

5.1.5 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Předpoklady: 050102

Pedagogická poznámka: V hodině jsou z hlediska chyb dvě zajímavá místa (proto je třeba na ně mít dost času), příklad 3 a závěrečný sled příkladů 7 – 10 (tady je třeba začít minimálně 15 minut před koncem).

Prostor má tři rozměry, skládá se z bodů \Rightarrow

- přímka - jednorozměrná podmnožina prostoru (množina bodů),
- rovina - dvojrozměrná podmnožina prostoru (množina bodů).

Zápisy vztahů, které mohou nastat mezi bodem A , přímkou p a rovinou ρ :

- bod leží (neleží) na přímce: $A \in p$ ($A \notin p$),
- bod leží (neleží) v rovině: $A \in \rho$ ($A \notin \rho$),
- přímka leží (neleží) v rovině: $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$).

Př. 1: Proč se pro vztah „přímka leží v rovině“ nepoužívá zápis $p \in \rho$?

Zápis $p \in \rho$ znamená, že přímka p je prvkem roviny ρ . To však není pravda, protože rovina ρ se neskládá z přímek, ale z bodů.

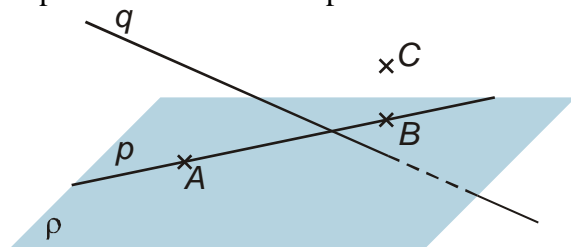
Stejně situace, ale pohled na vztahy z druhé strany:

- přímka prochází (neprochází) bodem: $A \in p$ ($A \notin p$),
- rovina prochází bodem (neprochází): $A \in \rho$ ($A \notin \rho$),
- rovina prochází přímkou (neprochází): $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$).

V obou případech používáme stejný zápis, ale různá vyjádření (podle toho zda je první bod nebo přímka) \Rightarrow existuje i „symetrické“ vyjádření tohoto vztahu:

Bod leží na přímce (přímka prochází bodem) \Leftrightarrow **bod je incidentní s přímkou** (přímka je incidentní s bodem).

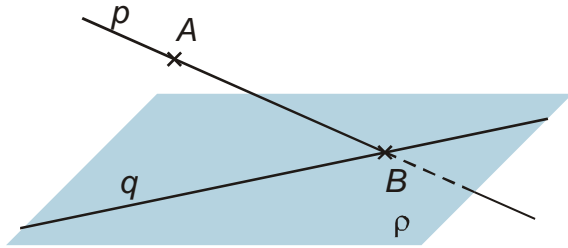
Př. 2: Zapiš situaci na obrázku pomocí vztahů mezi body, přímkami a rovinou.



$A \in p, A \in \rho, A \notin q$
 $B \in p, B \in \rho, B \notin q$
 $C \notin p, C \notin \rho, C \notin q$
 $p \subset \rho, q \not\subset \rho$

Př. 3: Nakresli obrázek, který odpovídá situaci: $A \in p$, $p \not\subset \rho$, $B \in p$, $B \in q$, $q \subset \rho$.

Bod B leží na obou přímkách (leží tedy v jejich průsečíku) a zároveň v rovině $\rho \Rightarrow$ přímky p, q se protínají v rovině ρ a tento průsečík se jmenuje B .



Pedagogická poznámka: Obrázek je třeba zkontrolovat u každého z žáků. Dobře vypovídá o tom, zda na papíře prostorově „vidí“ nebo ne. Na mnoha obrázcích není dobře nakreslená přímka p (nemá žádné šrafování, je rovnoběžná se stranou rovnoběžníka, který představuje rovinu), mnohé jsou špatně (nejčastěji přímka p vniká do roviny v jiném místě než je bod B , což by znamenalo, že se musí zahnout).

Víme už z planimetrie:

Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka \Rightarrow proto můžeme psát přímka p nebo přímka AB ($\Leftrightarrow AB$).

Př. 4: Dopln souvětí.

a) Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ , pak ...

b) Jestliže v rovině ρ leží dva body A, B , které určují přímku p , pak ...

a) Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ , pak bod A leží v rovině ρ .

b) Jestliže v rovině ρ leží dva body A, B , které určují přímku p , pak přímka p leží v rovině ρ .

Př. 5: Najdi všechny způsoby, jak může být pomocí bodů a přímek určena rovina.

Každá rovina je jednoznačně určena:

- **třemi body, které neleží v téže přímce** \Rightarrow u bodů A, B, C pak mluvíme o rovině ABC ($\Leftrightarrow ABC$),
- **přímkou a bodem, který na ní neleží** \Rightarrow u bodu A a přímky p pak mluvíme o rovině Ap ($\Leftrightarrow Ap$),
- **dvěma různoběžnými přímkami** \Rightarrow u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\Leftrightarrow pq$),
- **dvěma různými rovnoběžnými přímkami** \Rightarrow u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\Leftrightarrow pq$).

Pedagogická poznámka: Samozřejmě je třeba všechny možnosti ihned demonstrovat.

Př. 6: Vysvětli, proč se čtyřnohý stůl může na rozdíl od trojnohého kývat.

Teoretický matematický pohled říká, že je to kvůli tomu, že tři body (místa, kde se nohy dotýkají země) určují rovinu (a tedy vždy v ní leží), zatímco čtyři body v rovině ležet nemusí. Při hlubším zamyšlení tato argumentace neobstojí, protože i čtyřnohý stůl s jednou kratší nohou se dotýká země ve třech bodech, je tedy fakticky trojnohý, přesto se většinou se kývá. Důvod je v konstrukci. Nohy se ke stolu montují tak, aby těžiště stolu (místo, kde musíme stůl podepřít, aby se nepřevrátil) bylo mezi nohami. Pokud jsou nohy jen tři, je to v pořádku. Pokud jsou nohy čtyři, nachází se těžiště většinou nad průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku, který tvoří místa dotyku noh se zemí. Pokud je takový stůl opřen pouze o tři nohy, je těžiště fakticky zcela na kraji podepřené plochy a stůl se tak snadno překloupí (na čtvrtou nohu).

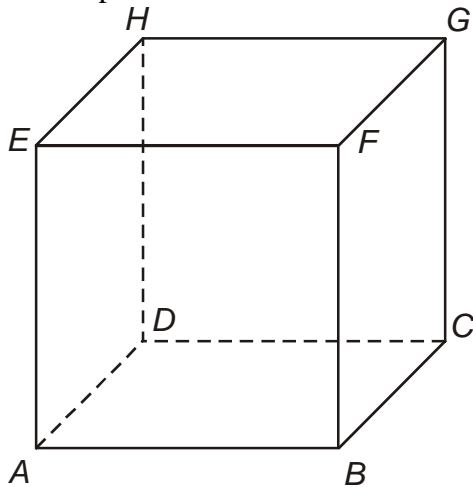
V planimetrii rozděluje přímka rovinu na dvě poloroviny. \Rightarrow Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich společnou hraniční rovinou.

Stejně jako v planimetrii platí:

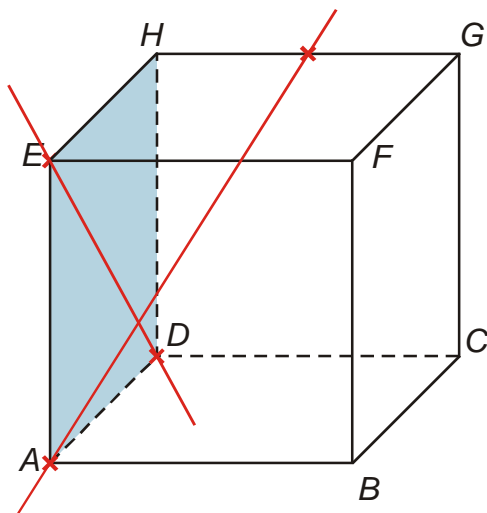
Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka spojující kterékoli dva body útvaru je částí tohoto útvaru.

Domluva:

- S_{AB} - znamená střed úsečky AB ,
- standardní krychli budeme nazývat krychli $ABCDEFGH$ nakreslenou v následující poloze.



Př. 7: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky ED , AS_{GH} a rozhodni, zda leží v rovině ADE .

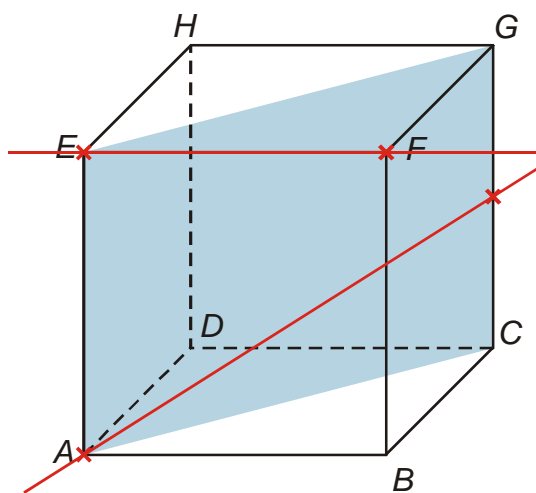


Z obrázku je zřejmé, že:

- $\leftrightarrow ED \subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině leží body E, D ,
- $\leftrightarrow AS_{GH} \not\subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině neleží bod S_{GH} .

Pedagogická poznámka: Studenti v tomto okamžiku ještě neumí kreslit řezy, takže mohou mít problémy s nakreslením roviny ADE a zejména roviny ACG v následujícím příkladu. Většina z nich to zvládne intuitivně, ostatním je třeba ukázat, že rovinu ADE nekreslíme jako trojúhelník ADE , protože rovina je nekonečná a leží v ní celá stěna $ADHE$. Někteří žáci se diví, proč se rovina ADE neznačí jako $ADHE$. Těm vysvětlují, že snažíme o maximální úspornost a čtvrtý bod v označení roviny je zbytečný a spíše matoucí. Pro žáky, kteří udělali v jednu z obou příkladů chybu je určen jako domácí úkol příklad 10 na konci hodiny.

Př. 8: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky EF , AS_{CG} a rozhodni, zda leží v rovině ACG .



Z obrázku je zřejmé, že:

- $\leftrightarrow EF \not\subset \leftrightarrow ACG$, protože v rovině neleží bod F ,
- $\leftrightarrow AS_{CG} \subset \leftrightarrow ACG$, protože v rovině ACG leží bod S_{CG} .

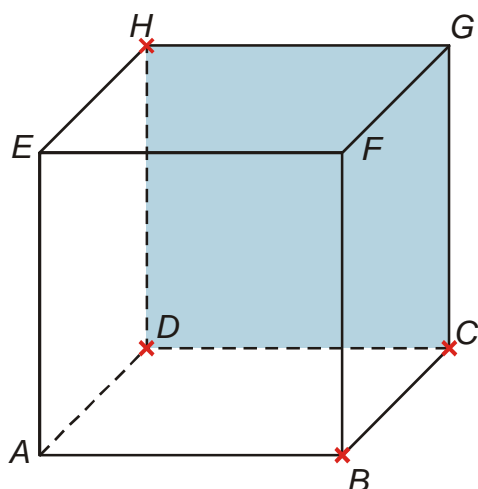
Pedagogická poznámka: Studenti, kteří si nevšimnou, že přímka EF v rovině ACG neleží, budou mít v následujících hodinách problémy a je potřeba dávat zvláštní pozor, zda si uvědomují (a hlavně se podle toho chovají), že ne vše, co vidí na obrázku, je stejné ve skutečnosti.

Př. 9: Je dána standardní krychle. Rozhodni, zda leží v jedné rovině body:

a) B, D, G, H

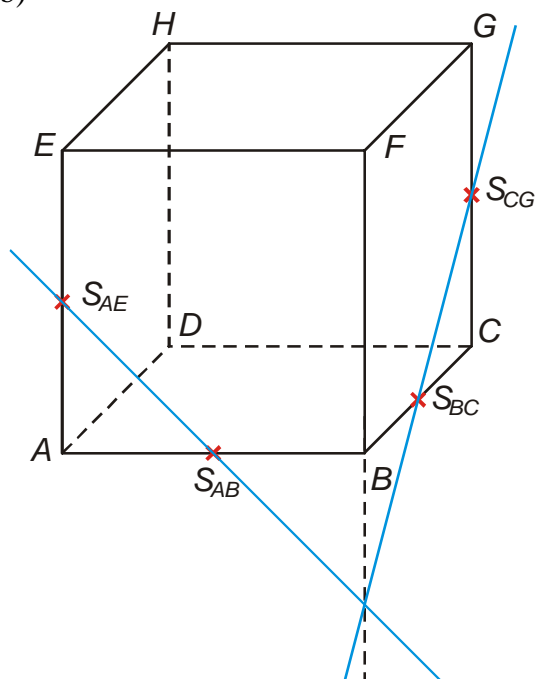
b) $S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}$.

a)



Z obrázku je zřejmé, že body B, D, G, H neleží v rovině, protože body D, G, H leží v zadní stěně, zatímco bodu B v přední stěně.

b)

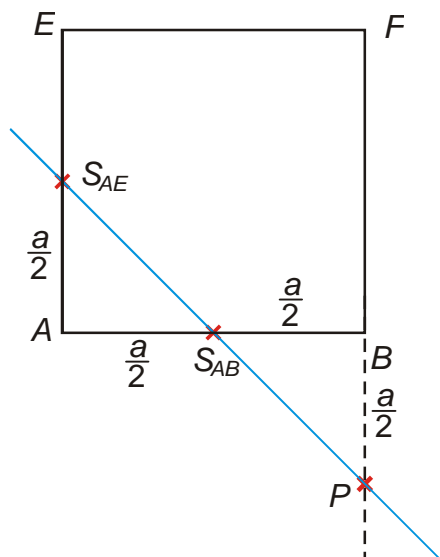


Z obrázku není poloha bodů zcela zřejmá \Rightarrow zkusíme použít jedno z kritérií určení roviny – rovina je určena dvojicí různoběžek (v našem případě přímek $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$).

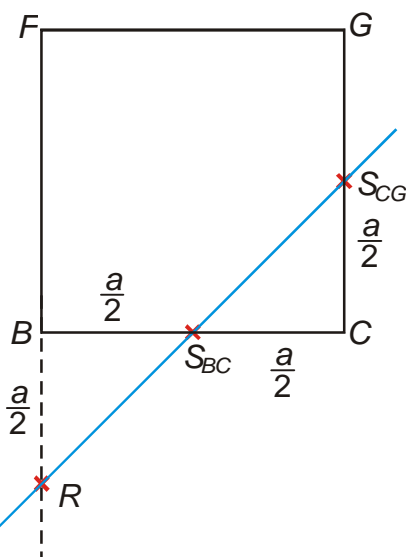
Jsou přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ různoběžné?

Musel by existovat společný průsečík.

Z obrázku je vidět, že by průsečík mohl existovat na přímce FB \Rightarrow nakreslíme si obrázky v rovinách ABE a BCF a spočteme, v jakém bodě se protíná s přímkou BF .



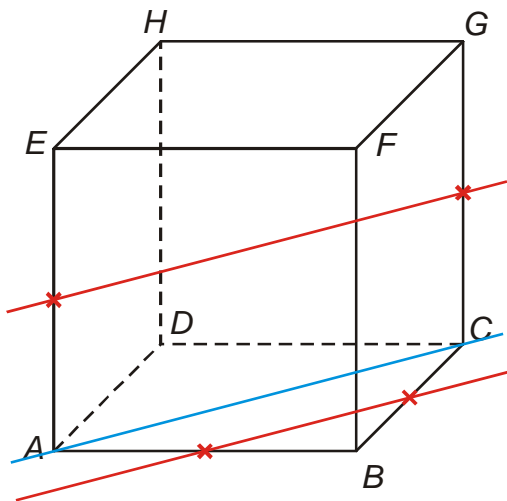
Trojúhelníky $S_{AE}AS_{AB}$ a $S_{AB}BP$ jsou shodné $\Rightarrow |BP| = \frac{a}{2}$.



Trojúhelníky $S_{CG}CS_{BC}$ a $S_{BC}BR$ jsou shodné $\Rightarrow |BR| = \frac{a}{2}$.

Body P i R jsou od bodu B stejně daleko \Rightarrow jde o jeden bod \Rightarrow přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ mají průsečík \Rightarrow jsou různoběžné \Rightarrow body $S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}$ leží v jedné rovině.

Dodatek: V bodě b) předchozího příkladu je možné argumentovat i jinak:



Zkusíme použít druhé z kritérií určení roviny – rovina je určena dvojicí různých rovnoběžek. Jsou přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ rovnoběžné? Obě jsou rovnoběžné s přímkou $AC \Rightarrow$ jsou rovnoběžné navzájem \Rightarrow body $S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG}$ leží v rovině

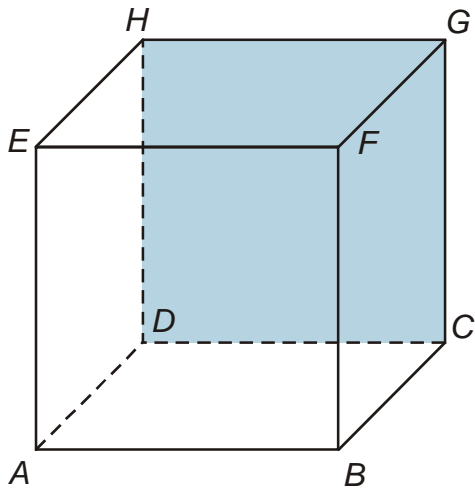
Př. 10: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku roviny:

- a) CGH , b) BGH , c) BFH , d) BCE .

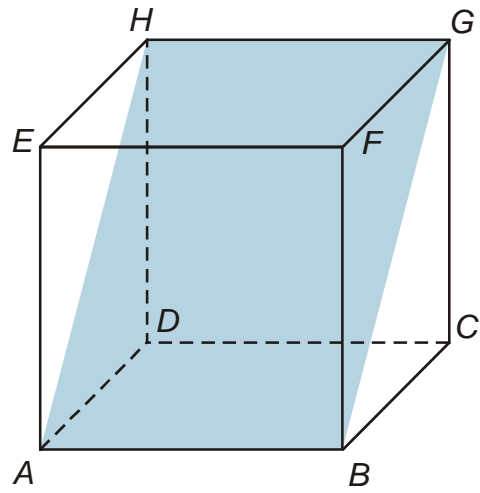
Pro každou rovinu použij nový obrázek.

a) rovina CGH

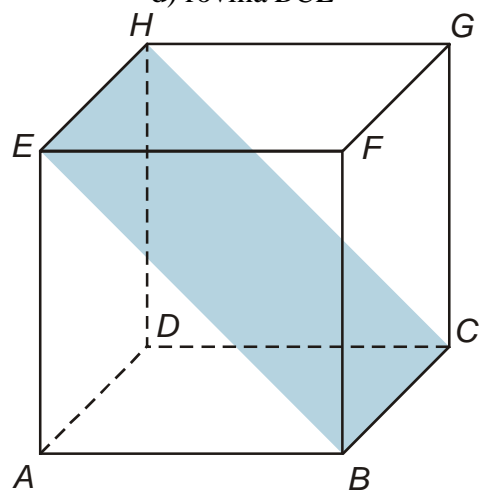
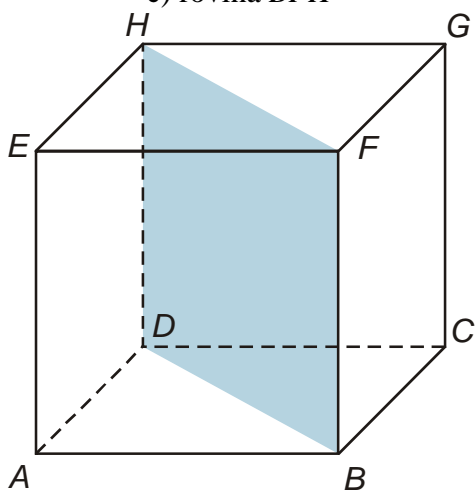
b) rovina BGH



c) rovina BFH



d) rovina BCE



Shrnutí: