

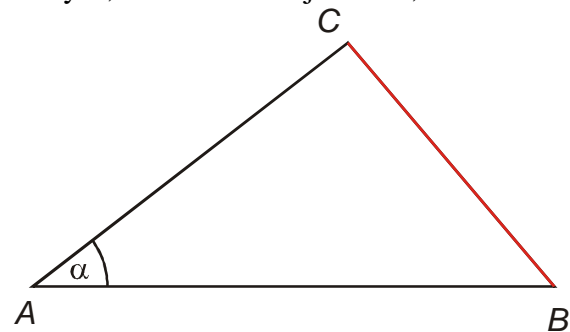
4.4.4 Trigonometrie v praxi

Předpoklady: 4403

Nejdřív něco jednoduchého na začátek.

Př. 1: Dvě přímé důlní chodby ústící do stejného místa A svírají úhel $\alpha = 37^\circ 46'$ mají být spojeny chodbou BC , spojující bod B v první chodbě s bodem C v druhé chodbě. Jak dlouhá bude spojovací chodba, je-li $|AB| = 137,8\text{ m}$ a $|AC| = 105,3\text{ m}$?

Body A , B a C tvoří trojúhelník, nakreslíme obrázek.



Musíme pouze dopočítat třetí stranu trojúhelníka \Rightarrow kosinová věta.

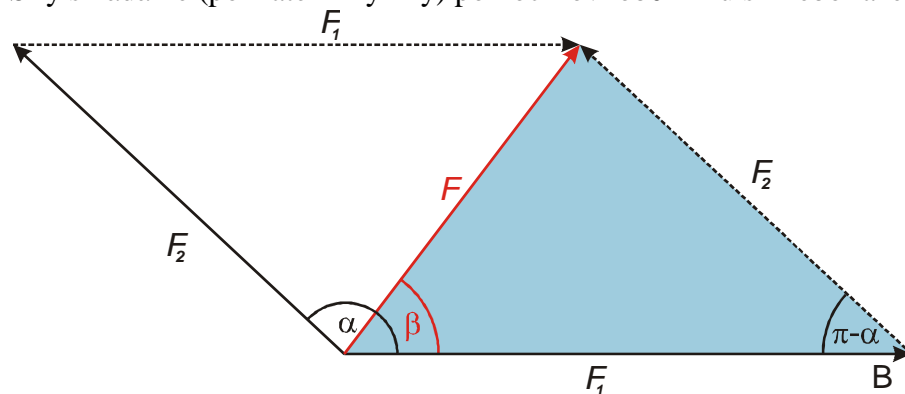
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} = \sqrt{105,3^2 + 137,8^2 - 2 \cdot 105,3 \cdot 137,8 \cdot \cos 37^\circ 46'} \text{ m} = 84,5 \text{ m}$$

Spojovací chodba bude dlouhá 84,5 m.

Př. 2: Na panenku působí v jedné rovině dvě síly navzájem se přetahujících sester. Urči výslednou sílu působící na panenku, pokud: $F_1 = 150\text{ N}$; $F_2 = 120\text{ N}$; $\alpha = 137^\circ$ (úhel, který spolu svírají síly obou holčiček).

Síly skládáme (poznatek z fyziky) pomocí rovnoběžníku sil nebo řazením sil za sebe.



Když doplníme obrázek na rovnoběžník, vzniknou dva trojúhelníky se stranami F_1 ; F_2 ; F . Pro výpočet využijeme modrý trojúhelník. Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme protější stranu \Rightarrow kosinová věta.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(180^\circ - \alpha)} = \sqrt{150^2 + 120^2 - 2 \cdot 150 \cdot 120 \cos(180^\circ - 137^\circ)} \text{ N} = 102,8 \text{ N}$$

Úhel β určíme ze stejného trojúhelníku pomocí sinové věty pomocí spočítané velikosti výsledné síly F .

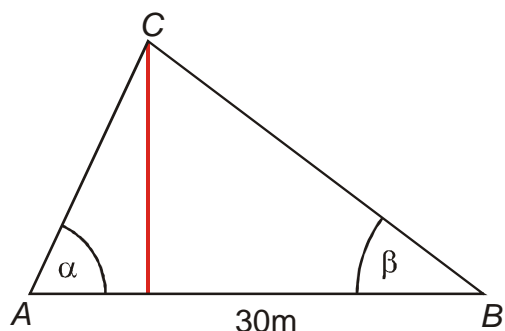
$$\frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F}{\sin(\pi - \alpha)} \Rightarrow \sin \beta = \frac{F_2}{F} \sin(\pi - \alpha) = \frac{120}{102,8} \sin(180^\circ - 137^\circ) = 0,8 \Rightarrow \beta = 52^\circ 45'$$

Na panenku působí výsledná síla 102,8 N, která se směrem síly F_1 svírá úhel $52^\circ 45'$.

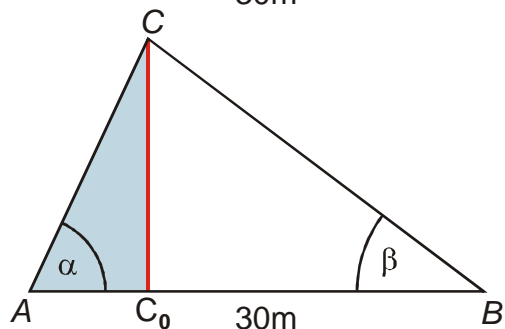
Dodatek: K připomínkám k reálnosti příkladu. Setry se mohou o panenku přetahovat i tímto způsobem bez toho, že by musela být panenka přibitá. Vzniklá výsledná síla však způsobí, že se panenka dá rychle do pohybu ve směru síly F , čímž se dostane mezi sestry a ty se pak o ni budou přetahovat přirozenějším způsobem - silami, které jsou navzájem opačné (což jim sice může vydržet déle, ale z početního hlediska je to daleko méně zajímavé).

Př. 3: Sběrka – Trigonometrie v praxi – Př1

Př. 4: Urči šířku řeky, jestliže na jednom přímém břehu byla vytýčena vzdálenost $|AB| = 300 \text{ m}$ a z obou těchto bodů byl zaměřen bod C na druhém břehu tím, že byly změřeny úhly $|\angle CAB| = \alpha = 65^\circ$ a $|\angle CBA| = \beta = 37^\circ$. Nakresli náčrtek situace.



Chceme v trojúhelníku určit výšku. Doplníme obrázek tak, aby vznikl trojúhelník, ze kterého by bylo možné výšku určit.



Výšku by bylo možné určit z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0 , neznáme v něm však ani jednu stranu. Strana AC jde však určit pomocí sinové věty z trojúhelníku ABC .

Trojúhelník ABC

Platí: $\frac{|AC|}{\sin \beta} = \frac{|AB|}{\sin \gamma} \Rightarrow$ musíme dopočítat úhel γ .

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (65^\circ + 37^\circ) = 78^\circ$$

$$\frac{|AC|}{\sin \beta} = \frac{|AB|}{\sin \gamma} \Rightarrow |AC| = |AB| \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Ted' můžeme příklad dopočítat.

Trojúhelník ACC_0

$$\sin \alpha = \frac{|CC_0|}{|AC|} \Rightarrow |CC_0| = |AC| \sin \alpha$$

$$\text{Dosadíme za } AB: |CC_0| = |AC| \sin \alpha = |AB| \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \sin \alpha$$

$$\text{Dosadíme: } |CC_0| = |AB| \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \sin \alpha = 300 \frac{\sin 37^\circ}{\sin 78^\circ} \sin 65^\circ \text{ m} = 167,3 \text{ m}$$

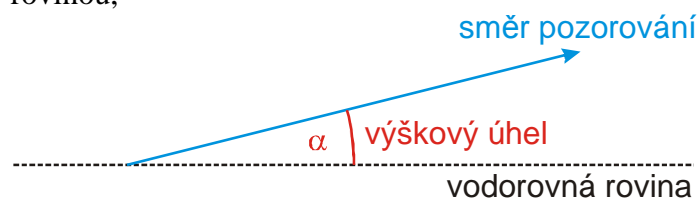
Šířka řeky je 167,3 m.

Předchozí příklad je pro praktické trigonometrické úlohy typický. Hledanou vzdálenost můžeme určit ze vhodného trojúhelníku, ve kterém však nejdříve musíme určit libovolnou stranu (nebo strany dvě, když známe pouze jeden úhel). Ve složitějších příkladech pak nepočítáme ze zadání hned konečný trojúhelník, ale musíme nejdříve spočítat trojúhelník, ze kterého teprve počítáme trojúhelník konečný. Někdy je postupných trojúhelníků více. Při hledání cesty od zadání k výsledku můžeme postupovat dvěma způsoby (nejvýhodnější je většinou oba postupy kombinovat):

- **od začátku:** najdeme trojúhelník, který je určen ze zadání, a z něj postupně počítáme další vzdálenosti a úhly,
- **od konce:** najdeme trojúhelník, ze kterého můžeme spočítat výsledek, a postupně koukáme, jak jej se k němu dostat ze zadání.

V trigonometrických příkladech se často používají tři pojmy:

výškový úhel – úhel, který svírá směr, kterým pozorujeme předmět ve výšce s vodorovnou rovinou,



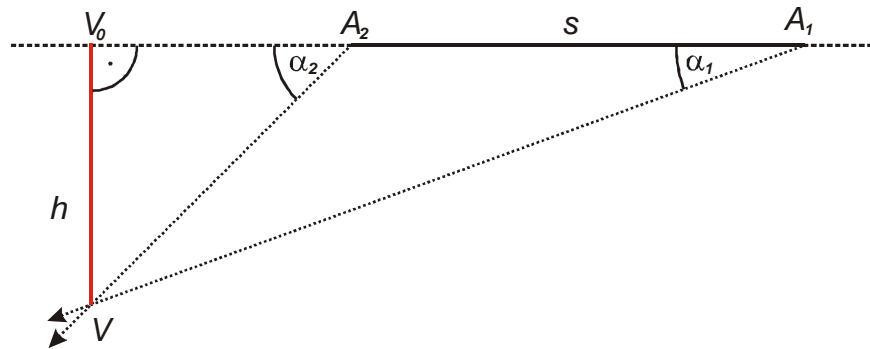
hloubkový úhel – úhel, který svírá směr, kterým pozorujeme předmět v hloubce s vodorovnou rovinou,



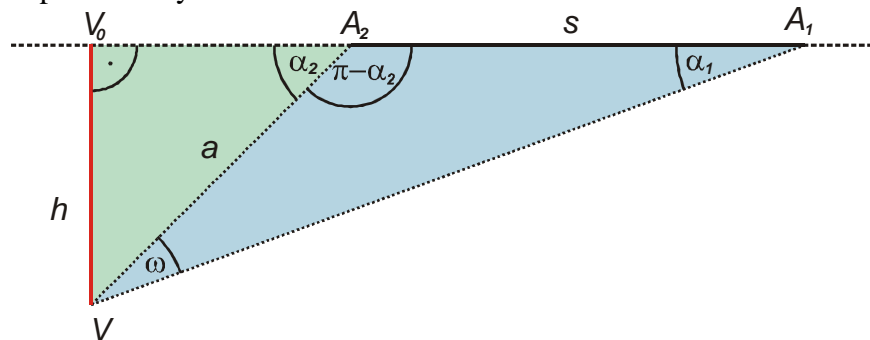
zorný úhel – úhel, který spolu svírají směry, kterými pozorujeme dvě nejodlehlejší místa předmětu (nebo také úhel pod kterým vidíme předmět).

Dodatek: Právě velikost zorného úhlu rozhoduje o tom, jestli dokážeme navzájem rozlišit dva body na předmětu, proto při pozorování podrobností přibližujeme předměty k oku, abychom zorný úhel zvětšili.

Př. 5: Pilot letadla letícího vodorovně rychlostí 250 m/s vidí řídicí věž letiště v hloubkovém úhlu $\alpha_1 = 20^\circ$. Po dvou sekundách letu přímo k věži se úhel zvětšil na $\alpha_2 = 45^\circ$. Urči výšku letu letadla.



Výšku můžeme spočítat z trojúhelníku A_2VV_0 , v něm však neznáme žádnou stranu. Musíme tedy v trojúhelníku A_1A_2V určit společnou stranu $A_2V \Rightarrow$ musíme v trojúhelníku A_1A_2V dopočítat úhly.



Výpočet strany $a = A_2V$ z trojúhelníku A_1A_2V (modrý trojúhelník):

Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu \Rightarrow sinová věta.

Určíme úhel ω : $\alpha_1 + (180^\circ - \alpha_2) + \omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$.

$$\frac{s}{\sin \omega} = \frac{a}{\sin \alpha_1} \Rightarrow a = s \frac{\sin \alpha_1}{\sin \omega}.$$

Výpočet strany $h = V_0V$ z trojúhelníku A_2VV_0 (zelený trojúhelník):

Trojúhelník je pravoúhlý, platí: $\sin \alpha_2 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin \alpha_2$.

Dosadíme za a : $h = a \cdot \sin \alpha_2 = s \frac{\sin \alpha_1}{\sin \omega} \sin \alpha_2$.

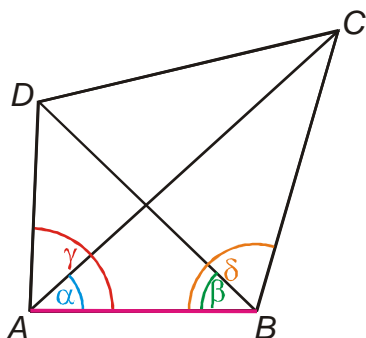
Vypočteme hodnotu: $h = s \frac{\sin \alpha_1}{\sin \omega} \sin \alpha_2 = 500 \frac{\sin 20^\circ}{\sin 25^\circ} \sin 45^\circ \text{ m} = 286 \text{ m}$.

Letadlo letí ve výšce 286 m.

Něco těžšího na závěr.

Př. 6: Urči vzdálenost dvou nepřístupných bodů C, D , jestliže znáš vzdálenost dvou přístupných bodů A, B $|AB| = 15 \text{ km}$ a následující úhly: $|\sphericalangle CAB| = \alpha = 42^\circ 15'$, $|\sphericalangle BAD| = \gamma = 87^\circ 30'$, $|\sphericalangle DBA| = \beta = 43^\circ 55'$ a $|\sphericalangle ABC| = \delta = 106^\circ 40'$.

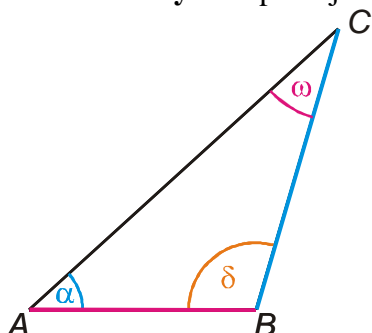
Nakreslíme si obrázek.



Vzdálenost bodů C, D můžeme určit ze dvou trojúhelníků: ACD nebo BCD . U obou známe pouze jeden úhel, musíme tedy spočítat obě další strany.

Na volbě nezáleží, zvolíme například trojúhelník $BCD \Rightarrow$ musíme určit strany BC a BD .

Určení strany BC : použijeme trojúhelník ABC .

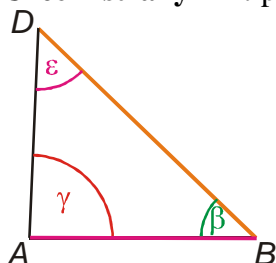


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu \Rightarrow sinová věta

Určíme úhel ω : $\alpha + \delta + \omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = 180^\circ - (\alpha + \delta) = 180^\circ - (42^\circ 15' + 106^\circ 40') = 31^\circ 5'$.

$$\frac{|AB|}{\sin \omega} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} \Rightarrow |BC| = |AB| \frac{\sin \alpha}{\sin \omega} = 15 \frac{\sin 42^\circ 15'}{\sin 31^\circ 5'} \text{ km} = 19,53 \text{ km}$$

Určení strany BD : použijeme trojúhelník ABD .

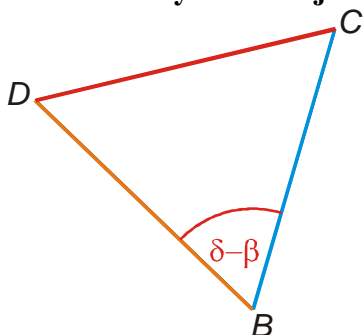


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu \Rightarrow sinová věta.

Určíme úhel ϵ : $\gamma + \beta + \epsilon = 180^\circ \Rightarrow \epsilon = 180^\circ - (\gamma + \beta) = 180^\circ - (87^\circ 30' + 43^\circ 55') = 48^\circ 35'$.

$$\frac{|AB|}{\sin \epsilon} = \frac{|BD|}{\sin \gamma} \Rightarrow |BD| = |AB| \frac{\sin \gamma}{\sin \epsilon} = 15 \frac{\sin 87^\circ 30'}{\sin 48^\circ 35'} \text{ km} = 19,98 \text{ km}$$

Určení strany CD v trojúhelníku BCD



Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme třetí stranu \Rightarrow kosinová věta.

$$|CD|^2 = |BD|^2 + |BC|^2 - 2|BD||BC|\cos(\delta - \beta)$$

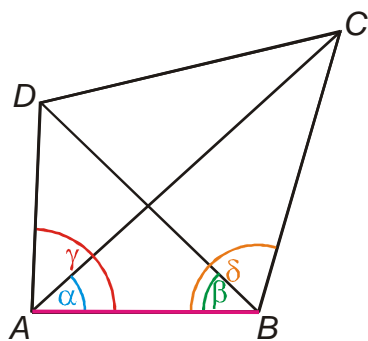
$$|CD| = \sqrt{|BD|^2 + |BC|^2 - 2|BD||BC|\cos(\delta - \beta)}$$

$$|CD| = \sqrt{19,98^2 + 19,53^2 - 2 \cdot 19,98 \cdot 19,53 \cos(106^\circ 40' - 43^\circ 55')} \text{ km} = 20,57 \text{ km}$$

Vzdálenost bodů CD je 20,6 km.

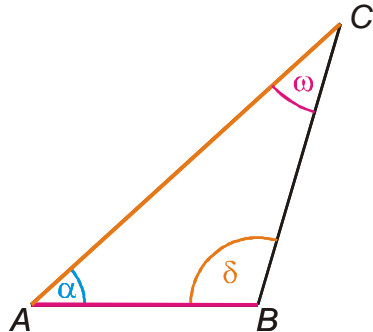
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jedním z těch, které zcela ztrácí smysl, když se řeší na tabuli. Jeho hlavním úskalím je orientace a tu nejde nacvičit jinak než samostatným výpočtem.

Př. 7: Vypočti předchozí příklad tím, že určíš trojúhelník ACD .



Zvolíme trojúhelník $ACD \Rightarrow$ musíme určit strany AC a AD .

Určení strany AC : použijeme trojúhelník ABC .

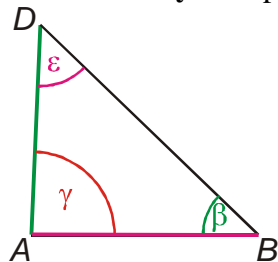


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu \Rightarrow sinová věta

$$\text{Určíme úhel } \omega: \alpha + \delta + \omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = 180^\circ - (\alpha + \delta) = 180^\circ - (42^\circ 15' + 106^\circ 40') = 31^\circ 5'.$$

$$\frac{|AB|}{\sin \omega} = \frac{|AC|}{\sin \delta} \Rightarrow |AC| = |AB| \frac{\sin \delta}{\sin \omega} = 15 \frac{\sin 106^\circ 40'}{\sin 31^\circ 5'} \text{ km} = 27,83 \text{ km}$$

Určení strany AD : použijeme trojúhelník ABD .

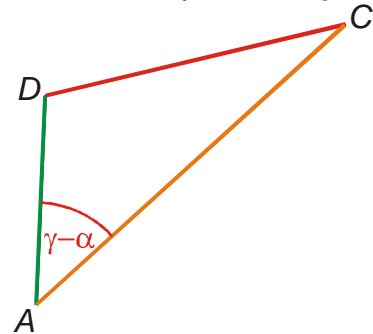


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu \Rightarrow sinová věta.

Určíme úhel ε : $\gamma + \beta + \varepsilon = 180^\circ \Rightarrow \varepsilon = 180^\circ - (\gamma + \beta) = 180^\circ - (87^\circ 30' + 43^\circ 55') = 48^\circ 35'$.

$$\frac{|AB|}{\sin \varepsilon} = \frac{|AD|}{\sin \beta} \Rightarrow |AD| = |AB| \frac{\sin \beta}{\sin \varepsilon} = 15 \frac{\sin 43^\circ 55'}{\sin 48^\circ 35'} \text{ km} = 13,87 \text{ km}$$

Určení strany CD v trojúhelníku ACD



Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme třetí stranu \Rightarrow kosinová věta.

$$|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2 - 2|AD||AC|\cos(\gamma - \alpha)$$

$$|CD| = \sqrt{|AD|^2 + |AC|^2 - 2|AD||AC|\cos(\gamma - \alpha)}$$

$$|CD| = \sqrt{13,87^2 + 27,83^2 - 2 \cdot 13,87 \cdot 27,83 \cos(87^\circ 30' - 42^\circ 15')} \text{ km} = 20,58 \text{ km}$$

Vzdálenost bodů CD je 20,6 km.

Dodatek: Rozdíl jedné setiny při výpočtu vzdálenosti $|CD|$ je způsoben zaokrouhlováním při postupných výpočtech předchozích vzdáleností.

Př. 8: Petáková:
strana 50/cvičení 87 b)
strana 50/cvičení 88

Shrnutí: