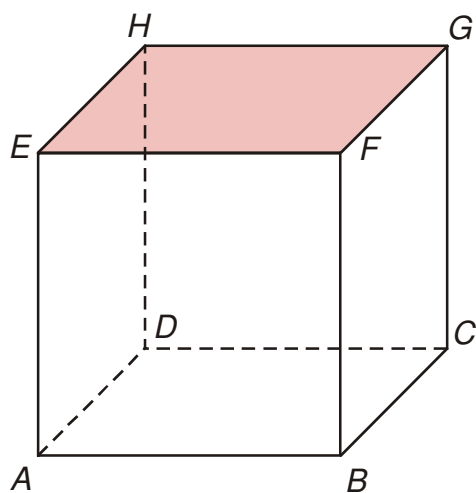


5.1.7 Vzájemná poloha přímky a roviny

Předpoklady: 5106

Pedagogická poznámka: Tato a následující hodina je obtížně říditelná. Ani jedna z těchto hodin neobsahuje nic zásadního, v případě časového skluzu je možné je nechat na samostudium.

Př. 1: Zakresli do standardní krychle rovinu EFG . Jakým jiným způsobem můžeme tuto rovinu označovat?



Rovinu můžeme označovat libovolnou kombinací tří ze čtyř vrcholů ležících v horní stěně: FGH , GHE , HEF .

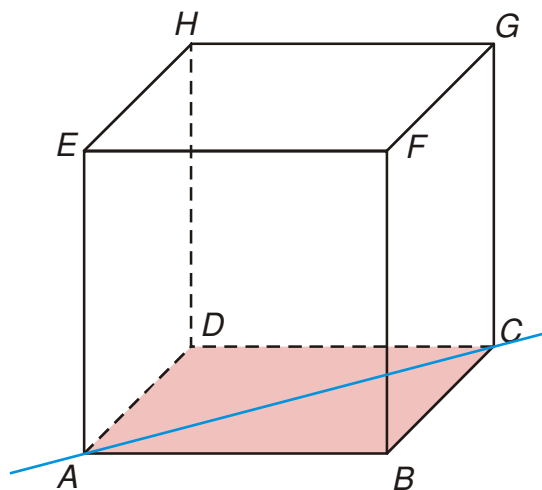
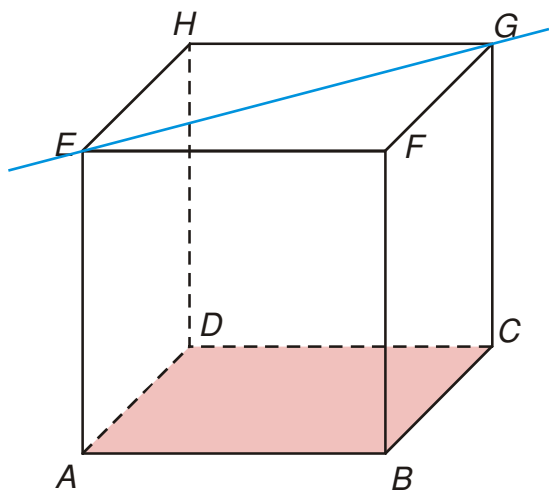
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad kontroluje, zda žáci odstranili problémy s kreslením nejjednodušších rovin (hodina 050105).

Př. 2: Kolik společných bodů může mít přímka s rovinou? Jaká je v každém takovém případě jejich vzájemná poloha? Demonstruj ve standardní krychli $ABCDEFGH$ na rovině ABC a přímkách určených jejími vrcholy.

Mohou nastat tři možnosti

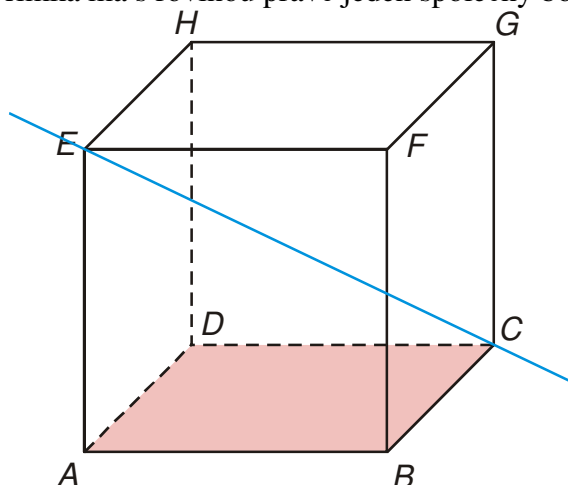
Přímka nemá s rovinou žádný společný bod.

Přímka má s rovinou nekonečně mnoho společných bodů.



Přímka je rovnoběžná s rovinou.

Přímka má s rovinou právě jeden společný bod.



Přímka je různoběžná s rovinou.

Pedagogická poznámka: Slabší žáci často vnímají rovinu ABC ohraničeně jako čtverec $ABCD$, proto při společné kontrole předchozího příkladu modelují tužkou i přímky, které se s rovinou $ABCD$ protínají mimo podstavu.

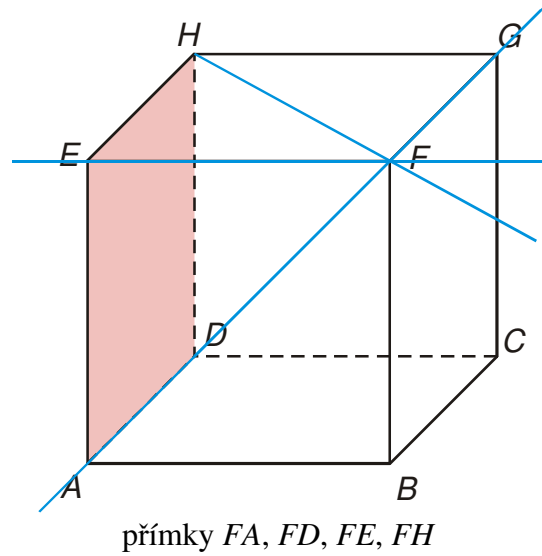
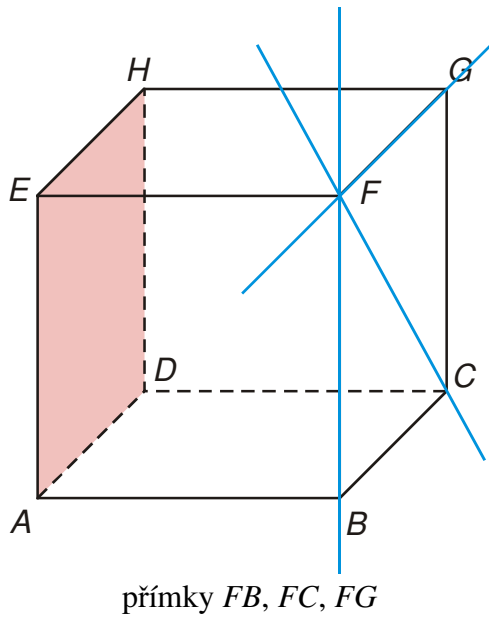
Př. 3: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči všechny přímky určené vrcholy krychle a procházející bodem F , které jsou:

a) rovnoběžné s rovinou ADE ,

b) různoběžné s rovinou ADE .

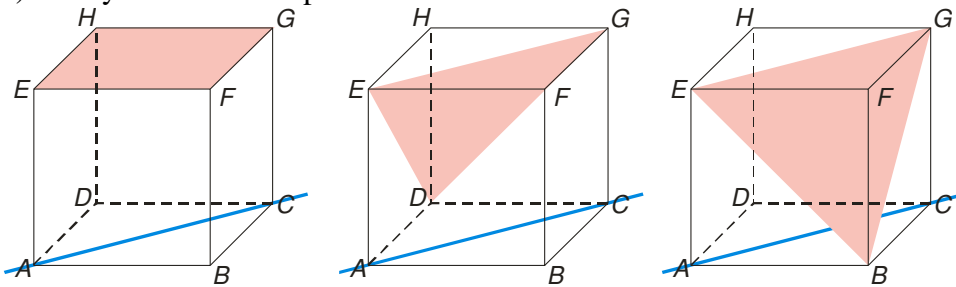
přímky rovnoběžné s rovinou ADE

přímky různoběžné s rovinou ADE



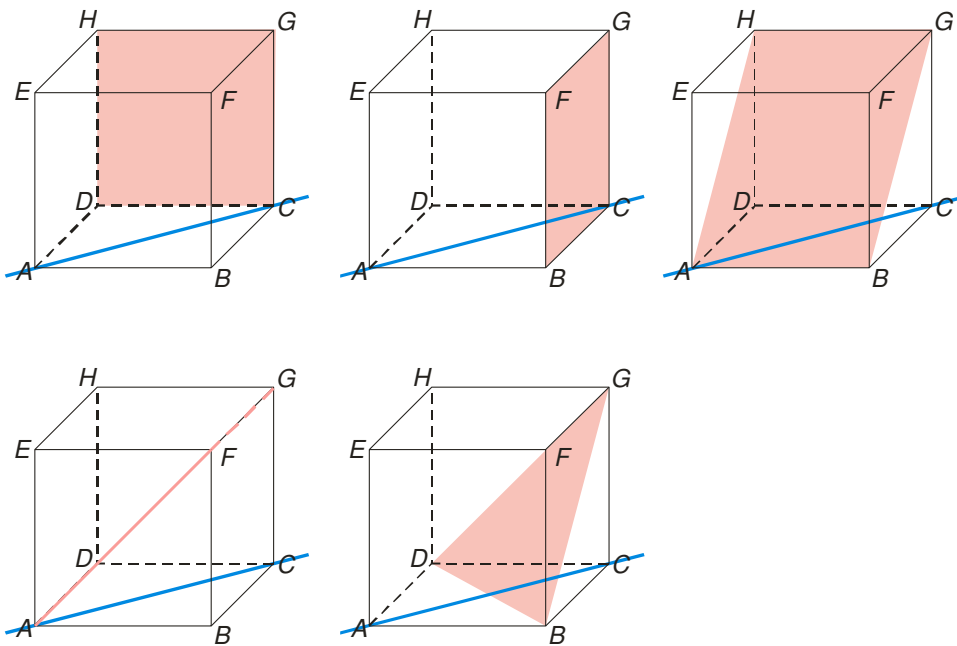
Př. 4: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči všechny roviny, které jsou určeny vrcholy krychle, prochází bodem G a jsou:
 a) rovnoběžné s přímkou AC , b) různoběžné s přímkou AC .

a) roviny rovnoběžné s přímkou AC



Tři roviny: EFG, EGD, EGB .

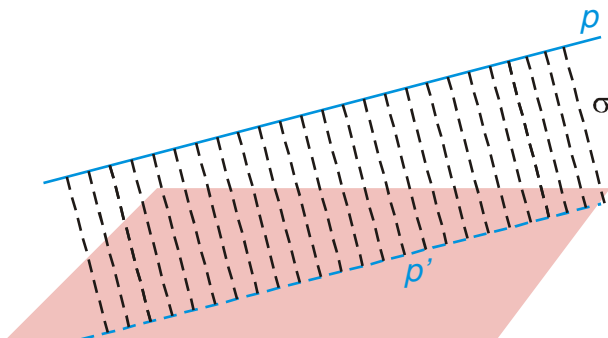
b) roviny různoběžné s přímkou AC



Pět rovin: roviny bočních stěn FGC , HGC a roviny HGB , GFD a DBG .

Jak poznáme, že je přímka rovnoběžná s rovinou?

Máme přímku p rovnoběžnou s rovinou ρ . „Spojíme“ přímku s rovinou pomocí další roviny σ_1 , která je s ρ různoběžná \Rightarrow vznikne průsečnice p_1 . Jaká je vzájemná poloha p a p_1 ?



p_1 musí být rovnoběžná s p . Proč?

Kdyby p a p_1 nebyly rovnoběžné, existoval by jejich průsečík P (p i p_1 leží v rovině σ_1 a nemohou tedy být mimoběžné) \Rightarrow Průsečík p a p_1 by ležel v rovině σ_1 i v rovině ρ (p_1 leží v obou rovinách) \Rightarrow to nemůže nastat, protože průsečík P by ležel také na přímce p , která je s ρ rovnoběžná a tedy s ní nemůže mít žádné společné body.

Pokud budeme měnit roviny σ_i , vzniknou průsečnice p_i . Všechny přímky p_i jsou navzájem rovnoběžné (tranzitivnost rovnoběžnosti).

\Rightarrow

Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny: Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , jestliže v rovině ρ leží alespoň jedna přímka p' , která je s přímkou p rovnoběžná.

Př. 5: Doplň věty:

a) Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel \rho$, pak ...

b) Je-li $p \parallel q$ a $p \parallel \rho$, pak ...

c) Je-li $p \parallel q$ a q není rovnoběžná s ρ , pak ...

a) Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel \rho$, pak $p \parallel \rho$.

b) Je-li $p \parallel q$ a $p \parallel \rho$, pak $q \parallel \rho$.

c) Je-li $p \parallel q$ a q není rovnoběžná s ρ , pak p není rovnoběžná s ρ .

Př. 6: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$. Urči vzájemnou polohu:

a) přímky $S_{EG}S_{BG}$ a roviny ABC

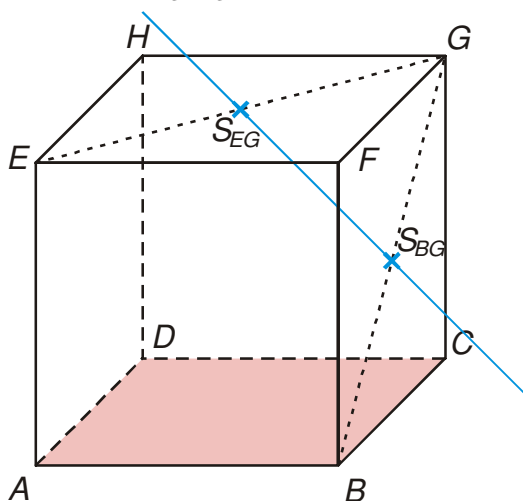
b) přímky $S_{AC}S_{BG}$ a roviny CDG

c) přímky $S_{BG}S_{AH}$ a roviny CDE

d) přímky $S_{EG}S_{BG}$ a roviny BCE

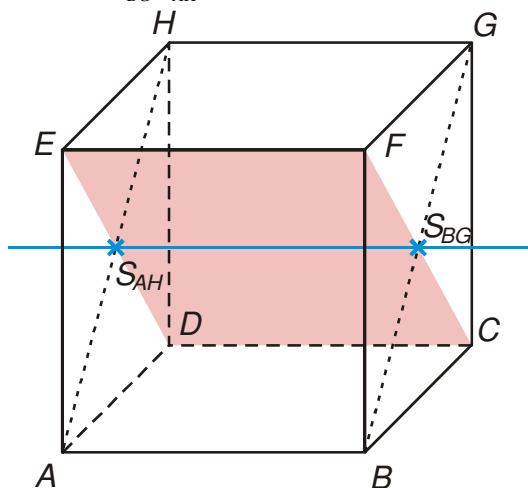
e) přímky $S_{EG}S_{BF}$ a roviny ABG

a) přímka $S_{EG}S_{BG}$ a rovina ABC

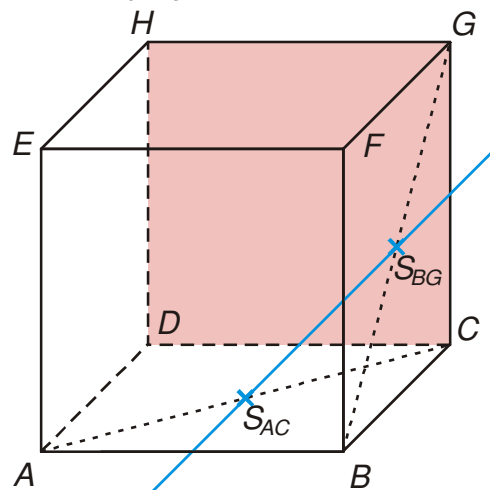


přímka $S_{EG}S_{BG}$ je různoběžná s rovinou ABC (rovina ABC je vodorovná, přímka $S_{EG}S_{BG}$ ne)

c) přímka $S_{BG}S_{AH}$ a rovina CDE

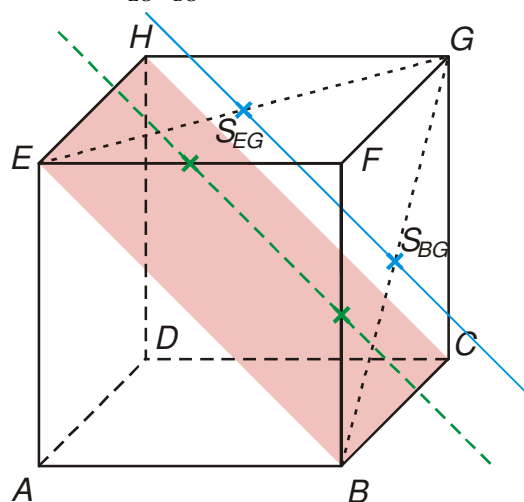


b) přímky $S_{AC}S_{BG}$ a roviny CDG



přímka $S_{AC}S_{BG}$ je rovnoběžná s přímkou $S_{CD}S_{CG}$, která leží v rovině $CDG \Rightarrow$ přímka $S_{AC}S_{BG}$ je rovnoběžná s rovinou CDG

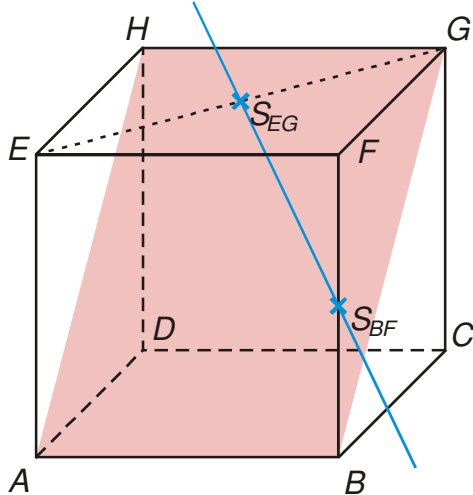
d) přímka $S_{EG}S_{BG}$ a rovina BCE



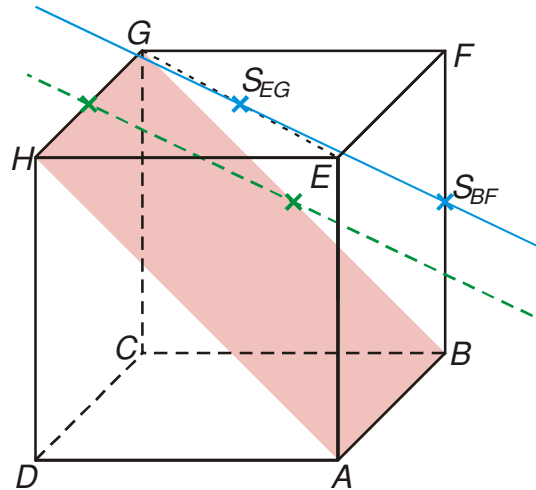
přímka $S_{BG}S_{AH}$ je rovnoběžná s rovinou CDE (leží v ní)

přímka $S_{EG}S_{BG}$ je rovnoběžná s přímkou $S_{EF}S_{BF}$, která je rovnoběžná s přímkou BE ležící v rovině $BCE \Rightarrow$ přímka $S_{EG}S_{BG}$ je rovnoběžná s rovinou BCE

e) přímka $S_{EG}S_{BF}$ a rovina ABG



zdá se, že přímka $S_{EG}S_{BF}$ je s rovinou ABG různoběžná, ale ve skutečnosti směřuje také „šikmo dolů“ \Rightarrow nakreslíme si situaci zleva



přímka $S_{EG}S_{BF}$ je rovnoběžná s přímkou $S_{HG}S_{GB}$, která leží v rovině $ABG \Rightarrow$ přímka $S_{EG}S_{BF}$ je rovnoběžná s rovinou ABG

Pedagogická poznámka: Z hlediska budoucnosti je na příkladu nejdůležitější způsob, jakým žáci kreslí roviny v bodech c) a d). Jestliže i v tomto příkladu zůstávají u trojúhelníků, signalizuje to zásadní problémy v budoucnu, je nanejvýš vhodné situaci začít řešit.

Bod e) je pro studenty poměrně obtížný. Mohou si situaci namodelovat pomocí krychličky. Pokud se jim ho nepodaří vyřešit, není na místě panikařit.

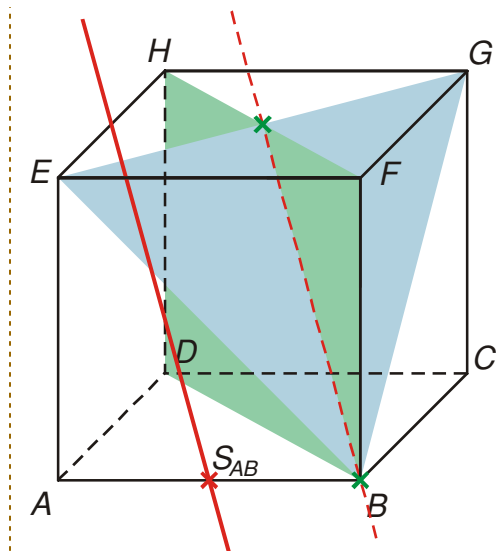
Jak najít přímku rovnoběžnou se dvěma různoběžnými rovinami?

Pokud je přímka rovnoběžná s rovinou, „rovina obsahuje její směr“ (nekonečně mnoho přímek, které v rovině leží a jsou s ní rovnoběžné) \Rightarrow obě roviny musí obsahovat její směr \Rightarrow tento směr je oběma rovinám společný \Rightarrow je to směr jejich společné přímky (průsečnice).

Př. 7: Je dána standardní krychle. Veď bodem S_{AB} přímku rovnoběžnou s rovinami BEG a BDH .

Použijeme předchozí úvahu:

- najdeme průsečnici rovin BEG a BDH ,
- v bodě S_{AB} narýsujeme rovnoběžku s nalezenou přímkou.



Př. 8: Petáková:
 strana 90/cvičení 2 a) b) c) d)
 strana 90/cvičení 5 b)

Shrnutí: Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , právě když v rovině leží přímka rovnoběžná s přímkou p .