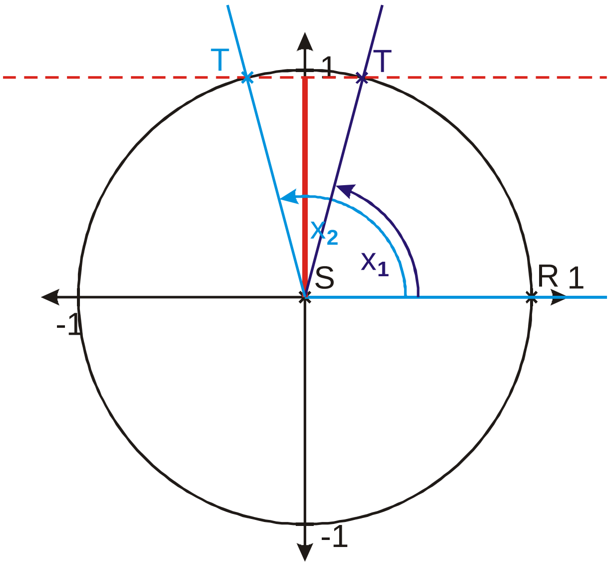
4.4.2 Sinová věta II

Předpoklady: 040401

Kde se stala chyba?
Námi nalezené řešení je správné, ale nenašli jsme druhé $\Rightarrow$ chyba ve chvíli, kdy jsme z hodnoty $\sin\beta$ určovali úhel β.

β je úhel z intervalu $(0;\pi)$. Jak je vidět z jednotkové kružnice, úhly, pro které platí $\sin\beta = 0,96687$, jsou v intervalu $(0;\pi)$ dva $\Rightarrow$ musíme počítat s oběma.



Př. 1: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 6,1$; $b = 7,2$; $\alpha = 55°$. Postupuj tak, abys našel všechna řešení příkladu.

Tentokrát to zkusíme správně.
Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{7,2}{6,1}\sin 55° \doteq 0,96687$$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existovat dva $\Rightarrow$ musíme zkoumat oba.

$\beta_1 = 75°13'$

Dopočítáme úhel γ_1:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$\gamma_1 = 180° - (55° + 75°13') = 49°47'$

Teď můžeme vypočítat c_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 49°47'}{\sin 55°}\cdot 6,1 = 5,69$$

$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180 - 75°13' = 104°47'$

Dopočítáme úhel γ_2:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$\gamma_2 = 180° - (55° + 104°47') = 20°13'$

Teď můžeme vypočítat c_2:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_2 = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 20°13'}{\sin 55°}\cdot 6,1 = 2,57$$

Příklad má dvě řešení:

1) $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $c_1 = 5{,}69$, $\alpha = 55°$, $\beta_1 = 75°13'$, $\gamma_1 = 49°47'$.
2) $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $c_2 = 2{,}57$, $\alpha = 55°$, $\beta = 104°47'$, $\gamma = 20°13'$.

Proč první dva příklady v minulé hodině:

- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 10$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.
- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $b = 51{,}23$, $\alpha = 61°28'$, $\gamma = 8°13'$.

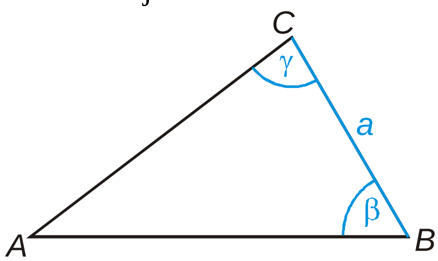
měli jediné řešení.
Zatímco příklad:

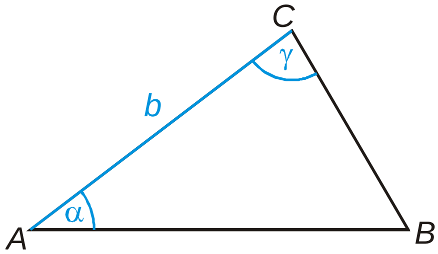
- Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $\alpha = 55°$.

má řešení dvě?

Zkusíme si udělat náčrtky jako při řešení konstrukčních úloh:

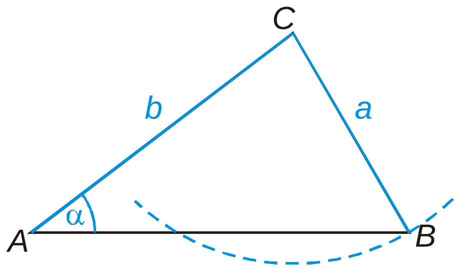
jedno řešení





Trojúhelníky jsou dány větou *usu*, která je jednoznačnou větou o shodnosti.

dvě řešení



Trojúhelník je zadán větou *ssu*, která je jednoznačná pouze v případě, že strana proti zadanému úhlu (v našem případě *a*) je větší (což v našem případě není).

Z obrázků je zřejmé:

- pokud zadání příkladu odpovídá jednoznačně zadané konstrukci, příklad má jediné řešení,
- pokud zadání příkladu odpovídá nejednoznačně zadané konstrukci, příklad má více řešení.

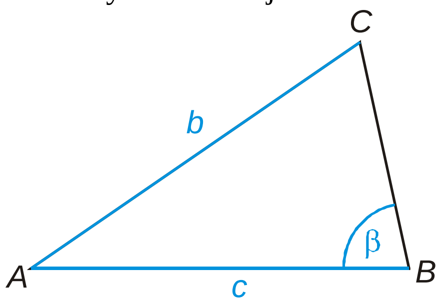
Př. 2: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $c = 25$; $b = 21$; $\beta = 81°$. Najdi všechna řešení příkladu.

Nejdříve určíme úhel γ (potřebujeme úhel pro straně *c*).

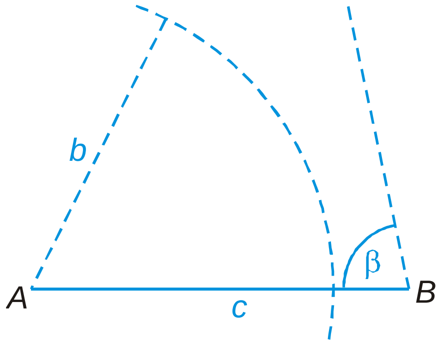
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin\beta = \frac{25}{21}\sin 81° \doteq 1{,}1758$ toto číslo nemůže být hodnotou funkce sinus $\Rightarrow$ takový trojúhelník neexistuje.

Zkusíme stejně jako v předchozím případě využít konstrukci trojúhelníků k pochopení toho, co se stalo.

Přibližný náčrtek trojúhelníku v zadání:



Náčrtek konstrukce:



Délka strany b je zřejmě příliš malá, aby se kružnice protnula s polopřímkou, na které leží vrchol C $\Rightarrow$ trojúhelník nejde ani sestrojit ani spočítat.

Pedagogická poznámka: Žáci (logicky) očekávají, že příklad 2 bude klasické dopočtení trojúhelníku s dvěma řešeními. Vsunutí příkladu 2, který nečekaně nemá řešení, jednak staví žáky do situace, na kterou nejsou připraveni, a hlavně u některých vede k tomu, že před následujícím příkladem opět zapomenou, na co si měli dávat pozor.

Př. 3: Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 7,307$; $b = 8,981$; $\alpha = 31°53'$. Najdi všechna řešení příkladu.

Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně b).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{8,981}{7,307}\sin 31°53' \doteq 0,649198$$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existují dva $\Rightarrow$ musíme využít oba.

$\beta_1 = 40°29'$

Dopočítáme úhel γ_1:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha+\beta)$$

$$\gamma_1 = 180° - (31°53' + 40°29') = 107°38'$$

Teď můžeme vypočítat c_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 107°38'}{\sin 31°53'}\cdot 7,307 = 13,18$$

$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180 - 40°29' = 139°31'$

Dopočítáme úhel γ_2:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha+\beta)$$

$$\gamma_2 = 180° - (31°53' + 139°31') = 8°36'$$

Teď můžeme vypočítat c_2:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_2 = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 8°36'}{\sin 31°53'}\cdot 7,307 = 2,069$$

Příklad má dvě řešení:

- $a = 7,307$, $b = 8,981$, $c_1 = 13,18$, $\alpha = 31°53'$, $\beta_1 = 40°29'$, $\gamma_1 = 107°38'$,
- $a = 7,307$, $b = 8,981$, $c_2 = 2,069$, $\alpha = 31°53'$, $\beta_2 = 139°31'$, $\gamma_1 = 8°36'$.

Př. 4: V trojúhelníku jsou dány dvě strany (o velikostech 8,7 a 5,3) a úhel proti větší z nich ($85°35'$). Urči všechny strany a úhly v trojúhelníku.

Při výpočtu budeme používat vzorce $\Rightarrow$ můžeme si ulehčit práci pojmenováním stran.
Strany si můžeme pojmenovat libovolně, například $a = 8,7$, $b = 5,3$. Zadaný úhel má ležet proti delší ze zadaných stran $\Rightarrow$ leží proti straně *a* $\Rightarrow$ $\alpha = 85°35'$.
Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel pro straně *b*).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{5,3}{8,7}\sin 85°35' \doteq 0,607386$$

Úhly s touto hodnotou sinu mohou existují dva $\Rightarrow$ musíme využít oba.

$\beta_1 = 37°24'$

Dopočítáme úhel γ_1:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$\gamma_1 = 180° - (85°35' + 37°24') = 57°1'$

Teď můžeme vypočítat c_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 57°1'}{\sin 85°35'}\cdot 8,7 = 7,32$$

$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180 - 37°24' = 142°36'$

Dopočítáme úhel γ_2:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta)$

$\gamma_2 = 180° - (85°35' + 142°36') = -48°11'$

Záporný úhel není možný $\Rightarrow$ příklad má jediné řešení.

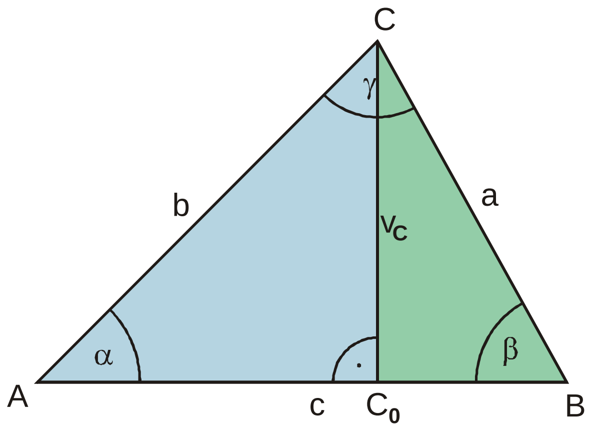
Příklad má jedno řešení: $a = 8,7$, $b = 5,3$, $c = 7,32$, $\alpha = 85°35'$, $\beta = 37°24'$, $\gamma = 57°1'$.

Př. 5: Najdi důvod, proč autor zvolil označení stran v předchozím příkladě právě tímto způsobem.

Důvod není matematický, ale souvisí s používáním počítačů. Jelikož předchozí příklad je stejný a liší se jen dosazením. Mohli jsme získat poslední příklad pouhým zkopírováním a přepsáním hodnot.

Sinová věta si koleduje o důkaz, nejdříve zkusíme vztah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Máme ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Sestrojíme výšku v_C, její patu označíme C_0. Vzniknou dva další trojúhelníky - ACC_0 (modrý) a BCC_0 (zelený) oba pravoúhlé $\Rightarrow$ s nimi umíme počítat.



V obou trojúhelnících vyjádříme velikost výšky v_C.

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin\alpha = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin\alpha \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

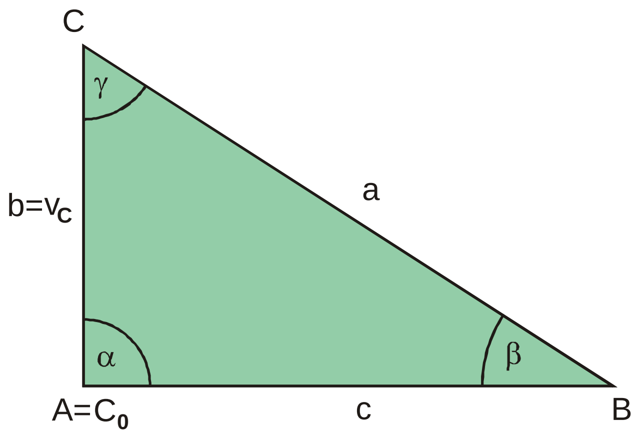
$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \qquad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Platí toto odvození vždy?
Platí pouze pro úhly $\alpha < 90°$ (aby situace odpovídala obrázku).

Př. 6: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, když platí $\alpha = 90°$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník zmizel, ale platí: $v_C = b$.

Trojúhelník BCC_0 (zelený): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Důkaz se zdaří, když bude platit: $v_C = b = \sin\alpha \cdot b$. Víme, že platí:

$v_C = b = 1 \cdot b = \sin\alpha \cdot b$, protože $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

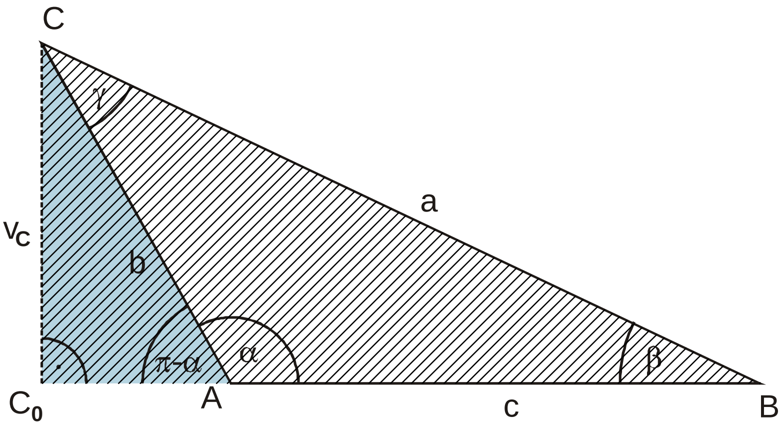
Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \qquad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Př. 7: Proveď důkaz platnosti vzorce $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, když platí $180° > \alpha > 90°$.

Nakreslíme obrázek:



Modrý trojúhelník částečně překrývá trojúhelník šrafovaný (původně zelený).

- trojúhelník ACC_0 (modrý): $\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_C}{b} \Rightarrow v_C = \sin(\pi - \alpha) \cdot b$,
- trojúhelník BCC_0 (šrafovaný): $\sin\beta = \frac{v_C}{a} \Rightarrow v_C = \sin\beta \cdot a$.

Potřebujeme $\sin\alpha$, ne $\sin(\pi - \alpha)$.

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha - (-1)\sin\alpha = \sin\alpha$ $\Rightarrow$ tedy: $v_C = \sin\alpha \cdot b$.

Oba výrazy pro v_C se musejí rovnat: $v_C = \sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a$.

$\sin\alpha \cdot b = \sin\beta \cdot a \qquad / : (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$

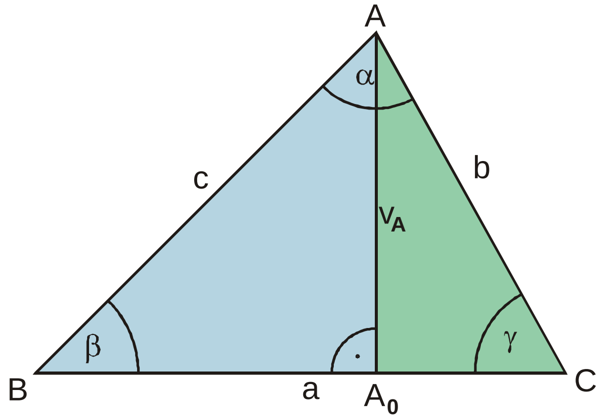
$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ (to jsme měli dokázat)

Žádna další možnost velikosti úhlu α není $\Rightarrow$ vztah $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ jsme dokázali pro všechny obecné trojúhelníky.

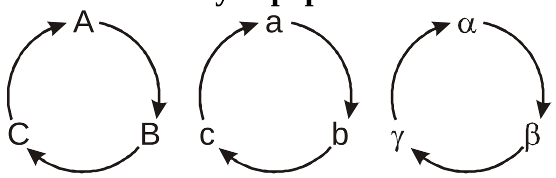
Postřeh: Tímto jsem fakticky dokázal i platnost vztahů $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ a $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Při kreslení obrázku nezáleželo na tom, jakým písmenem si strany, se kterými jsme pracovali, označíme $\Rightarrow$ stačí změnit označení vrcholů a dokážeme místo rovnosti $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ jednu ze zbývajících dvou rovností.

Př. 8: Nakresli obrázek pro první část důkazu tak, aby z ní vyplynula rovnost $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$.

Prohodíme označení vrcholů tak, aby vrchol A byl nahoře.



Zaměňování vrcholů se u trojúhelníků používá často, postup se nazývá cyklická záměna a v tabulkách bývá popisován těmito schématy:



Vzorec $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ získáme ze vzorce $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ tak, že se posuneme ve směru šipek o jeden znak dále.

Př. 9: Ve větě o obecném trojúhelníku vystupují vrcholy A a B, strana a a úhel γ. Pomocí cyklické záměny urči, které vrcholy a strany budou vystupovat ve větě s úhlem β.

Úhel β získáme z úhlu γ posunutím o dva kroky (o dvě šipky) $\Rightarrow$ posuneme všechno o dva kroky $\Rightarrow$ ve větě budou vystupovat vrcholy C a B, strana c a úhel β.

Poznámka: Při formulaci věty se také můžeme zcela obejít bez pojmenovávání stran, úhlů nebo vrcholů. Například sinová věta může být vyslovena takto:
Pro každý trojúhelník platí, že poměr strany a sinu protějšího úhlu je vždy stejný.

Př. 10: Petáková:
strana 49/cvičení 75 b) c)
strana 49/cvičení 79

Shrnutí: