

### 4.3.13 Vzorce pro součet goniometrických funkcí

**Předpoklady:** 4310

#### Vzorce pro součet goniometrických funkcí:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

Na první pohled jsou vzorce k ničemu, protože na pravá strana vzorců je složitější než levá. Při řešení rovnic však mohou být velmi užitečné, protože převádějí součet na součin.

**Př. 1:** Uprav na součin výrazy.

a)  $\sin 2x + \sin 4x$

b)  $\cos 5a + \cos 3a$

c)  $\sin 3x - \sin(x + \pi)$

d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

a)  $\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin \frac{2x+4x}{2} \cdot \cos \frac{2x-4x}{2} = 2 \sin 3x \cdot \cos(-x) = 2 \sin 3x \cdot \cos x$

b)  $\cos 5a + \cos 3a = 2 \cos \frac{5a+3a}{2} \cdot \cos \frac{5a-3a}{2} = 2 \cos \frac{8a}{2} \cdot \cos \frac{2a}{2} = 2 \cos 4a \cdot \cos a$

$\sin 3x - \sin(x + \pi) = 2 \cos \frac{3x+x+\pi}{2} \cdot \sin \frac{3x-x-\pi}{2} = 2 \cos \frac{4x+\pi}{2} \cdot \sin \frac{2x-\pi}{2} =$

c)  $= 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} + 3x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - 3x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) =$

$-2 \sin\left(\frac{4x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right) = -2 \sin 2x \cdot \left[-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \sin 2x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

**Př. 2:** Urči definiční obor výrazu  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  a pak jej zjednoduš využitím vzorců pro součet goniometrických funkcí.

Nesmíme dělit nulou  $\Rightarrow 1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + k \cdot 2\pi$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\pi + k \cdot 2\pi\}$ .

**Problém:** Vzorce pro součet goniometrických funkcí můžeme použít pouze v případě, že čítec (jmenovatel) zlomku bude obsahovat součet (rozdíl) dvou stejných goniometrických funkcí  $\Rightarrow$  místo 1 musí zlomky obsahovat hodnoty funkce  $\cos x \Rightarrow$  použijeme  $1 = \cos 0$ .

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos 0 - \cos x}{\cos 0 + \cos x} = \frac{-2 \cdot \sin \frac{0+x}{2} \cdot \sin \frac{0-x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{0+x}{2} \cdot \cos \frac{0-x}{2}} = \frac{-2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \left(-\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left(-\frac{x}{2}\right)}$$

Použijeme:  $\sin \left(-\frac{x}{2}\right) = -\sin \frac{x}{2}$  a  $\cos \left(-\frac{x}{2}\right) = \cos \frac{x}{2}$ .

$$= \frac{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

**Př. 3:** Vypočti.

a)  $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$       b)  $\frac{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}$

a)  $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

Nejde o tabulkové hodnoty  $\Rightarrow$  použijeme vzorce na součet goniometrických funkcí a budeme doufat, že vyjdou úhly, ke kterým známe hodnoty.

$$\sin 105^\circ - \sin 15^\circ = 2 \cdot \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b)  $\frac{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ}$

$$\frac{\cos 70^\circ - \cos 10^\circ}{\sin 70^\circ + \sin 10^\circ} = \frac{-2 \sin \frac{70^\circ + 10^\circ}{2} \cdot \sin \frac{70^\circ - 10^\circ}{2}}{2 \sin \frac{70^\circ + 10^\circ}{2} \cdot \cos \frac{70^\circ - 10^\circ}{2}} = \frac{-2 \sin 40^\circ \cdot \sin 30^\circ}{2 \sin 40^\circ \cdot \cos 30^\circ} = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**Př. 4:** Vyřeš rovnici  $\sin 5x = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Problém:** Uvnitř sinů jsou různé výrazy, rozložení pomocí součtových vzorců nepomůže  $\Rightarrow$  převedeme vše na jednu stranu a rozložíme na součin pomocí vzorců pro součet funkcí  $\Rightarrow$  rovnice v součinném tvaru.

$$\sin 5x = \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin 5x - \sin \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{5x + 3x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin \left(\frac{5x - 3x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \quad /: 2$$

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

**Součinový tvar:**

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

**Substitute:**  $4x - \frac{\pi}{4} = y$

$$\cos y = 0$$

$$y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / + \frac{\pi}{4}$$

$$4x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \quad / : 4$$

$$x = \frac{3}{16}\pi + k \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{3}{16}\pi + k \cdot \frac{\pi}{4}; \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi \right\}$$

**Substitute:**  $x + \frac{\pi}{4} = a$

$$\sin a = 0$$

$$a = k \cdot \pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$a = x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi$$

$$x + \frac{\pi}{4} = k \cdot \pi \quad / - \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

**Př. 5:** Vyřeš rovnici  $\sin 5x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Zkusíme převést oba členy na jednu stranu:  $\sin 5x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**Problém:** Máme pouze vzorce pro součet dvou stejných goniometrických funkcí  $\Rightarrow$  potřebujeme, aby v rovnici byly pouze siny nebo cosiny.

**Nápad:** Platí:  $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$  upravíme vnitřek cosinu tak, abychom ho mohli přepsat

na sinus  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x - \pi)$ .

$$\sin 5x - \sin(x - \pi) = 0 \quad (\text{použijeme vzorec } \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2})$$

$$2 \cos \frac{5x + x - \pi}{2} \sin \frac{5x - (x - \pi)}{2} = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

**Součinový tvar:**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

**Substitute:**  $y = 3x - \frac{\pi}{2}$

$$\cos y = 0$$

**Substitute:**  $a = 2x + \frac{\pi}{2}$

$$\sin a = 0$$

$$a = k \cdot \pi$$

$$y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = 3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$3x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / + \frac{\pi}{2}$$

$$3x = \pi + k \cdot \pi \quad / : 3$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \right\}$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$a = 2x + \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = k \cdot \pi \quad / - \frac{\pi}{2}$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / : 2$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

**Př. 6:** Vyřeš rovnici  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ .

**Problém:** Vzorce pro součet dvou stejných goniometrických funkcí umožňují spojit pouze dva členy (v rovnici jsou tři)  $\Rightarrow$  potřebujeme správně vybrat, které dva spojíme.

Vzorec:  $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \Rightarrow$  potřebujeme, aby se člen, který vznikne

z výrazu  $\frac{x+y}{2}$  nebo  $\frac{x-y}{2}$ , rovnal členu uvnitř nepoužitého cosinu (kvůli vytýkání v dalším

kroku)  $\Rightarrow$  spojíme členy  $\cos 3x$  a  $\cos x$ .

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$$

$$(\cos 3x + \cos x) + \cos 2x = 0 \quad (\text{použijeme } \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2})$$

$$2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} + \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \cdot \cos x + 1) = 0$$

**Součinný tvar:**

$$\cos 2x = 0$$

$$2 \cos x + 1 = 0$$

**Substitute:**  $y = 2x$

$$\cos y = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{třetinové úhly v záporné}$$

$$y = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

polorovině podle osy  $x$ .

$$x_1 = \frac{2}{3} \pi + k \cdot 2\pi$$

$$x_2 = \frac{4}{3} \pi + k \cdot 2\pi$$

**Návrat k původní proměnné:**

$$y = 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad / : 2$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3} \pi + k \cdot 2\pi; \frac{4}{3} \pi + k \cdot 2\pi \right\}$$

**Pedagogická poznámka:** Diskuse o tom, které dva členy vybrat do součtového vzorce, je nejzajímavější částí řešení příkladu. Je třeba, aby studenti pochopili, že volba není náhodná, naopak jde o poměrně jednoznačný důsledek dalšího potřebného kroku.

Vzorce pro součet goniometrických funkcí se odvozují ze součtových vzorců, na základě

následujících rovností:  $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ ,  $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$ .

$$\sin x + \sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního sinu vzorec  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřek druhého sinu vzorec  $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ :

$$\sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme:  $\sin x + \sin y = 2 \sin\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$ .

**Př. 7:** (BONUS) Odvod' vzorec pro  $\cos x + \cos y$ .

$$\cos x + \cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$$

Nyní použijeme pro vnitřek prvního cosinu vzorec  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ :

$$\cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Nyní použijeme pro vnitřky druhého sinu vzorec  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ :

$$\cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2} \sin\frac{x-y}{2}.$$

Po sečtení získáme:  $\cos x + \cos y = 2 \cos\frac{x+y}{2} \cos\frac{x-y}{2}$ .

**Př. 8:** Petáková:

strana 47, cvičení 60 a), e)

strana 54, cvičení 21 c), e)

strana 54, cvičení 22 a)

**Shrnutí:** Vzorce pro součet goniometrických funkcí jsou výhodné tím, že převádí součet na součin.