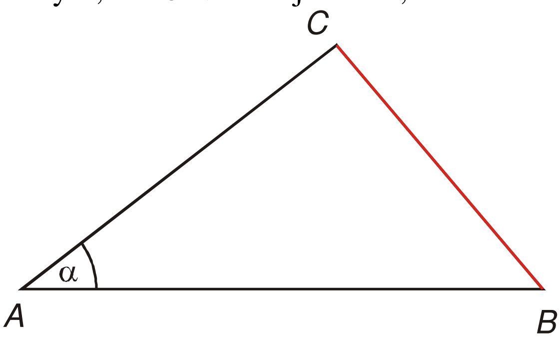
4.4.4 Trigonometrie v praxi

Předpoklady: 4403

Nejdřív něco jednoduchého na začátek.

Př. 1: Dvě přímé důlní chodby ústící do stejného místa *A* svírající úhel $\alpha = 37°46'$ mají být spojeny chodbou *BC*, spojující bod *B* v první chodbě s bodem *C* v druhé chodbě. Jak dlouhá bude spojovací chodba, je-li $|AB| = 137{,}8\,\mathrm{m}$ a $|AC| = 105{,}3\,\mathrm{m}$?

Body *A*, *B* a *C* tvoří trojúhelník, nakreslíme obrázek.



Musíme pouze dopočítat třetí stranu trojúhelníka $\Rightarrow$ kosinová věta.

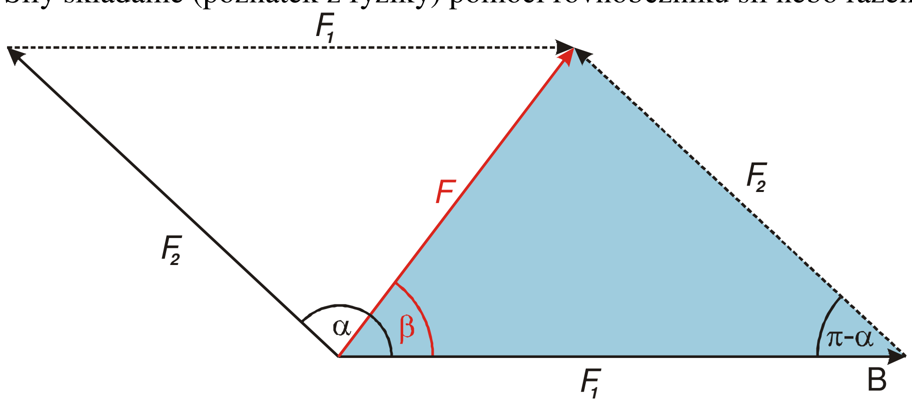
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{105{,}3^2 + 137{,}8^2 - 2\cdot 105{,}3\cdot 137{,}8\cdot\cos 37°46'}\,\mathrm{m} = 84{,}47\,\mathrm{m}$

Spojovací chodba bude dlouhá 84,47 m.

Př. 2: Na panenku působí v jedné rovině dvě síly navzájem se přetahujících sester. Urči výslednou sílu působící na panenku, pokud: $F_1 = 150\,\mathrm{N}$; $F_2 = 120\,\mathrm{N}$; $\alpha = 137°$ (úhel, který spolu svírají síly obou holčiček).

Síly skládáme (poznatek z fyziky) pomocí rovnoběžníku sil nebo řazením sil za sebe.



Když doplníme obrázek na rovnoběžník, vzniknou dva trojúhelníky se stranami $F_1; F_2; F$. Pro výpočet využijeme modrý trojúhelník. Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme protější stranu $\Rightarrow$ kosinová věta.

$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)$

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha)} = \sqrt{150^2 + 120^2 - 2\cdot 150\cdot 120\cos(180° - 137°)}\,\mathrm{N} =$

$= 102{,}8\,\mathrm{N}$

Úhel β určíme ze stejného trojúhelníku pomocí sinové věty pomocí spočítané velikosti výsledné síly *F*.

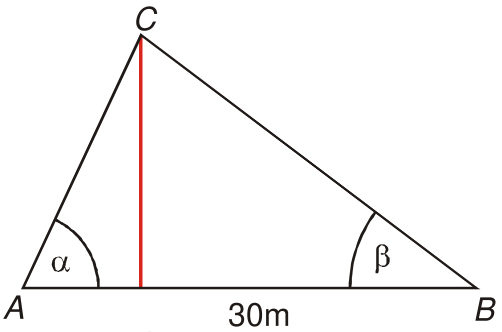
$$\frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin(\pi-\alpha)} \Rightarrow \sin\beta = \frac{F_2}{F}\sin(\pi-\alpha) = \frac{120}{102,8}\sin(180°-137°) = 0,8 \Rightarrow \beta = 52°45'.$$

Na panenku působí výsledná síla 102,8 N, která se směrem síly F_1 svírá úhel $52°45'$.

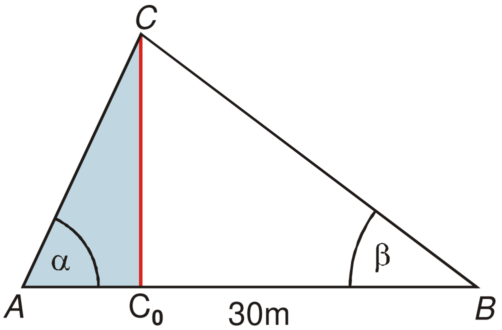
Dodatek: K připomínkám k reálnosti příkladu. Setry se mohou o panenku přetahovat i tímto způsobem bez toho, že by musela být panenka přibitá. Vzniklá výsledná síla však způsobí, že se panenka dá rychle do pohybu ve směru síly *F*, čímž se dostane mezi sestry a ty se pak o ni budou přetahovat přirozenějším způsobem - silami, které jsou navzájem opačné (což jim sice může vydržet déle, ale z početního hlediska je to daleko méně zajímavé).

Př. 3: Sbírka – Trigonometrie v praxi – Př1

Př. 4: Urči šířku řeky, jestliže na jednom přímém břehu byla vytyčena vzdálenost $|AB| = 300\,\text{m}$ a z obou těchto bodů byl zaměřen bod *C* na druhém břehu tím, že byly změřeny úhly $|\sphericalangle CAB| = \alpha = 65°$ a $|\sphericalangle CBA| = \beta = 37°$. Nakresli náčrtek situace.



Chceme v trojúhelníku určit výšku. Doplníme obrázek tak, aby vznikl trojúhelník, ze kterého by bylo možné výšku určit.



Výšku by bylo možné určit z pravoúhlého trojúhelníka ACC_0, neznáme v něm však ani jednu stranu. Strana AC jde však určit pomocí sinové věty z trojúhelníku *ABC*.

Trojúhelník ABC

Platí: $\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma} \Rightarrow$ musíme dopočítat úhel γ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (65° + 37°) = 78°$$

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma} \Rightarrow |AC| = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Teď můžeme příklad dopočítat.

Trojúhelník ACC_0

$$\sin\alpha = \frac{|CC_0|}{|AC|} \Rightarrow |CC_0| = |AC|\sin\alpha$$

Dosadíme za *AB*: $|CC_0| = |AC|\sin\alpha = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\sin\alpha$

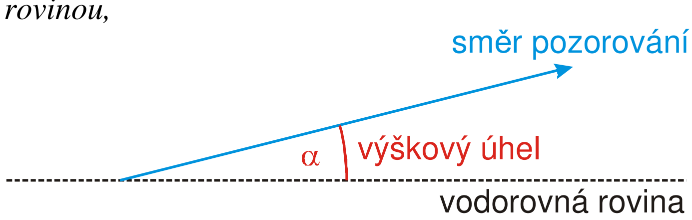
Dosadíme: $\left|CC_0\right| = \left|AB\right| \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \sin\alpha = 300 \frac{\sin 37°}{\sin 78°} \sin 65° \, \mathrm{m} = 167{,}3 \, \mathrm{m}$

Šířka řeky je 167,3 m.

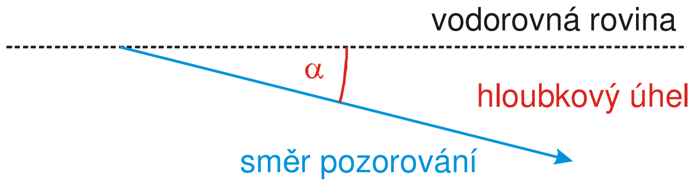
Předchozí příklad je pro praktické trigonometrické úlohy typický. Hledanou vzdálenost můžeme určit z vhodného trojúhelníku, ve kterém však nejdříve musíme určit libovolnou stranu (nebo strany dvě, když známe pouze jeden úhel). Ve složitějších příkladech pak nepočítáme ze zadání hned konečný trojúhelník, ale musíme nejdříve spočítat trojúhelník, ze kterého teprve počítáme trojúhelník konečný. Někdy je postupných trojúhelníků více.
Při hledání cesty od zadání k výsledku můžeme postupovat dvěma způsoby (nejvýhodnější je většinou oba postupy kombinovat):

- **od začátku**: najdeme trojúhelník, který je určen ze zadání, a z něj postupně počítáme další vzdálenosti a úhly,
- **od konce**: najdeme trojúhelník, ze kterého můžeme spočítat výsledek, a postupně koukáme, jak se k němu dostat ze zadání.

V trigonometrických příkladech se často používají tři pojmy:
***výškový úhel** – úhel, který svírá směr, kterým pozorujeme předmět ve výšce s vodorovnou rovinou,*



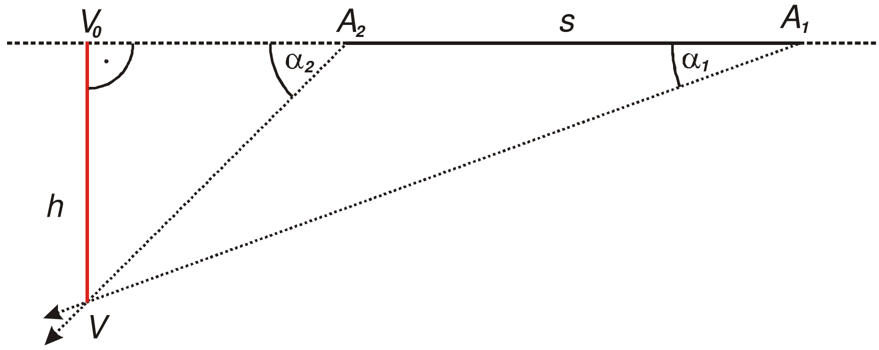
***hloubkový úhel** – úhel, který svírá směr, kterým pozorujeme předmět v hloubce s vodorovnou rovinou,*



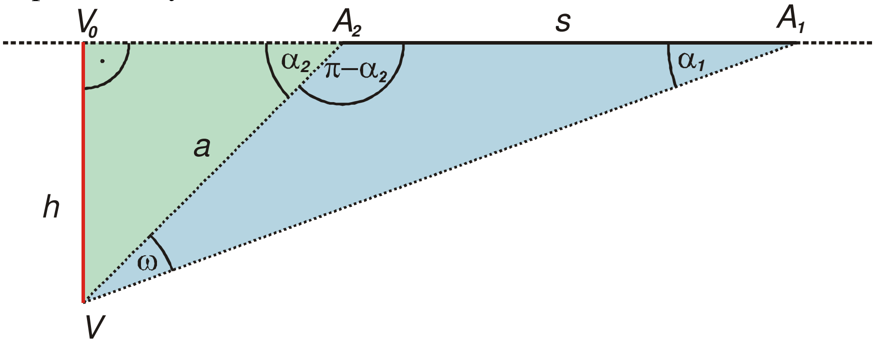
***zorný úhel** – úhel, který spolu svírají směry, kterými pozorujeme dvě nejodlehlejší místa předmětu (nebo také úhel pod kterým vidíme předmět).*

Dodatek: Právě velikost zorného úhlu rozhoduje o tom, jestli dokážeme navzájem rozlišit dva body na předmětu, proto při pozorování podrobností přibližujeme předměty k oku, abychom zorný úhel zvětšili.

Př. 5: Pilot letadla letícího vodorovně rychlostí 250 m/s vidí řídící věž letiště v hloubkovém úhlu $\alpha_1 = 20°$. Po dvou sekundách letu přímo k věži se úhel zvětšil na $\alpha_2 = 45°$. Urči výšku letu letadla.



Výšku můžeme spočítat z trojúhelníku A_2VV_0, v něm však neznáme žádnou stranu. Musíme tedy v trojúhelníku A_1A_2V určit společnou stranu A_2V $\Rightarrow$ musíme v trojúhelníku A_1A_2V dopočítat úhly.



Výpočet strany $a = A_2V$ z trojúhelníku A_1A_2V (modrý trojúhelník):
Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu $\Rightarrow$ sinová věta.
Určíme úhel ω: $\alpha_1 + (180° - \alpha_2) + \omega = 180° \Rightarrow \varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1 = 45° - 20° = 25°$.

$$\frac{s}{\sin\omega} = \frac{a}{\sin\alpha_1} \Rightarrow a = s\frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega}.$$

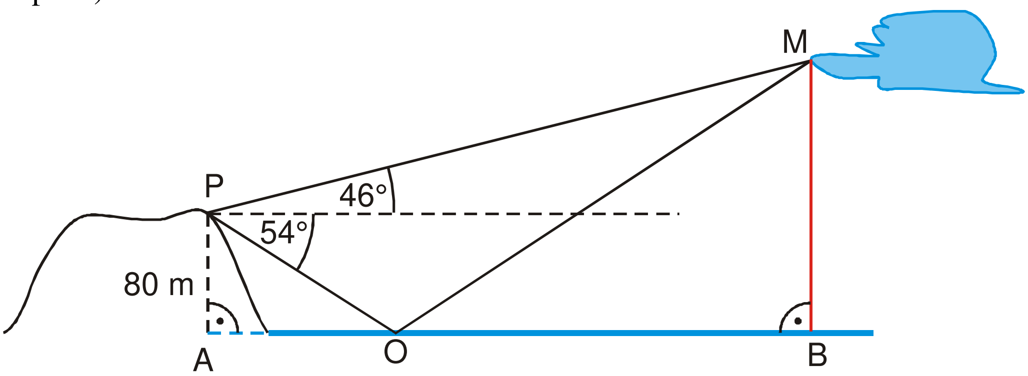
Výpočet strany $h = V_0V$ z trojúhelníku A_2VV_0 (zelený trojúhelník):
Trojúhelník je pravoúhlý, platí: $\sin\alpha_2 = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \sin\alpha_2$.

Dosadíme za a: $h = a \cdot \sin\alpha_2 = s\frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega}\sin\alpha_2$.

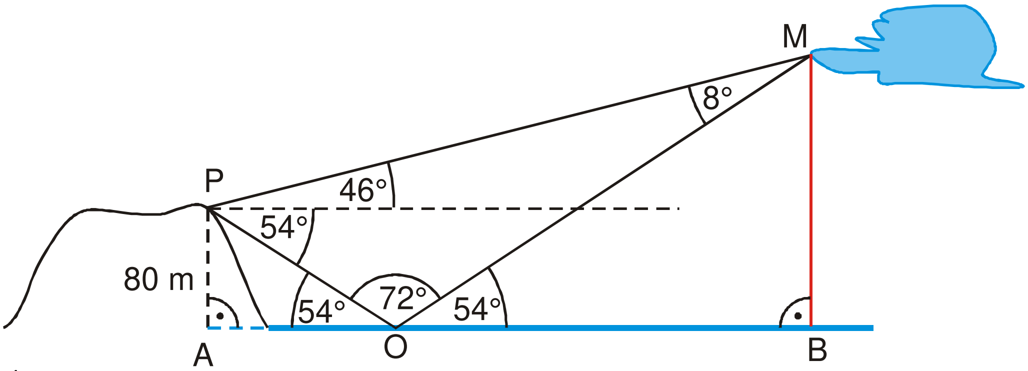
Vypočteme hodnotu: $h = s\frac{\sin\alpha_1}{\sin\omega}\sin\alpha_2 = 500\frac{\sin 20°}{\sin 25°}\sin 45° \text{m} = 286{,}1\,\text{m}$.
Letadlo letí ve výšce 286 m.

Př. 6: Z výšiny ležící 80 m nad hladinou přehrady je vidět mrak ve výškovém úhlu $46°$ a jeho obraz ve vodě v hloubkovém úhlu $54°$. Jak vysoko nad hladinou přehrady je se mrak nachází?

Nakreslíme si obrázek situace. Z jednoho místa mraku dopadají do oka dva paprsky: první leží přímo, druhý do oka dopadá po odrazu od hladiny nádrže (úhel odrazu se rovná úhlu dopadu).



Dopočteme úhly v obrázku:



Úhel *POA* je střídavý s hloubkovým úhlem $54°$, úhel *MOB* je shodný s úhlem *POA*. Úhel *POM* je zbytek do $180°$. Úhel *PMO* dopočteme ze součtu úhlů v trojúhelníku.

Příklad můžeme řešit ve třech krocích:

- délka úsečky *PO* z pravoúhlého trojúhelníku *AOP*,
- délka úsečky *OM* z obecného trojúhelníku *PMO*,
- délka úsečky *MB* z pravoúhlého trojúhelníku *MOB*.

Délka úsečky *PO* z pravoúhlého trojúhelníku *AOP*

Platí: $\sin 54° = \frac{|AP|}{|OP|} \Rightarrow |OP| = \frac{|AP|}{\sin 54°} = \frac{80}{\sin 54°}\ \text{m} = 98{,}89\ \text{m}$

Délka úsečky *OM* z obecného trojúhelníku *PMO*

Sinová věta: $\frac{|OP|}{\sin 8°} = \frac{|MO|}{\sin(46° + 54°)} \Rightarrow |MO| = |OP|\frac{\sin 100°}{\sin 8°} = 98{,}89 \cdot \frac{\sin 100°}{\sin 8°}\ \text{m} = 699{,}7\ \text{m}$

Délka úsečky *MB* z pravoúhlého trojúhelníku *MOB*

Platí: $\sin 54° = \frac{|MB|}{|MO|} \Rightarrow |MB| = \sin 54° \cdot |MO| = \sin 54° \cdot 699{,}7\ \text{m} = 566{,}1\ \text{m}$

Pozorovaný bod mraku je v daném okamžiku ve přibližně výšce 571 metrů nad hladinou přehrady.

Dodatek: Pokud si odvodíme obecný vztah:

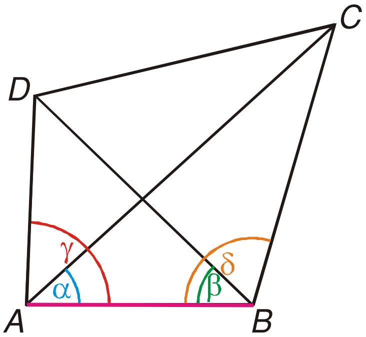
$$|MB| = \sin 54° \cdot |MO| = \sin 54° \cdot \frac{\sin 100°}{\sin 8°} \cdot |OP| = \sin 54° \cdot \frac{\sin 100°}{\sin 8°} \cdot \frac{|AP|}{\sin 54°} = \frac{\sin 100°}{\sin 8°} \cdot |AP|$$

, zjistíme, že ve vztahu nevystupuje úhel $54°$. Je to snáze pochopitelné, když si uvědomíme, že trojúhelníky *AOP* a *BOM* jsou si podobné a můžeme tedy rovnou psát: $\frac{|AP|}{|OP|} = \frac{|MB|}{|MO|} \Rightarrow |MB| = |MO| \cdot \frac{|AP|}{|OP|}$. Poměr $\frac{|AP|}{|OP|}$ v získaném vztahu můžeme ze sinové věty nahradit poměrem $\frac{\sin 100°}{\sin 8°}$.

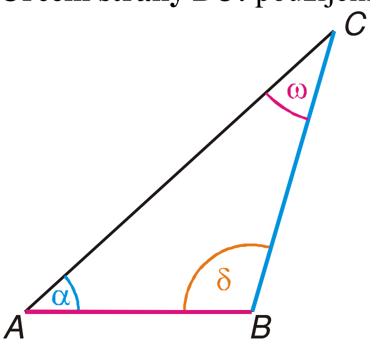
Něco těžšího na závěr.

Př. 7: Urči vzdálenost dvou nepřístupných bodů *C*, *D*, jestliže znáš vzdálenost dvou přístupných bodů *A*, *B* $|AB| = 15\,\text{km}$ a následující úhly: $|\sphericalangle CAB| = \alpha = 42°15'$, $|\sphericalangle BAD| = \gamma = 87°30'$, $|\sphericalangle DBA| = \beta = 43°55'$ a $|\sphericalangle ABC| = \delta = 106°40'$.

Nakreslíme si obrázek.



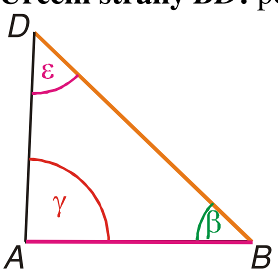
Vzdálenost bodů *C*, *D* můžeme určit ze dvou trojúhelníků: *ACD* nebo *BCD*. U obou známe pouze jeden úhel, musíme tedy spočítat obě další strany.
Na volbě nezáleží, zvolíme například trojúhelník *BCD* $\Rightarrow$ musíme určit strany *BC* a *BD*.
Určení strany *BC*: použijeme trojúhelník *ABC*.



Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu $\Rightarrow$ sinová věta
Určíme úhel ω: $\alpha + \delta + \omega = 180° \Rightarrow \omega = 180° - (\alpha + \delta) = 180° - (42°15' + 106°40') = 31°5'$.

$$\frac{|AB|}{\sin\omega} = \frac{|BC|}{\sin\alpha} \Rightarrow |BC| = |AB|\frac{\sin\alpha}{\sin\omega} = 15\frac{\sin 42°15'}{\sin 31°5'}\,\text{km} = 19{,}53\,\text{km}$$

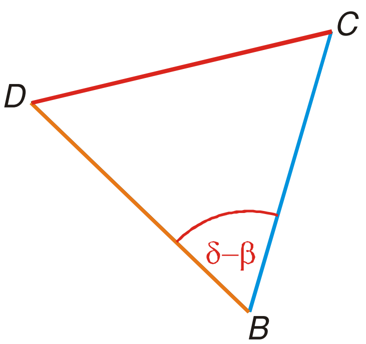
Určení strany *BD*: použijeme trojúhelník *ABD*.



Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu $\Rightarrow$ sinová věta.
Určíme úhel ε: $\gamma + \beta + \varepsilon = 180° \Rightarrow \varepsilon = 180° - (\gamma + \beta) = 180° - (87°30' + 43°55') = 48°35'$.

$$\frac{|AB|}{\sin\varepsilon} = \frac{|BD|}{\sin\gamma} \Rightarrow |BD| = |AB|\frac{\sin\gamma}{\sin\varepsilon} = 15\frac{\sin 87°30'}{\sin 48°35'}\,\text{km} = 19{,}98\,\text{km}$$

Určení strany *CD* v trojúhelníku *BCD*



Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme třetí stranu $\Rightarrow$ kosinová věta.

$$|CD|^2 = |BD|^2 + |BC|^2 - 2|BD||BC|\cos(\delta-\beta)$$

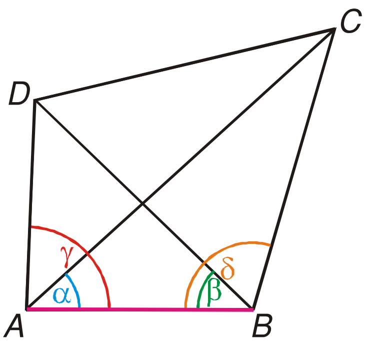
$$|CD| = \sqrt{|BD|^2 + |BC|^2 - 2|BD||BC|\cos(\delta-\beta)}$$

$$|CD| = \sqrt{19{,}98^2 + 19{,}53^2 - 2\cdot 19{,}98\cdot 19{,}53\cos(106°40' - 43°55')}\ \text{km} = 20{,}57\ \text{km}$$

Vzdálenost bodů *CD* je 20,6 km.

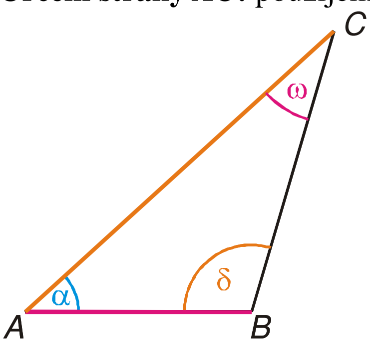
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jedním z těch, které zcela ztrácí smysl, když se řeší na tabuli. Jeho hlavním úskalím je orientace a tu nejde nacvičit jinak než samostatným výpočtem.

Př. 8: Vypočti předchozí příklad tím, že určíš trojúhelník *ACD*.



Zvolíme trojúhelník *ACD* $\Rightarrow$ musíme určit strany *AC* a *AD*.

Určení strany *AC*: použijeme trojúhelník *ABC*.

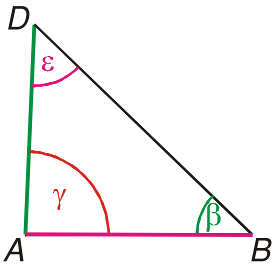


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu $\Rightarrow$ sinová věta

Určíme úhel ω: $\alpha+\delta+\omega = 180° \Rightarrow \omega = 180° - (\alpha+\delta) = 180° - (42°15' + 106°40') = 31°5'$.

$$\frac{|AB|}{\sin\omega} = \frac{|AC|}{\sin\delta} \Rightarrow |AC| = |AB|\frac{\sin\delta}{\sin\omega} = 15\frac{\sin 106°40'}{\sin 31°5'}\ \text{km} = 27{,}83\ \text{km}$$

Určení strany *AD*: použijeme trojúhelník *ABD*.

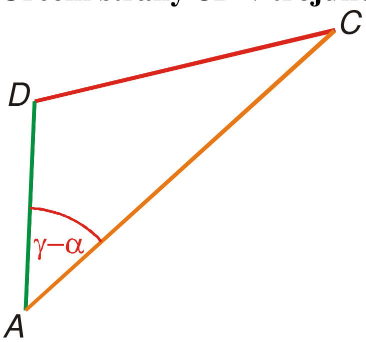


Známe jednu stranu a všechny úhly, chceme druhou stranu $\Rightarrow$ sinová věta.

Určíme úhel ε: $\gamma+\beta+\varepsilon=180° \Rightarrow \varepsilon=180°-(\gamma+\beta)=180°-(87°30'+43°55')=48°35'$.

$$\frac{|AB|}{\sin\varepsilon}=\frac{|AD|}{\sin\beta} \Rightarrow |AD|=|AB|\frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon}=15\frac{\sin 43°55'}{\sin 48°35'}\,\text{km}=13,87\,\text{km}$$

Určení strany *CD* v trojúhelníku *ACD*



Známe dvě strany a úhel mezi nimi, chceme třetí stranu $\Rightarrow$ kosinová věta.

$$|CD|^2=|AD|^2+|AC|^2-2|AD||AC|\cos(\gamma-\alpha)$$

$$|CD|=\sqrt{|AD|^2+|AC|^2-2|AD||AC|\cos(\gamma-\alpha)}$$

$$|CD|=\sqrt{13,87^2+27,83^2-2\cdot 13,87\cdot 27,83\cos(87°30'-42°15')}\,\text{km}=20,58\,\text{km}$$

Vzdálenost bodů *CD* je 20,6 km.

Dodatek: Rozdíl jedné setiny při výpočtu vzdálenosti $|CD|$ je způsoben zaokrouhlováním při postupných výpočtech předchozích vzdáleností.

Př. 9: Petáková:
strana 50/cvičení 87 b)
strana 50/cvičení 88

Shrnutí: