme $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\sqrt{\sin^2 \frac{x}{2}} = \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (\text{první vzorec pro poloviční úhel})$$

Vada na kráse: Nejistíme přímo hodnotu sinu, ale pouze absolutní hodnotu \Rightarrow znaménko musíme zjistit někde jinde.

Př. 1: Odvod' analogicky vzorec pro $\left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

Začneme u rovnice: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$.

Chceme vzorec pro $\cos \frac{x}{2} \Rightarrow$ nahradíme $\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos^2 \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \Rightarrow \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (\text{opět jsme nezískali znaménko})$$

Pedagogická poznámka: Část studentů si špatně vyloží podstatu postupu a začne vzorec pro $\cos \frac{x}{2}$ odvozovat ze vzorce $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Př. 2: Odvod' vzorec pro $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$.

Stačí si uvědomit, že vždy platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, pak platí i $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$.

$$\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}} = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

Vzorce pro poloviční úhel:

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 + \cos x}}$$

Př. 3: Urči přesnou hodnotu $\sin \frac{\pi}{8}$.

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Rightarrow \left| \sin \frac{\pi}{8} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\frac{\pi}{8} \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right), \text{ kde platí } \sin x > 0 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Př. 4: Urči přesnou hodnotu $\cos 15^\circ$.

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \Rightarrow \left| \cos 15^\circ \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$15^\circ \in (0; 90^\circ), \text{ kde platí } \cos x > 0 \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

Pomocí vzorců pro hodnoty polovičního úhlu můžeme zahušřovat tabulku hodnot.

Př. 5: Urči přesnou hodnotu $\cos 195^\circ$.

Musíme zjistit, z jakého úhlu budeme počítat: $195 \cdot 2 = 390 = 360 + 30 \Rightarrow \cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \Rightarrow |\cos 15^\circ| = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$195^\circ \in (180^\circ; 270^\circ)$, kde platí $\cos x < 0 \Rightarrow \cos 195^\circ = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$.

Pedagogická poznámka: Největší problémy budou s pochopením, že $360 + 30 \Rightarrow$

$\cos 390^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Objevují se zápisy jako $\cos 390^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$, které svědčí o nerozlišování úhlu a hodnot goniometrické funkce (poměru stran).

Př. 6: Urči definiční obor a uprav výraz $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

- $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, musí platit $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$,
 - jmenovatel zlomku je vždy kladný (součet jedničky a druhé mocniny),
- $\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi + k \cdot 2\pi\}$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \\ &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = \sin x \end{aligned}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} - \sin x = 0$.

Problém: Rozdílné argumenty u obou sinů.

Pokus: Použijeme vzorec pro poloviční úhel $\Rightarrow \sqrt{3} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} - \sin x = 0 \Rightarrow$ žádné velké zlepšení: odmocnina v rovnici, obě goniometrické funkce bez druhých mocnin (špatně převoditelné navzájem) a hlavně v rovnici bylo $\sin \frac{x}{2}$, místo kterého jsme dosadili $\left| \sin \frac{x}{2} \right|$.

Leptší řešení: substituce $\frac{x}{2} = y$. Použijeme pak vzorce pro dvojnásobný úhel, které neobsahují odmocniny.

$$\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} - \sin x = 0$$

Substituce: $y = \frac{x}{2}$.

$$\sqrt{3} \sin y - \sin 2y = 0$$

$$\sqrt{3} \sin y - 2 \sin y \cos y = 0$$

$$\sin y (\sqrt{3} - 2 \cos y) = 0$$

Součinový tvar:

$$\sin y = 0$$

$$y_1 = 0 + k \cdot \pi$$

$$(\sqrt{3} - 2 \cos y) = 0$$

$$\sqrt{3} = 2 \cos y$$

$$\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$y_3 = \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \frac{x_1}{2} = 0 + k \cdot \pi$$

$$y_2 = \frac{x_2}{2} = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$y_3 = \frac{x_3}{2} = \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$\frac{x_1}{2} = 0 + k \cdot \pi \quad / \cdot 2$$

$$\frac{x_2}{2} = \frac{1}{6} \pi + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$$

$$\frac{x_3}{2} = \frac{11}{6} \pi + k \cdot 2\pi \quad / \cdot 2$$

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \pi + k \cdot 4\pi$$

$$x_3 = \frac{11}{3} \pi + k \cdot 4\pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot 2\pi; \frac{1}{3} \pi + k \cdot 4\pi; \frac{11}{3} \pi + k \cdot 4\pi \right\}$$

Dodatek: Vzorce pro poloviční úhel se nepoužívají k řešení rovnic a nerovnic, protože do zanáší odmocniny a nutnost umocňování (a dělení zkoušek). Místo nich se používá substituce na dvojnásobný úhel, který se odstraní vzorci pro dvojnásobný úhel.

Př. 8: Urči definiční obor rovnosti $\frac{\cos^2 x}{\cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin 2x$ a pak dokaž její platnost:

a) použitím vzorců pro poloviční úhel,

b) substitucí $y = \frac{x}{2}$ a použitím vzorců pro dvojnásobný úhel.

Který z obou postupů je korektnější?

- $\tg \frac{x}{2}$, musí platit $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$
- $\cotg \frac{x}{2}$, musí platit $\frac{x}{2} \neq k \cdot \pi \Rightarrow x \neq k \cdot 2\pi$

- jmenovatel zlomku je nenulový $\Rightarrow \cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \cotg \frac{x}{2} = \tg \frac{x}{2} \Rightarrow \tg \frac{x}{2} \neq \pm 1$
 $\Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \frac{\pi}{2} \right\} \text{ (všechny tři skupiny zapsány pohromadě).}$$

$$\text{a) } \frac{\cos^2 x}{\cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}} - \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}} = \frac{1}{4} \sin 2x = \frac{1}{4} 2 \sin x \cos x$$

$$\frac{\cos^2 x}{(\sqrt{1+\cos x})^2 - (\sqrt{1-\cos x})^2} = \frac{1}{2} \sin x \cos x \quad /: \cos x$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}}$$

$$\frac{\cos x}{1 + \cos x - (1 - \cos x)} = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{(1+\cos x)(1-\cos x)}}$$

$$\frac{\cos x}{2 \cos x} = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sin x$$

$$\sin x = \sin x$$

$$\text{b) } \frac{\cos^2 x}{\cotg \frac{x}{2} - \tg \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \sin 2x \Rightarrow \frac{\cos^2 2y}{\cotg y - \tg y} = \frac{1}{4} \sin 4y$$

$$\frac{\cos^2 2y}{\cos y - \sin y} = \frac{1}{4} 2 \sin 2y \cos 2y \quad /: \cos 2y$$

$$\frac{\cos 2y}{\sin y - \cos y}$$

$$\frac{\cos 2y}{\cos^2 y - \sin^2 y} = \frac{1}{2} \sin 2y$$

$$\frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y - \sin^2 y} = \frac{1}{2} 2 \sin y \cos y$$

$$\frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y - \sin^2 y} = \frac{1}{2} 2 \sin y \cos y$$

$$\sin y \cos y = \sin y \cos y$$

$$\sin y \cos y = \sin y \cos y$$

Druhý postup je korektnější, nemusíme řešit problémy se znamínky a odmocninami ve vzorcích (při úpravách v bodě a) jsme je taktně zamlčeli).

Př. 9: Urči přesnou hodnotu $\sin \frac{\pi}{16}$. Ověř na kalkulačce, zda hodnota získaného výrazu odpovídá hodnotě vypočtené kalkulačkou jako $\sin \frac{\pi}{16}$.

Platí: $\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4}$, $\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Rightarrow$ musíme určit $\cos \frac{\pi}{8}$.

$\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{16} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, kde platí $\sin x > 0$, $\cos x > 0 \Rightarrow$ všechny získané hodnoty jsou kladné.

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \Rightarrow \left| \cos \frac{\pi}{8} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \Rightarrow \left| \sin \frac{\pi}{16} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{8}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$$

Kalkulačka: $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} = 0,195090322$, $\sin \frac{\pi}{16} = 0,195090322$.

Pro zajímavost: $\frac{\pi}{16} = 0,19634954 \Rightarrow$ pro malá čísla se hodnoty funkce $y = \sin x$ blíží hodnotám funkce $y = x$.

Pedagogická poznámka: Nejčastějším problémem je zadání výrazu do kalkulačky a přepínání mezi stupni a radiány.

Př. 10: Petáková:

- strana 48, cvičení 66 a)
- strana 48, cvičení 69 c)
- strana 48, cvičení 70 a)
- strana 54, cvičení 20 b), e)

Shrnutí: Vzorce pro poloviční úhly obsahují odmocniny a proto se substitucí vyhýbáme jejich používání při řešení rovnic.