

4.3.9 Vzorce pro dvojnásobný úhel II

Předpoklady: 4308

Př. 1: Urči definiční obor výrazů a zjednoduš je.

a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$ b) $\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$

a) $(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x$

$x \in \mathbb{R}$

$$(\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

b) $\frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1}$

Zlomek \Rightarrow nesmíme dělit nulou \Rightarrow výraz je příliš složitý, počkáme na stav po úpravách.

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos 2x + 1} &= \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x \sin x}{2 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos x)}{2 \cos x + 2 \cos^2 x} = \\ &= \frac{2 \sin x \cos x (1 + \cos x)}{2 \cos x (1 + \cos x)} = \sin x \end{aligned}$$

Čitatel zlomku před krácením: $2 \cos x (1 + \cos x) \Rightarrow$

- $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi; \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Pedagogická poznámka: U druhého příkladu potřebuje většina studentů trochu popostrčit.

Př. 2: Vyřeš rovnici $\sin x - \sin 2x = 0$.

Problém: Uvnitř každého sinu je jiné číslo \Rightarrow použijeme vzorec pro $\sin 2x$ a pak dořešíme.

$$\sin x - \sin 2x = 0$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

Součinný tvar:

$$\sin x = 0$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{0 + k \cdot \pi\}$$

$$(1 - 2 \cos x) = 0$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{3} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ k \cdot \pi; \frac{1}{3} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 3: Vyřeš rovnici $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.

Problém: Na levé straně součin $\sin x$ a $\cos x$, vpravo není nula \Rightarrow nejde na součinný tvar.

Nápad: Vlevo je téměř celý vzorec pro $\sin 2x \Rightarrow$ zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat rovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \quad /:2$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (\text{použijeme } 2 \sin x \cos x = \sin 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

Substitute: $a = 2x$

$$\sin a = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$2x_1 = a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$2x_2 = a_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$2x_2 = \frac{5}{6} \pi + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$x_2 = \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \right\}$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{12} \pi + k \cdot \pi; \frac{5}{12} \pi + k \cdot \pi \right\}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad vyžaduje pomoc učitele u tabule. Jde o nový přístup, proto je dobré před ním třídu synchronizovat.

Př. 4: Vyřeš rovnici $\cos 2x + \cos x = 0$.

Problém: Uvnitř každého cosinu je jiné číslo \Rightarrow použijeme vzorec pro $\cos 2x$ a pak dořešíme.

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

Substitute: $y = \cos x$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$y_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = \cos x_1 = -1$$

$$K_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{ \pi + k \cdot 2\pi \}$$

$y_2 = \cos x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ třetinové úhly v kladné polorovině osy x

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad x_3 = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$K_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\sin 6x + 2\cos^2 3x = 0$.

Problém: Uvnitř obou funkcí je jiné číslo, navíc obě čísla jsou poměrně velká (nemáme na ně vzorec) \Rightarrow substituce.

Substituce: $y = 3x$

$$\sin 2y + 2\cos^2 y = 0 \Rightarrow \text{teď můžeme použít vzorec } \sin 2y = 2\sin y \cos y.$$

$$2\sin y \cos y + 2\cos^2 y = 0 \quad /:2$$

$$\sin y \cos y + \cos^2 y = 0$$

$$\cos y (\sin y + \cos y) = 0 \Rightarrow \text{součinový tvar.}$$

$$\cos y = 0$$

$$y_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$\sin y + \cos y = 0$$

$$\sin y = -\cos y \quad /: \cos y \text{ v této větvi } \cos y \neq 0$$

$$\frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} y = -1$$

$$y_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$y_1 = 3x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$y_2 = 3x_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

$$3x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad /:3$$

$$3x_2 = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \quad /:3$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{3} \right\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 4 \cos 2x$.

Problém: Různé funkce, různé výrazy uvnitř funkcí \Rightarrow přepíšeme $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ pomocí $\sin x$ a $\cos x$.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4 \cos 2x$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = 4 \cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos x \sin x} = 4 \cos 2x \quad (\text{jmenovatel zlomku připomíná } \sin 2x = 2 \sin x \cos x)$$

$$1 = 2 \cos 2x \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$1 = 2 \cos 2x \cdot \sin 2x \quad (\text{vzorec } \sin 2x = 2 \sin x \cos x \text{ použijeme ještě jednou})$$

$$1 = \sin 4x$$

Substitute: $a = 4x$

$$\sin a = 1$$

$$a = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

Návrat k původní proměnné:

$$a = 4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad /:4$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $4 \sin 2x \cos 2x > 1$.

Problém: Na pravé straně není nula \Rightarrow nemůžeme řešit jako nerovnici v součinném tvaru.

Nápad: Vlevo je téměř celý vzorec pro $\sin 2x$ (s dvojnásobným argumentem) \Rightarrow zkusíme vzorec zkompletovat a tak získat nerovnici s jedinou goniometrickou funkcí.

$$4 \sin 2x \cos 2x > 1 \quad /:2$$

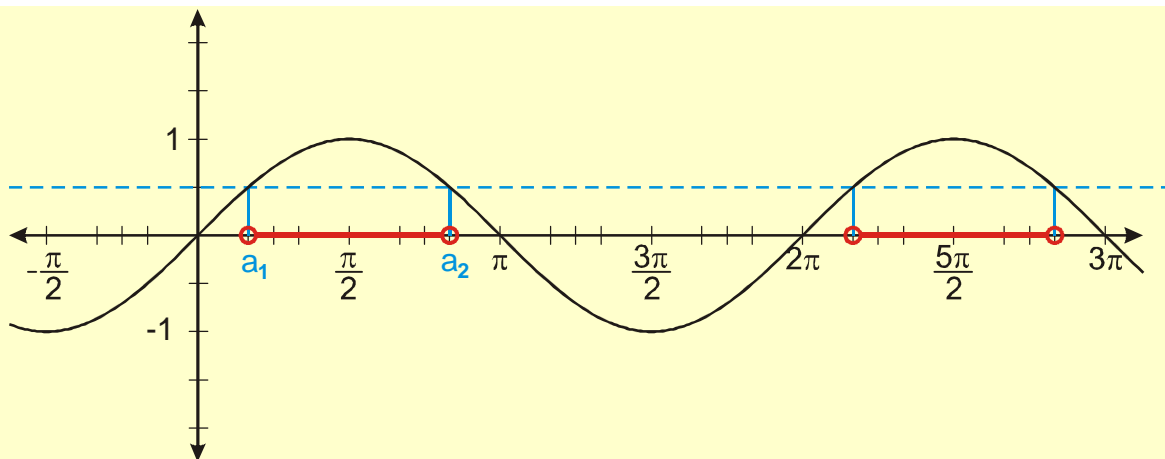
$$2 \sin 2x \cos 2x > \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x > \frac{1}{2}$$

Substitute: $a = 4x$

$$\sin a > \frac{1}{2}$$

Základní řešení rovnice $\sin a = \frac{1}{2}$: $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $a_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$.



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou

$$2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \right).$$

Návrat k původní proměnné: (přepočítáme meze a periodu intervalů)

$$a_1 = 4x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = 4x_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$4x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /:4$$

$$4x_2 = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:4$$

$$x_1 = \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x_2 = \frac{5}{24}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{5}{24}\pi + k \cdot \frac{\pi}{2} \right)$$

Př. 8: Vyřeš nerovnici $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Na první pohled jasné řešení: $\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$2 \cos^2 x \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ problém číslo na pravé straně po odmocnění nebude patřit mezi

tabulkové hodnoty \Rightarrow budeme muset používat arccos \Rightarrow zkusíme se vrátit k původnímu

zadání: $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

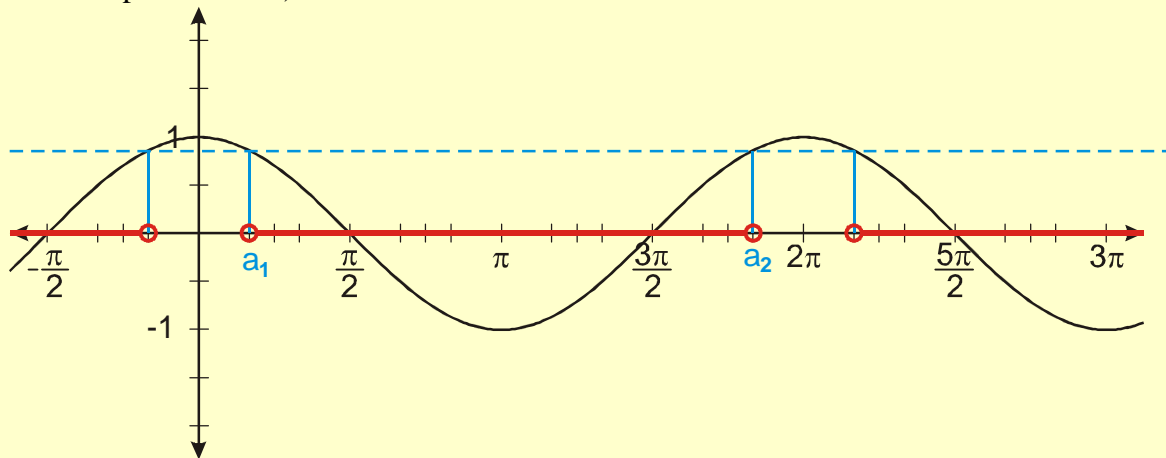
Nápad: Levá strana tvoří vzorec $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\cos 2x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{trivialitka.}$$

Substitute: $a = 2x$.

$$\cos a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Základní řešení rovnice $\cos a = \frac{\sqrt{3}}{2}$: $a_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, $a_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ (šestinové úhly v kladné polorovině x).



Řešením nerovnice jsou všechna čísla v intervalu $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right)$, hodnoty se opakují s periodou $2\pi \Rightarrow K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right)$.

Návrat k původní proměnné: (pře počítáme meze a periodu intervalů)

$$a_1 = 2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$a_2 = 2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$2x_2 = \frac{11}{6}\pi + k \cdot 2\pi \quad /:2$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$x_2 = \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi; \frac{11}{12}\pi + k \cdot \pi\right)$$

Př. 9: Nakresli graf funkce $y = \sin x \cos x$.

Problém: Funkce vznikla jako součin dvou goniometrických funkcí \Rightarrow museli bychom nakreslit oba grafy a „násobit“ je mezi sebou.

Postřeh: Předpis funkce připomíná vzorec $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, funkci $y = \sin 2x$ bych nakreslil snadno.

$$y = \sin x \cos x = \frac{1}{2} 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow \text{kreslíme graf funkce } y = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

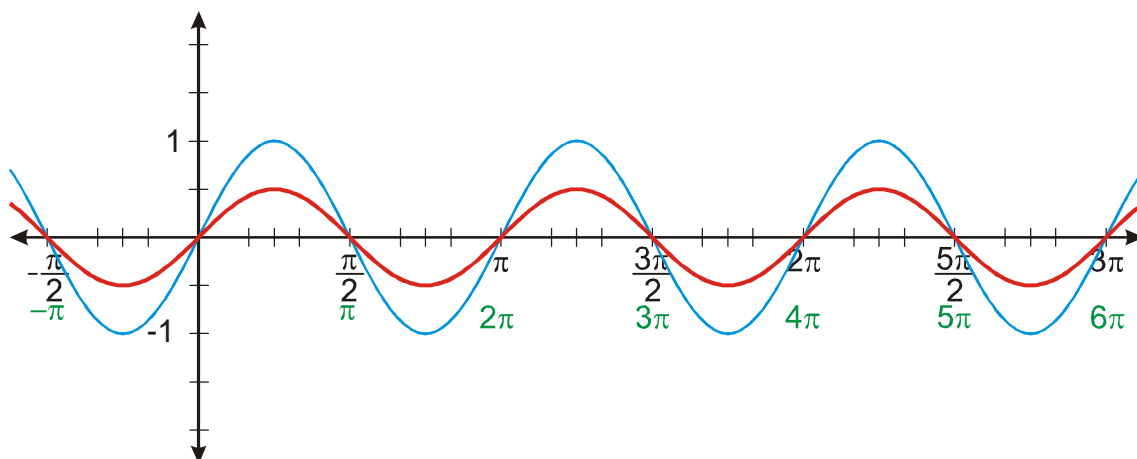
$$\text{Platí: } y = \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2} f(2x)$$

Zvolíme x .

Vypočteme $2x$.

Nakreslíme funkci $y = f(2x) = \sin(2x)$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{2} f(2x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.



Př. 10: Petáková:

- strana 46, cvičení 53 d), g), l)
- strana 53, cvičení 13 d)
- strana 53, cvičení 14 a), d)
- strana 53, cvičení 15 a), d), g)
- strana 53, cvičení 16 c)
- strana 54, cvičení 17 d), f), g)
- strana 54, cvičení 18 a)
- strana 54, cvičení 19 d)

Shrnutí: