4.3.11 Vzorce pro součet goniometrických funkcí

Předpoklady: 4310

Vzorce pro součet goniometrických funkcí:

- $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$
- $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$
- $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$

Na první pohled jsou vzorce k ničemu, protože na pravá strana vzorců je složitější než levá. Při řešení rovnic však mohou být velmi užitečné, protože převádějí součet na součin.

Př. 1: Uprav na součin výrazy.
a) $\sin 2x+\sin 4x$
b) $\cos 5a+\cos 3a$
c) $\sin 3x-\sin(x+\pi)$
d) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

a) $\sin 2x+\sin 4x=2\sin\frac{2x+4x}{2}\cdot\cos\frac{2x-4x}{2}=2\sin 3x\cdot\cos(-x)=2\sin 3x\cdot\cos x$

b) $\cos 5a+\cos 3a=2\cos\frac{5a+3a}{2}\cdot\cos\frac{5a-3a}{2}=2\cos\frac{8a}{2}\cdot\cos\frac{2a}{2}=2\cos 4a\cdot\cos a$

c)
$$\sin 3x-\sin(x+\pi)=2\cos\frac{3x+x+\pi}{2}\cdot\sin\frac{3x-x-\pi}{2}=2\cos\frac{4x+\pi}{2}\cdot\sin\frac{2x-\pi}{2}=$$
$$=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

d)
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}+3x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}-3x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=$$
$$-2\sin\left(\frac{4x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)=-2\sin 2x\cdot\left[-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Př. 2: Urči definiční obor výrazu $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ a pak jej zjednoduš využitím vzorců pro součet goniometrických funkcí.

Nesmíme dělit nulou $\Rightarrow$ $1+\cos x\neq 0$ $\Rightarrow$ $\cos x\neq -1$ $\Rightarrow$ $x\neq\pi+k\cdot 2\pi$
$\Rightarrow$ $x\in R-\bigcup_{k\in Z}\{\pi+k\cdot 2\pi\}$.

Problém: Vzorce pro součet goniometrických funkcí můžeme použít pouze v případě, že čitatel (jmenovatel) zlomku bude obsahovat součet (rozdíl) dvou stejných goniometrických funkcí $\Rightarrow$ místo 1 musí zlomky obsahovat hodnoty funkce $\cos x$ $\Rightarrow$ použijeme $1=\cos 0$.

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{\cos 0-\cos x}{\cos 0+\cos x}=\frac{-2\cdot\sin\frac{0+x}{2}\cdot\sin\frac{0-x}{2}}{2\cdot\cos\frac{0+x}{2}\cdot\cos\frac{0-x}{2}}=\frac{-2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\left(-\frac{x}{2}\right)}$$

Použijeme: $\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=-\sin\frac{x}{2}$ a $\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$.

$$=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$$

Př. 3: Vypočti.

a) $\sin 105°-\sin 15°$ b) $\dfrac{\cos 70°-\cos 10°}{\sin 70°+\sin 10°}$

a) $\sin 105°-\sin 15°$

Nejde o tabulkové hodnoty $\Rightarrow$ použijeme vzorce na součet goniometrických funkcí a budeme doufat, že vyjdou úhly, ke kterým známe hodnoty.

$$\sin 105°-\sin 15°=2\cdot\cos\frac{105°+15°}{2}\cdot\sin\frac{105°-15°}{2}=2\cos 60°\cdot\sin 45°=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $\dfrac{\cos 70°-\cos 10°}{\sin 70°-\sin 10°}$

$$\frac{\cos 70°-\cos 10°}{\sin 70°+\sin 10°}=\frac{-2\sin\frac{70°+10°}{2}\cdot\sin\frac{70°-10°}{2}}{2\sin\frac{70°+10°}{2}\cdot\cos\frac{70°-10°}{2}}=\frac{-2\sin 40°\cdot\sin 30°}{2\sin 40°\cdot\cos 30°}=-\operatorname{tg}30°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $\sin 5x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Problém: Uvnitř sinů jsou různé výrazy, rozložení pomocí součtových vzorců nepomůže $\Rightarrow$ převedeme vše na jednu stranu a rozložíme na součin pomocí vzorců pro součet funkcí $\Rightarrow$ rovnice v součinovém tvaru.

$$\sin 5x=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin 5x-\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$2\cos\left(\frac{5x+3x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0 \quad /:2$$

$$\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Součinový tvar:

$$\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Substituce: $4x-\frac{\pi}{4}=y$

$\cos y=0$

$y=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

Návrat k původní proměnné:

$y=4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$

$4x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \quad /+\frac{\pi}{4}$

$4x=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi \quad /:4$

$x=\frac{3}{16}\pi+k\cdot\frac{\pi}{4}$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Substituce: $x+\frac{\pi}{4}=a$

$\sin a=0$

$a=k\cdot\pi$

Návrat k původní proměnné:

$a=x+\frac{\pi}{4}=k\cdot\pi$

$x+\frac{\pi}{4}=k\cdot\pi \quad /-\frac{\pi}{4}$

$x=-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi=\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi$

$$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{3}{16}\pi+k\cdot\frac{\pi}{4};\frac{3}{4}\pi+k\cdot\pi\right\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnici $\sin 5x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Zkusíme převést oba členy na jednu stranu: $\sin 5x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$.

Problém: Máme pouze vzorce pro součet dvou stejných goniometrických funkcí $\Rightarrow$ potřebujeme, aby v rovnici byly pouze siny nebo cosiny.

Nápad: Platí: $\sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\Rightarrow$ upravíme vnitřek cosinu tak, abychom ho mohli přepsat na sinus $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\pi\right)$.

$\sin 5x-\sin\left(x-\pi\right)=0$ (použijeme vzorec $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}$)

$$2\cos\frac{5x+x-\pi}{2}\sin\frac{5x-\left(x-\pi\right)}{2}=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Součinový tvar:

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Substituce: $y=3x-\frac{\pi}{2}$

$\cos y=0$

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Substituce: $a=2x+\frac{\pi}{2}$

$\sin a=0$

$a=k\cdot\pi$

$y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Návrat k původní proměnné:

$y = 3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / + \frac{\pi}{2}$

$3x = \pi + k \cdot \pi \quad / : 3$

$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}$

Návrat k původní proměnné:

$a = 2x + \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi$

$2x + \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi \quad / - \frac{\pi}{2}$

$2x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / : 2$

$x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$

Př. 6: Vyřeš rovnici $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Problém: Vzorce pro součet dvou stejných goniometrických funkcí umožňují spojit pouze dva členy (v rovnici jsou tři) $\Rightarrow$ potřebujeme správně vybrat, které dva spojíme.

Vzorec: $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\Rightarrow$ potřebujeme, aby se člen, který vznikne z výrazu $\frac{x+y}{2}$ nebo $\frac{x-y}{2}$, rovnal členu uvnitř nepoužitého cosinu (kvůli vytýkání v dalším kroku) $\Rightarrow$ spojíme členy $\cos 3x$ a $\cos x$.

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$

$(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0$ (použijeme $\cos x + \cos y = 2\cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$)

$2\cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} + \cos 2x = 0$

$2\cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0$

$\cos 2x (2 \cdot \cos x + 1) = 0$

Součinový tvar:

$\cos 2x = 0$

Substituce: $y = 2x$

$\cos y = 0$

$y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

Návrat k původní proměnné:

$y = 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$

$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / : 2$

$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

$2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ třetinové úhly v záporné polorovině podle osy *x*.

$x_1 = \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$x_2 = \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi \right\}$

Pedagogická poznámka: Diskuse o tom, které dva členy vybrat do součtového vzorce, je nejzajímavější částí řešení příkladu. Je třeba, aby studenti pochopili, že volba není náhodná, naopak jde o poměrně jednoznačný důsledek dalšího potřebného kroku.

Vzorce pro součet goniometrických funkcí se odvozují ze součtových vzorců, na základě následujících rovností: $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$, $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$.

$$\sin x+\sin y=\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního sinu vzorec $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřek druhého sinu vzorec $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$:

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Př. 7: (BONUS) Odvoď vzorec pro $\cos x+\cos y$.

$$\cos x+\cos y=\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního cosinu vzorec $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$:

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřky druhého sinu vzorec $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$:

$$\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)=\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme: $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$.

Př. 8: Petáková:
strana 47, cvičení 60 a), e)
strana 54, cvičení 21 c), e)
strana 54, cvičení 22 a)

Shrnutí: Vzorce pro součet goniometrických funkcí jsou výhodné tím, že převádí součet na součin.