4.4.3 Kosinová věta

Předpoklady: 040402

Př. 1: Rozhodni, zda dokážeme spočítat zbývající strany a úhly u všech trojúhelníků zadaných pomocí trojice prvků (délek stran a velikostí úhlů).

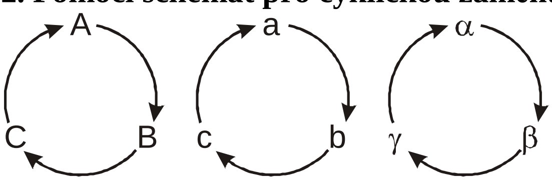
V sinové větě vystupují dvě dvojice strana-protější úhel. Jednu z nich musíme znát, druhou dopočítáváme. V případě, že známe dva úhly, můžeme dopočítat i třetí do sinové věty. Bez jedné dvojice strana-protější úhel počítat pomocí sinové věty nemůžeme $\Rightarrow$ všechny prvky trojúhelníku zatím nedokážeme dopočítat, když známe:

- všechny tři strany a žádný úhel (zadání $a; b; c$),
- dvě strany a úhel proti třetí straně.

Pro řešení úloh neřešitelných pomocí sinové věty existuje **věta kosinová**.

Př. 2: Najdi v tabulkách znění kosinové věty a s její pomocí vyřeš následující příklad. V trojúhelníku *ABC* urči zbývající strany a úhly, je-li dáno: $a = 4,3$; $b = 3,1$; $\gamma = 57°31'$.

Kosinová věta je uvedena v tabulkách v části se vzorci v kapitole o planimetrii a goniometrii na straně 35 v tomto znění: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
Ve vzorci z tabulek se vyskytuje úhel α, který neznáme, a určuje se strana *a*, kterou známe $\Rightarrow$ musíme vzorec přepsat pro naše zadání. Dvě možnosti:
1. Pomocí významu stran a úhlů
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ - stranu *a* určíme pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu (obě zbývající strany můžeme ve vzorci libovolně zaměňovat) $\Rightarrow$ stranu *c* určíme také pomocí zbývajících stran (*a* a *b*) a protějšího úhlu γ $\Rightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ - do tohoto vzorce již můžeme dosadit.
2. Pomocí schémat pro cyklickou záměnu



Od strany *a* se ke straně *c* dostaneme dvojitým posunutím ve směru šipek.
Ze vzorce $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ získáme $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Určíme stranu *c*: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$c = \sqrt{4,3^2 + 3,1^2 - 2\cdot 4,3\cdot 3,1\cos 57°31'}$$

$$c = 3,71$$

Úhel α určíme opět pomocí kosinové věty: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{3{,}1^2+3{,}71^2-4{,}3^2}{2\cdot 3{,}1\cdot 3{,}71} = 0{,}212 \Rightarrow \alpha = 77°44'$$

$$\beta = 180° - (77°44' + 57°31') = 44°45'$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 4{,}3$, $b = 3{,}1$, $c = 3{,}71$, $\alpha = 77°44'$, $\beta = 44°45'$, $\gamma = 57°31'$.

Úhel α bychom mohli určit také pomocí věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel α:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma$$

$$\sin\alpha = \frac{4{,}3}{3{,}71}\sin 57°31'$$

$$\alpha_1 = 77°53'$$

$$\alpha_2 = 102°7'$$

Určíme úhel β:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha+\gamma)$$

$$\beta_1 = 180° - (77°53' + 57°31') = 44°36'$$

$$\beta_2 = 180° - (102°7' + 57°31') = 20°22'$$

Zdá se, že jsme získali dvě řešení, což je divné:

- při řešení pomocí kosinové věty jsme získali jedno řešení a nezdá se, že bychom na něco zapomněli - funkce $\cos x$ je pro úhly od $0°$ do $180°$ prostá a nemuseli jsme pro úhel α dopočítávat druhou variantu (kosinus úhlu $\alpha_2 = 102°7'$ by byl záporný),
- než jsme začali počítat velikost úhlu α znali jsme všechny tři strany trojúhelníka (takový trojúhelník je určený jednoznačně a nemůžeme tedy najít dvě varianty pro úhel α.)

Provedeme zkoušku pomocí sinové věty:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} \Rightarrow \frac{4{,}3}{\sin 77°53'} = \frac{3{,}1}{\sin 44°36'} \Rightarrow 4{,}40 \doteq 4{,}41$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} \Rightarrow \frac{4{,}3}{\sin 77°53'} = \frac{3{,}1}{\sin 20°22'} \Rightarrow 4{,}40 \neq 8{,}91 \Rightarrow \text{ druhé řešení je pouze zdánlivé.}$$

Skutečnost, že bezpečnější je používat kosinovou větu si můžeme ukázat na trojúhelníku *ABC* kde je dáno: $a = 4{,}3$; $b = 1{,}53$; $\gamma = 57°31'$.

Určíme stranu *c*: $c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \sqrt{4{,}3^2+3{,}1^2-2\cdot 4{,}3\cdot 3{,}1\cos 57°31'} = 3{,}71$

Úhel α určíme opět pomocí kosinové věty: $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1{,}53^2+3{,}71^2-4{,}3^2}{2\cdot 1{,}53\cdot 3{,}71} = -0{,}210 \Rightarrow \alpha = 102°8'$$

$\beta = 180° - (102°8' + 57°31') = 20°21'$ (získaný trojúhelník tedy odpovídá druhému - nevyhovujícímu řešení při použití sinové věty v předchozím příkladu).

Úhel α bychom mohli určit také pomocí věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Pro kontrolu:

Určíme úhel α: $\sin\alpha = \frac{4{,}3}{3{,}71}\sin 57°31'$ (to samé jako v původním příkladu)

$\alpha_1 = 77°53'$

Určíme úhel β:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180° \Rightarrow \beta = 180° - (\alpha+\gamma)$$

$$\beta_1 = 180° - (77°53' + 57°31') = 44°36'$$

$$\beta_2 = 180° - (102°7' + 57°31') = 20°22'$$

$\alpha_2 = 102°7'$

Tentokrát kontrolou vyloučíme větší úhel β (a s ním menší úhel α).

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} \Rightarrow \frac{4,3}{\sin 102°8'} = \frac{1,53}{\sin 44°36'} \Rightarrow 4,40 \neq 2,18 \Rightarrow$ první řešení je pouze zdánlivé.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin b} \Rightarrow \frac{4,3}{\sin 102°8'} = \frac{1,53}{\sin 20°22'} \Rightarrow 4,40 \doteq 4,40$.

Př. 3: Zapiš kosinovou větu ve všech třech variantách (pro strany *a*, *b*, *c*).

Kosinová věta umožňuje určit stranu trojúhelníku pomocí zbývajících stran a protějšího úhlu $\Rightarrow$

- pro stranu *a* (zbývající strany *b*, *c*, protější úhel α): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,
- pro stranu *b* (zbývající strany *c*, *a*, protější úhel β): $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$,
- pro stranu *c* (zbývající strany *a*, *c*, protější úhel γ): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Poznámka: Stejný výsledek získáme i pomocí schémat pro cyklickou záměnu.

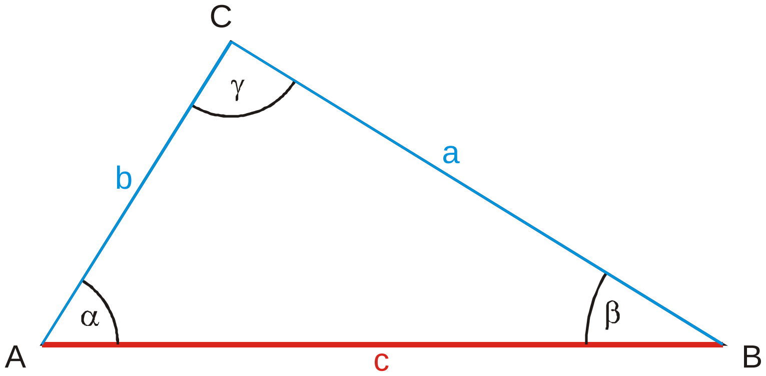
Pro každý trojúhelník *ABC* platí:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $\quad$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Př. 4: Z vět pro pravoúhlý trojúhelník najdi takovou, která má vztah ke kosinové větě. Urči tento vztah.

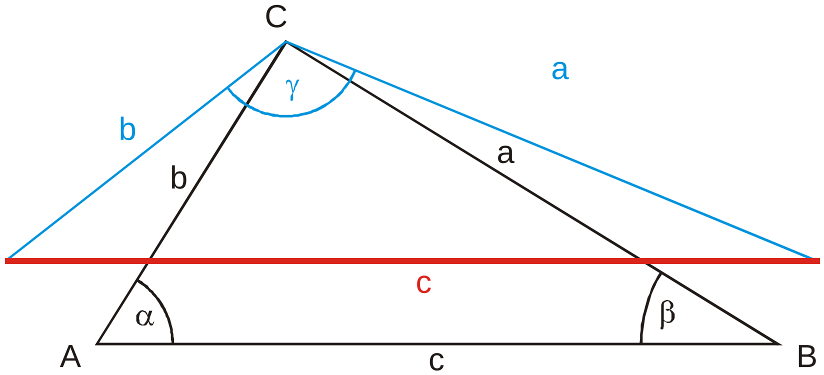
Kosinová věta připomíná větu Pythagorovu:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ x $c^2 = a^2 + b^2$
Rozdíl je v posledním členu, který u Pythagorovy věty chybí.
Zjistíme si hodnotu tohoto členu pro pravoúhlý trojúhelník.
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ strana *c* je přepona $\Rightarrow \gamma = 90°$.
Dosadíme do kosinové věty:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\cos 90° = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$
Kosinová věta přešla do věty Pythagorovy $\Rightarrow$

- Pythagorova věta je speciální případ věty kosinové pro pravoúhlý trojúhelník.
- Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy pro obecný trojúhelník.

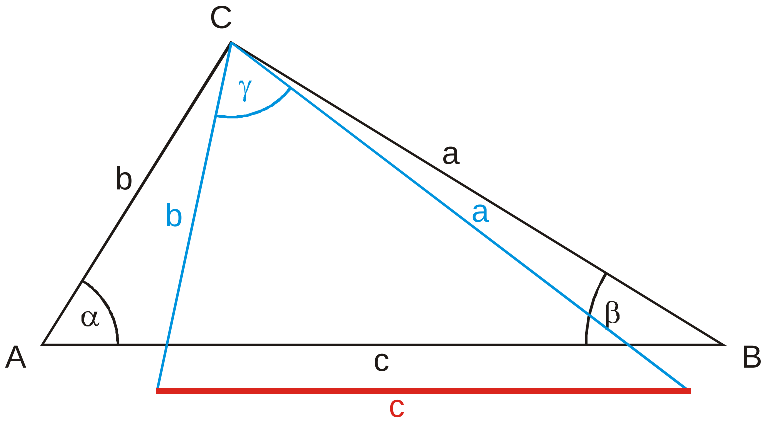
Dodatek: Předchozí příklad můžeme ještě rozvinout následující úvahou.
Pro pravoúhlý trojúhelní platí $c^2 = a^2 + b^2$, $\gamma = 90°$.



Zvětšíme úhel γ tak, aby platilo $90° < \gamma < 180°$. Pro výpočet *c* musíme použít kosinovou větu: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ve vzorci přibyl výraz $-2ab\cos\gamma$, protože pro $\gamma \in (90°;180°)$, platí $\cos\gamma < 0$ $\Rightarrow$ výraz $-2ab\cos\gamma$ je kladný $\Rightarrow$ c vyjde větší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany *a*, *b* a zvětšíme úhel γ.



Zmenšíme úhel γ tak, aby platilo $0° < \gamma < 90°$. Pro výpočet *c* musíme použít kosinovou větu: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Ve vzorci přibyl výraz $-2ab\cos\gamma$, protože pro $\gamma \in (0°;90°)$, platí $\cos\gamma > 0$ $\Rightarrow$ výraz $-2ab\cos\gamma$ je záporný $\Rightarrow$ c vyjde menší než u pravoúhlého trojúhelníku. To samé napoví obrázek, ve kterém ponecháme strany *a*, *b* a zmenšíme úhel γ.



Př. 5: Trojúhelník *ABC* má délky stran 4, 5, 6. Urči velikosti jeho vnitřních úhlů.

Označíme si strany libovolným způsobem, například $a = 4$, $b = 5$ a $c = 6$.
Pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel,například úhel α.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,75 \Rightarrow \alpha = 41°25'$$

Další úhly bychom mohli určit pomocí kosinové věty, ale jednodušší bude použití věty sinové (snazší dosazení), kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.
Určíme úhel γ:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{a}\sin\alpha = \frac{6}{4}\sin 41°25' = 0,992$$

$\gamma_1 = 82°49'$ $\qquad$ $\gamma_2 = 180° - \gamma_1 = 180 - 82°49' = 97°11'$

Dopočítáme úhel β_1:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \beta=180°-(\alpha+\gamma)$

$\beta_1=180°-(41°25'+82°49')=55°46'$

Dopočítáme úhel β_2:

$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow \beta=180°-(\alpha+\gamma)$

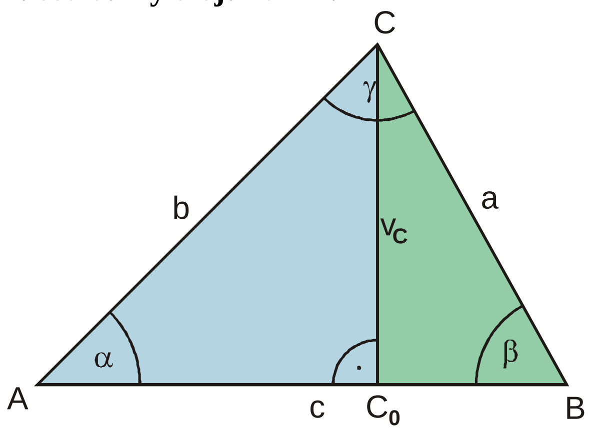
$\beta_2=180°-(41°25'+97°11')=41°24'$

Strana *b* je větší než strana *a* proto i úhel β musí být větší než úhel α $\Rightarrow$ toto není řešení zadaného příkladu.

V trojúhelníku *ABC* platí: $a=4$, $b=5$, $c=6$, $\alpha=41°25'$, $\beta=55°46'$, $\gamma=82°49'$.

Důkaz kosinové věty bude mít opět tři části pro různé druhy trojúhelníků.
Budeme dokazovat tvar $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$.

1. ostroúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 víme: $a^2=|CC_0|^2+|BC_0|^2$.

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí *a*, *b*, *c* a α.

Určíme $|BC_0|$**:** platí: $|BC_0|=c-|AC_0|$, z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$\cos\alpha=\dfrac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0|=b\cdot\cos\alpha$, tedy $|BC_0|=c-b\cdot\cos\alpha$.

Určíme $|CC_0|$**:** z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0: $\sin\alpha=\dfrac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0|=b\cdot\sin\alpha$,

tedy $|CC_0|=b\cdot\sin\alpha$.

Dosadíme:

$$a^2=|CC_0|^2+|BC_0|^2=(b\cdot\sin\alpha)^2+(c-b\cdot\cos\alpha)^2=b^2\cdot\sin^2\alpha+c^2-2bc\cos\alpha+b^2\cdot\cos^2\alpha=$$

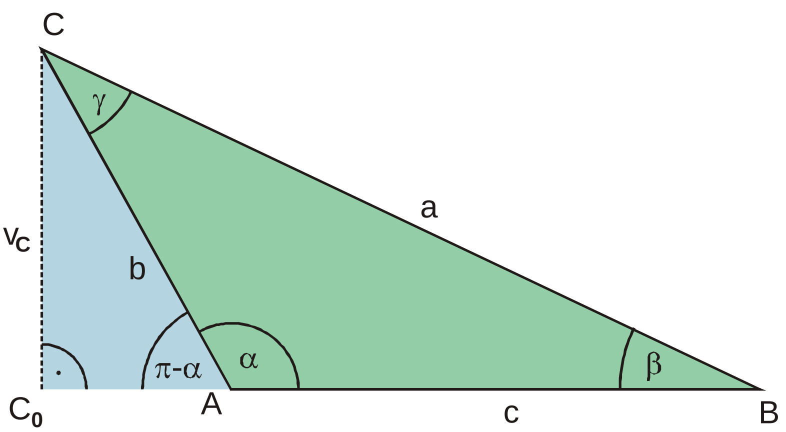
$$=b^2\cdot\sin^2\alpha+b^2\cdot\cos^2\alpha+c^2-2bc\cos\alpha=b^2\cdot\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$=b^2\cdot 1+c^2-2bc\cos\alpha=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

2. pravoúhlý trojúhelník

Už máme dokázáno v úvaze o porovnání Pythagorovy věty a kosinové věty.

3. tupoúhlý trojúhelník:



Z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0 víme: $a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2$.

Výraz na pravé straně musíme napsat pomocí *a*, *b*, *c* a α.

Určíme $|BC_0|$**:** platí: $|BC_0| = c + |AC_0|$, z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{|AC_0|}{b} \Rightarrow |AC_0| = b \cdot \cos(\pi - \alpha)$$. Pomocí součtových vzorců:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin a = (-1)\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin a = -\cos\alpha$$

$|AC_0| = -b\cdot\cos\alpha$, tedy $|BC_0| = c + |AC_0| = c + (-b\cdot\cos\alpha) = c - b\cdot\cos\alpha$.

Určíme $|CC_0|$**:** z pravoúhlého trojúhelníku ACC_0:

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{|CC_0|}{b} \Rightarrow |CC_0| = b \cdot \sin(\pi - \alpha)$$. Pomocí součtových vzorců:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin a = 0\cdot\cos\alpha - (-1)\cdot\sin a = \sin\alpha,$$

tedy $|CC_0| = b\cdot\sin\alpha$.

Dosadíme:

$$a^2 = |CC_0|^2 + |BC_0|^2 = (b\cdot\sin\alpha)^2 + (c - b\cdot\cos\alpha)^2 = b^2\cdot\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha =$$

$$= b^2\cdot\sin^2\alpha + b^2\cdot\cos^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2\cdot\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$= b^2\cdot 1 + c^2 - 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Př. 6: Petáková:
strana 49/cvičení 76 a) b) c)
strana 49/cvičení 82
strana 49/cvičení 86 a)

Shrnutí: Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy.