

5.1.5 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Předpoklady: 5102

Prostor má tři rozměry, skládá se z bodů \Rightarrow

- přímka - jednorozměrná podmnožina prostoru (množina bodů),
- rovina - dvojrozměrná podmnožina prostoru (množina bodů).

Zápisy vztahů, které mohou nastat mezi bodem A , přímkou p a rovinou ρ :

- bod leží (neleží) na přímce: $A \in p$ ($A \notin p$),
- bod leží (neleží) v rovině: $A \in \rho$ ($A \notin \rho$),
- přímka leží (neleží) v rovině: $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$).

Př. 1: Proč se pro vztah „přímka leží v rovině“ nepoužívá zápis $p \in \rho$?

Zápis $p \in \rho$ znamená, že přímka p je prvkem roviny ρ . To však není pravda, protože rovina ρ se neskládá z přímek, ale z bodů.

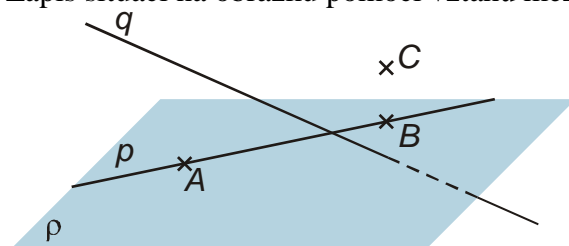
Stejně situace, ale pohled na vztahy z druhé strany:

- přímka prochází (neprochází) bodem: $A \in p$ ($A \notin p$),
- rovina prochází bodem (neprochází): $A \in \rho$ ($A \notin \rho$),
- rovina prochází přímkou (neprochází): $p \subset \rho$ ($p \not\subset \rho$).

V obou případech používáme stejný zápis, ale různá vyjádření (podle toho zda je první bod nebo přímka) \Rightarrow existuje i „symetrické“ vyjádření tohoto vztahu:

Bod leží na přímce (přímka prochází bodem) \Leftrightarrow **bod je incidentní s přímkou** (přímka je incidentní s bodem).

Př. 2: Zapiš situaci na obrázku pomocí vztahů mezi body, přímkami a rovinou.



$$A \in p, A \in \rho, A \notin q$$

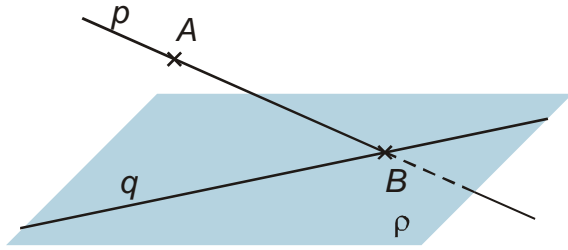
$$B \in p, B \notin \rho, B \notin q$$

$$C \notin p, C \notin \rho, C \notin q$$

$$p \subset \rho, q \not\subset \rho$$

Př. 3: Nakresli obrázek, který odpovídá situaci: $A \in p$, $p \not\subset \rho$, $B \in p$, $B \in q$, $q \subset \rho$.

Bod B leží na obou přímkách (leží tedy v jejich průsečíku) a zároveň v rovině $\rho \Rightarrow$ přímky p, q se protínají v rovině ρ a tento průsečík se jmenuje B .



Víme už z planimetrie:

Každými dvěma různými body je určena právě jedna přímka \Rightarrow proto můžeme psát přímka p nebo přímka AB ($\leftrightarrow AB$).

Př. 4: Dopln souvětí.

a) Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ , pak ...

b) Jestliže v rovině ρ leží dva body A, B , které určují přímku p , pak ...

a) Jestliže bod A leží na přímce p a přímka p leží v rovině ρ , pak bod A leží v rovině ρ .

b) Jestliže v rovině ρ leží dva body A, B , které určují přímku p , pak přímka p leží v rovině ρ .

Př. 5: Najdi všechny způsoby, jak může být pomocí bodů a přímek určena rovina.

Každá rovina je jednoznačně určena:

- **třemi body, které neleží v téže přímce** \Rightarrow u bodů A, B, C pak mluvíme o rovině ABC ($\leftrightarrow ABC$),
- **přímkou a bodem, který na ní neleží** \Rightarrow u bodu A a přímky p pak mluvíme o rovině Ap ($\leftrightarrow Ap$),
- **dvěma různoběžnými přímkami** \Rightarrow u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\leftrightarrow pq$),
- **dvěma různými rovnoběžnými přímkami** \Rightarrow u přímek p a q pak mluvíme o rovině pq ($\leftrightarrow pq$).

Pedagogická poznámka: Samozřejmě je třeba všechny možnosti ihned demonstrovat.

Př. 6: Vysvětli, proč se čtyřnohý stůl může na rozdíl od trojnohého kývat.

Teoretický matematický pohled říká, že je to kvůli tomu, že tři body (místa, kde se nohy dotýkají země) určují rovinu (a tedy vždy v ní leží), zatímco čtyři body v rovině ležet nemusí. Při hluším zamyšlení tato argumentace neobstojí, protože i čtyřnohý stůl s jednou kratší nohou se dotýká země ve třech bodech, je tedy fakticky trojnohý, přesto se většinou se kývá. Důvod je v konstrukci. Nohy se ke stolu montují tak, aby těžiště stolu (místo, kde musíme stůl podepřít, aby se nepřevrátil) bylo mezi nohami. Pokud jsou nohy jen tři, je to v pořádku. Pokud jsou nohy čtyři, nachází se těžiště většinou nad průsečíkem úhlopříček čtyřúhelníku,

... který tvoří místa dotyku noh se zemí. Pokud je takový stůl opřen pouze o tři nohy, je těžiště fakticky zcela na kraji podepřené plochy a stůl se tak snadno překloupí (na čtvrtou nohu).

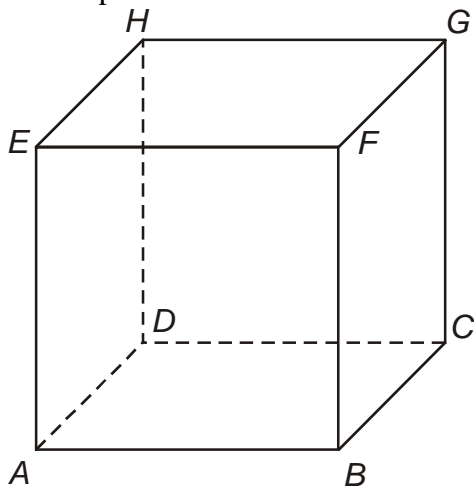
V planimetrii rozděluje přímka rovinu na dvě poloroviny. \Rightarrow Libovolná rovina rozděluje prostor na dva navzájem opačné poloprostory a je jejich společnou hraniční rovinou.

Stejně jako v planimetrii platí:

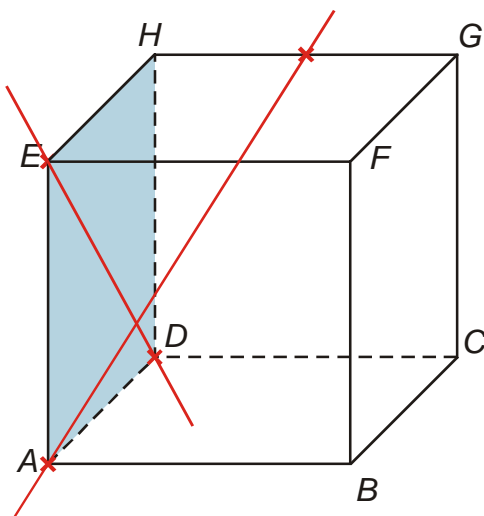
Geometrický útvar se nazývá konvexní, jestliže úsečka spojující kterékoli dva body útvaru je částí tohoto útvaru.

Domluva:

- S_{AB} - znamená střed úsečky AB ,
- standardní krychli budeme nazývat krychli $ABCDEFGH$ nakreslenou v následující poloze.

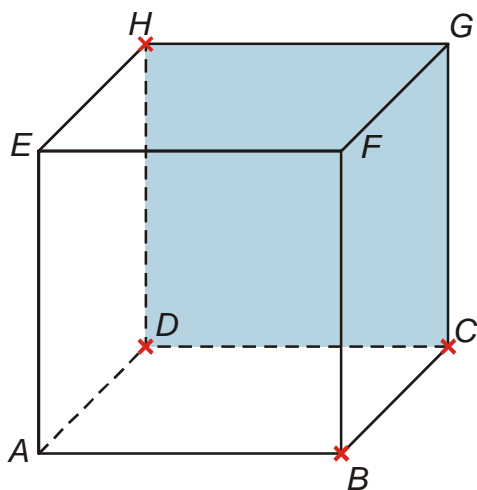


Př. 7: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku přímky ED , AS_{GH} a rozhodni, zda leží v rovině ADE .



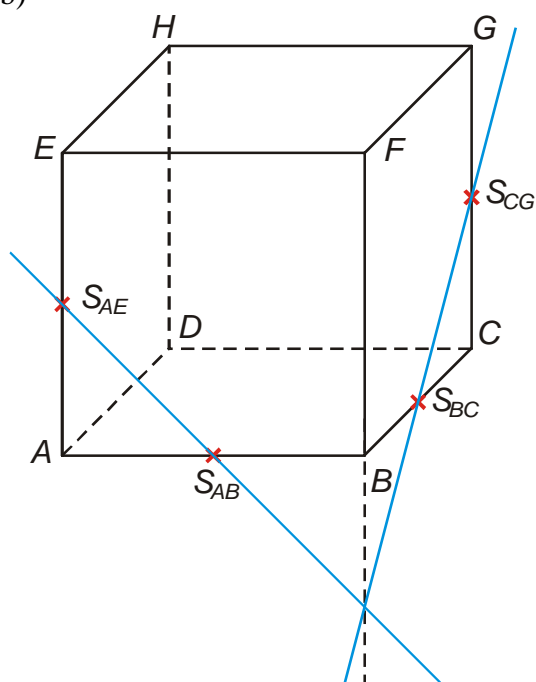
Z obrázku je zřejmé, že:

- $\leftrightarrow ED \subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině leží body E, D ,
- $\leftrightarrow AS_{GH} \not\subset \leftrightarrow ADE$, protože v rovině neleží bod S_{GH} .



Z obrázku je zřejmé, že body B, D, G, H neleží v rovině, protože body D, G, H leží v zadní stěně, zatímco bodu B v přední stěně.

b)

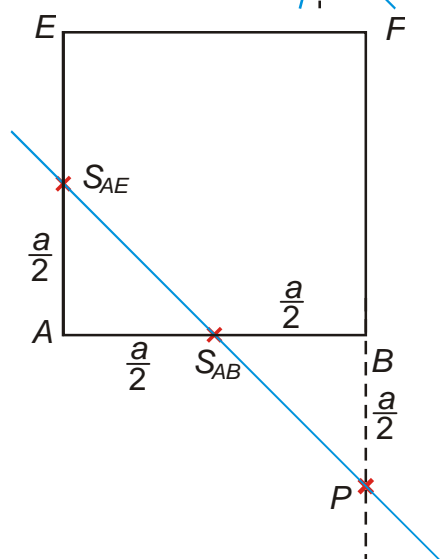


Z obrázku není poloha bodů zcela zřejmá \Rightarrow zkusíme použít jedno z kritérií určení roviny – rovina je určena dvojicí různoběžek (v našem případě přímek $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$).

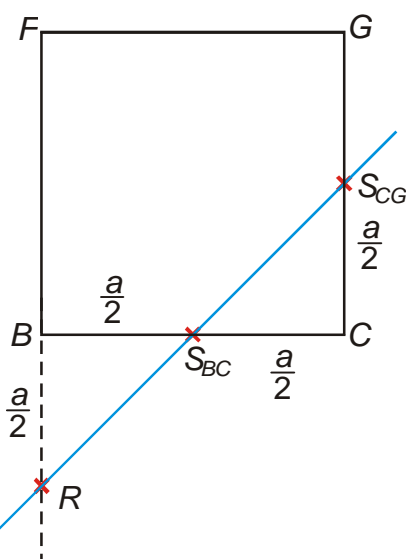
Jsou přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ různoběžné?

Musel by existovat společný průsečík.

Z obrázku je vidět, že by průsečík mohl existovat na přímce FB \Rightarrow nakreslíme si obrázky v rovinách ABE a BCF a spočteme, v jakém bodě se protíná s přímkou BF .



Trojúhelníky $S_{AE}AS_{AB}$ a $S_{AB}BP$ jsou



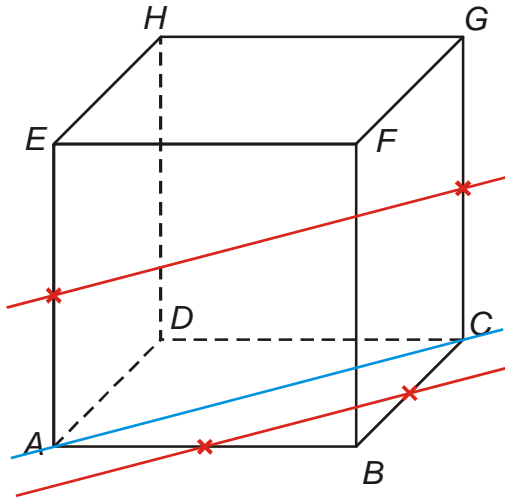
Trojúhelníky $S_{CG}CS_{BC}$ a $S_{BC}BR$ jsou shodné \Rightarrow

$$\text{shodné} \Rightarrow |BP| = \frac{a}{2}.$$

$$|BR| = \frac{a}{2}.$$

Body P i R jsou od bodu B stejně daleko \Rightarrow jde o jeden bod \Rightarrow přímky $S_{AE}S_{AB}$ a $S_{CG}S_{BC}$ mají průsečík \Rightarrow jsou různoběžné \Rightarrow body S_{AE} , S_{AB} , S_{BC} , S_{CG} leží v jedné rovině.

Dodatek: V bodě b) předchozího příkladu je možné argumentovat i jinak:

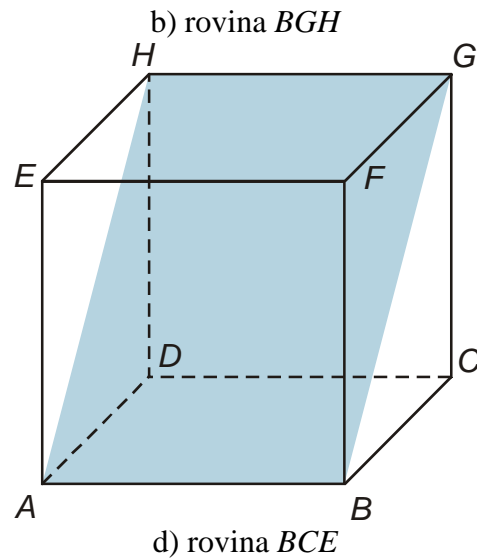
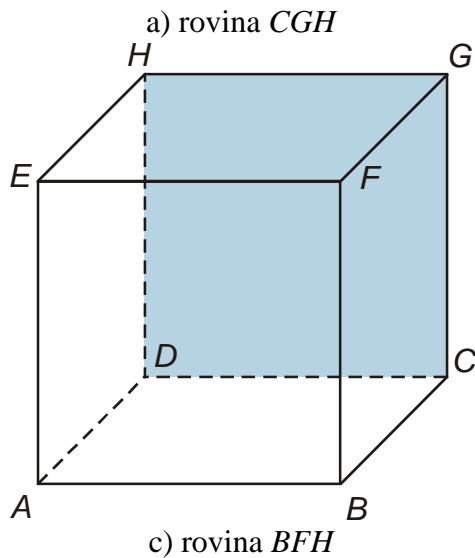


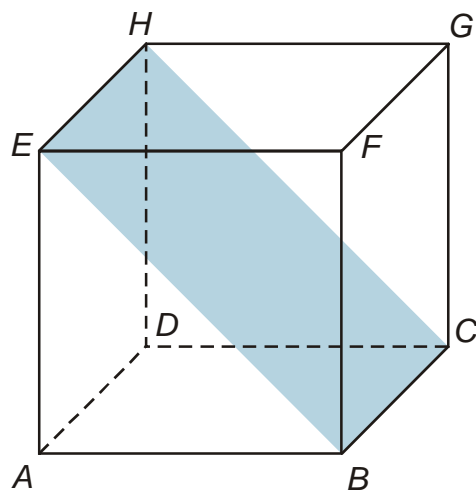
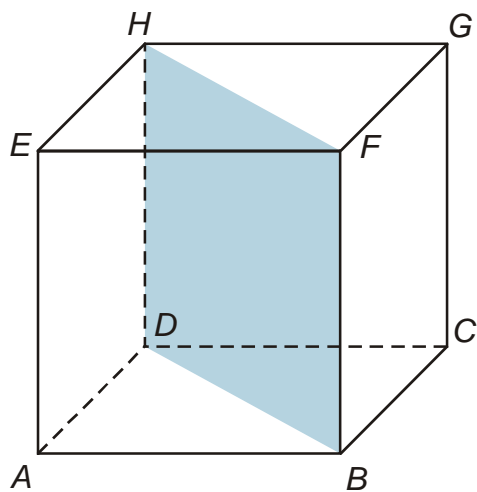
Zkusíme použít druhé z kritérií určení roviny – rovina je určena dvojicí různých rovnoběžek. Jsou přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ rovnoběžné? Obě jsou rovnoběžné s přímkou $AC \Rightarrow$ jsou rovnoběžné navzájem \Rightarrow body S_{AE} , S_{AB} , S_{BC} , S_{CG} leží v rovině

Př. 10: Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zakresli do jejího obrázku roviny:

- a) CGH , b) BGH , c) BFH , d) BCE .

Pro každou rovinu použij nový obrázek.





Shrnutí: