

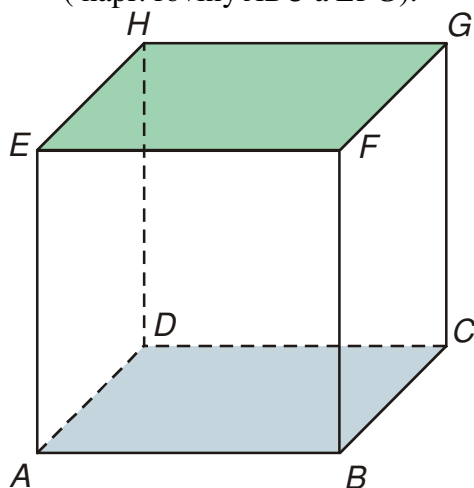
## 5.1.8 Vzájemná poloha rovin

**Předpoklady:** 5107

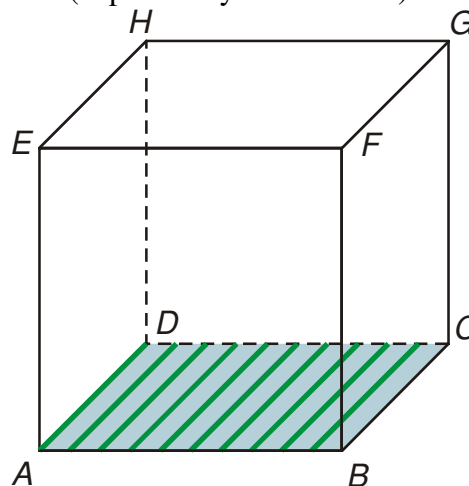
**Př. 1:** Kolik společných bodů mohou mít dvě roviny? Každou možnost dokumentuj pomocí dvou rovin určených vrcholy krychle a urči vzájemnou polohu rovin.

Mohou nastat tři možnosti.

Roviny nemají žádný společný bod  
(např. roviny  $ABC$  a  $EFG$ ).



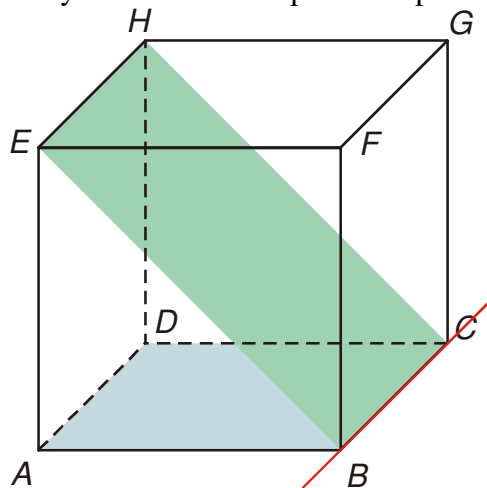
Roviny mají všechny body společné  
(např. roviny  $ABC$  a  $BCD$ ).



Roviny jsou totožné (splývají).

Roviny jsou **rovnoběžné**.

Roviny mají společných nekonečně mnoho bodů ležících v přímce  
(např. roviny  $ABC$  a  $BCE$  se společnou přímkou  $BC$ ).



Roviny jsou **různoběžné**.

$\Rightarrow$  Pokud mají dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou celou přímku, která tímto bodem prochází.

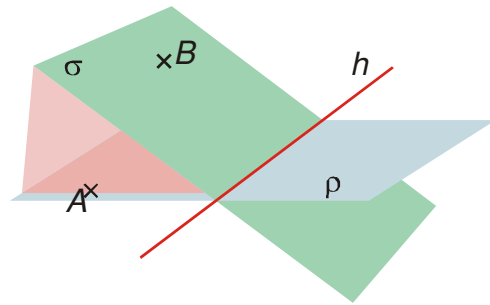
**Pedagogická poznámka:** Následující obrázky si prohlédneme, ale žáci je neopisují do sešitů (ztráta času).

### Terminologie:

Dvě různoběžné roviny  $\rho$  a  $\sigma$ , dva body

$A \in \rho$ ,  $B \in \sigma$ :

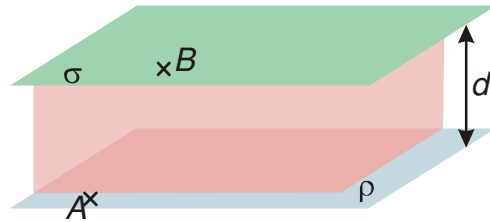
- průnik poloprosorů  $\rho B$  a  $\sigma A$  se nazývá **klín**,
- průsečnice  $h$  hraničních rovin se nazývá **hrana klínu**,
- poloroviny  $hB$  a  $hA$  se nazývají **stěny klínu**.



Dvě rovnoběžné roviny  $\rho$  a  $\sigma$ , dva body

$A \in \rho$ ,  $B \in \sigma$ :

- průnik poloprosorů  $\rho B$  a  $\sigma A$  se nazývá **vrstva**,
- vzdálenost hraničních rovin se nazývá **tloušťka (šířky) vrstvy**.

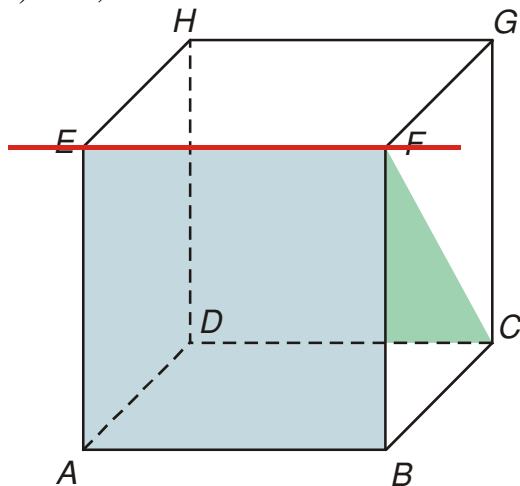


**Př. 2:** Je dána standardní krychle  $ABCDEFGH$ . Urči vzájemnou polohu rovin:

a)  $ABE$ ,  $CDF$ ,      b)  $ABE$ ,  $DCG$ ,      c)  $ABG$ ,  $DCE$ ,      d)  $ABC$ ,  $S_{AE}GH$ .

Pokud jsou roviny různoběžné, urči jejich průsečnici.

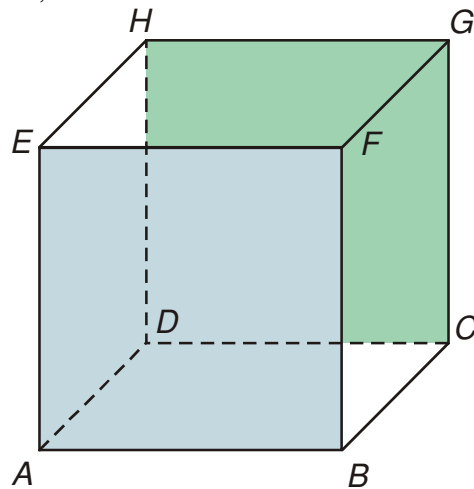
a)  $ABE$ ,  $CDF$



Roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka  $EF$ .

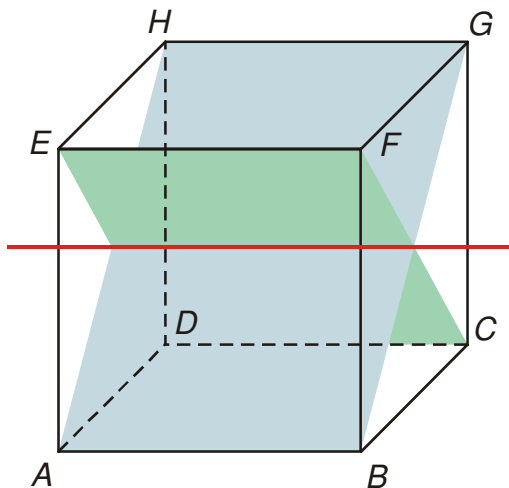
c)  $ABG$ ,  $DCE$

b)  $ABE$ ,  $DCG$

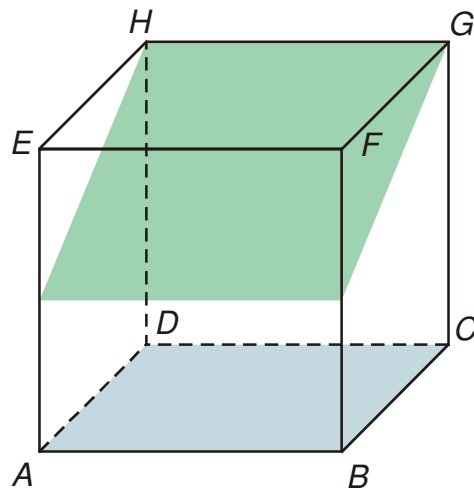


Roviny jsou rovnoběžné.

d)  $ABC$ ,  $S_{AE}GH$

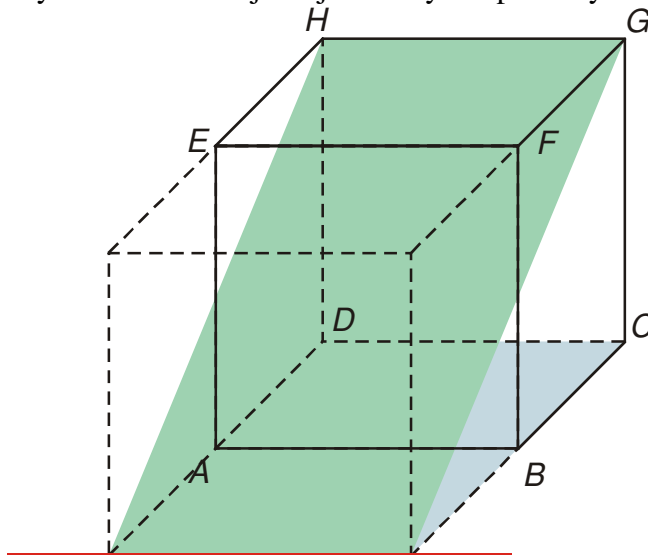


Roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka  $S_{BG}S_{AH}$ .



Roviny jsou různoběžné, průsečnicí je přímka rovnoběžná s přímkou  $AB$  ležící mimo krychli.

**Dodatek:** Průsečnici rovin  $ABC$ ,  $S_{AE}GH$  z bodu d) předchozího příkladu snadno najdeme, když si nakreslíme ještě jednu krychli před krychli  $ABCDEFGH$ :



Podobně jako pro přímky i pro roviny platí:

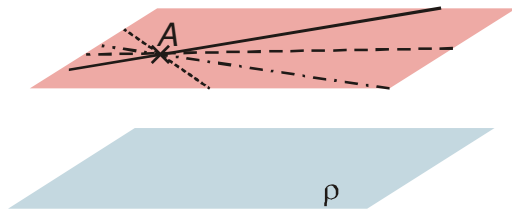
**Daným bodem lze vést k dané rovině jedinou rovinu s ní rovnoběžnou.**

**Př. 3:** Doplň větu: „Je-li  $\rho \parallel \sigma$  a  $\sigma \parallel \tau$ , pak ...“

Je-li  $\rho \parallel \sigma$  a  $\sigma \parallel \tau$ , pak  $\rho \parallel \tau$ .  $\Rightarrow$  i **rovnoběžnost rovin je tranzitivní**.

**Př. 4:** Je dána rovina  $\rho$  a bod  $A$ , který v ní neleží. Kolik přímek rovnoběžných s rovinou  $\rho$  prochází bodem  $A$ ? Jaký útvar vznikne sjednocením všech takových přímek?

Bodem  $A$  prochází nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s rovinou  $\rho$ , které dohromady tvoří rovinu rovnoběžnou s rovinou  $\rho$ .



**Př. 5:** Najdi postup, jak pomocí vodováhy ověřit vodorovnou polohu desky.

Vodováha – zařízení, které určí, zda je nějaký směr vodorovný (bublínka kapaliny je přesně uprostřed okénka).

Přiložíme vodováhu k desce ve dvou různých směrech a ověříme, zda jsou oba směry vodorovné (každý další směr už bude také vodorovný).

**Př. 6:** Na základě předchozích příkladů vyslov kritérium pro rovnoběžnost dvou rovin.

Dvě roviny jsou rovnoběžné, jestliže jedna z nich obsahuje dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s druhou rovinou.

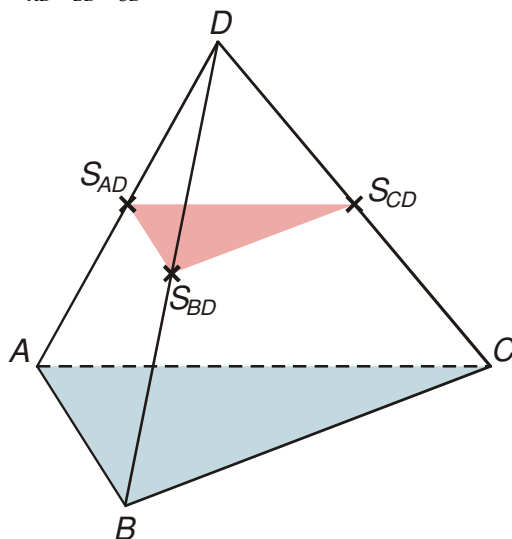
Například pro roviny  $\rho$  a  $\sigma$  to znamená, že rovina  $\sigma$  obsahuje přímky  $p, q$ , které jsou rovnoběžné s rovinou  $\rho$ .

**Př. 7:** Je dán čtyřstěn  $ABCD$ . Dokaž, že rovina  $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$  je rovnoběžná s rovinou  $ABC$ .

Budeme postupovat podle předchozího kritéria: najdeme v rovině  $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$  dvě různoběžné přímky, které jsou rovnoběžné s rovinou  $ABC$ .

- Přímka  $S_{AD}S_{BD}$  je střední příčkou v trojúhelníku  $ABD \Rightarrow$  je rovnoběžná s přímkou  $AB \Rightarrow$  je rovnoběžná s rovinou  $ABC$ .
- Přímka  $S_{BD}S_{CD}$  je střední příčkou v trojúhelníku  $BCD \Rightarrow$  je rovnoběžná s přímkou  $BC \Rightarrow$  je rovnoběžná s rovinou  $ABC$ .

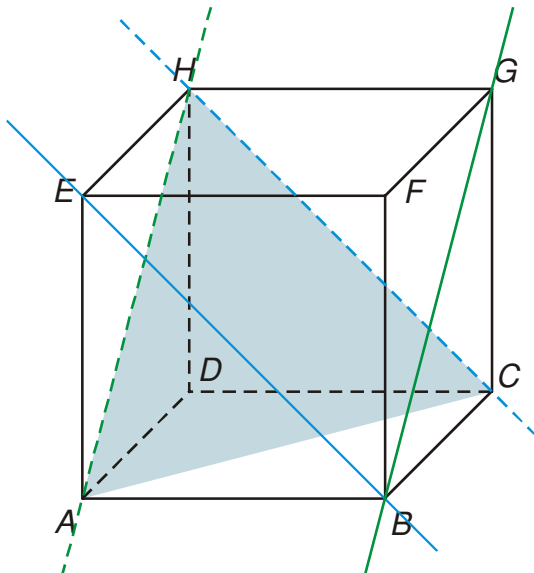
Našli jsme v rovině  $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$  dvě různoběžné přímky rovnoběžné s rovinou  $ABC \Rightarrow$  rovina  $S_{AD}S_{BD}S_{CD}$  je rovnoběžná s rovinou  $ABC$ .



Jak najdeme rovinu rovnoběžnou s rovinou  $\rho$  procházející bodem  $A$ ?

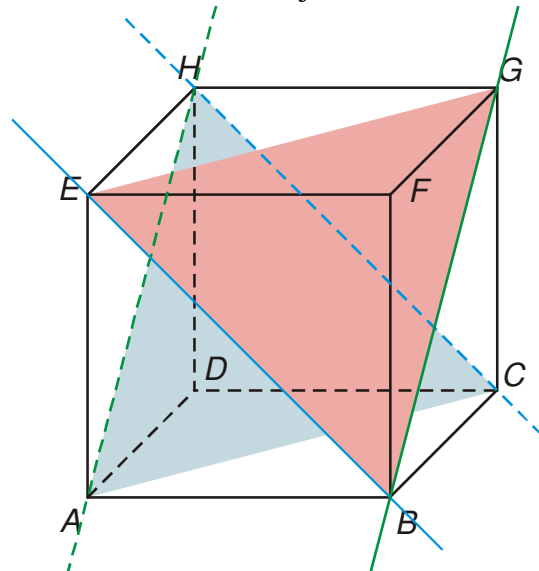
Můžeme použít kritérium rovnoběžnosti: zvolíme v rovině  $\rho$  přímky  $p, q$ . Jejich rovnoběžky  $p'$  a  $q'$  procházející bodem  $A$  určují rovnoběžnou rovinu  $\rho'$ .

**Př. 8:** Je dána standardní krychle  $ABCDEFGH$ . Bodem  $B$  veď rovinu rovnoběžnou s rovinou  $ACH$ .



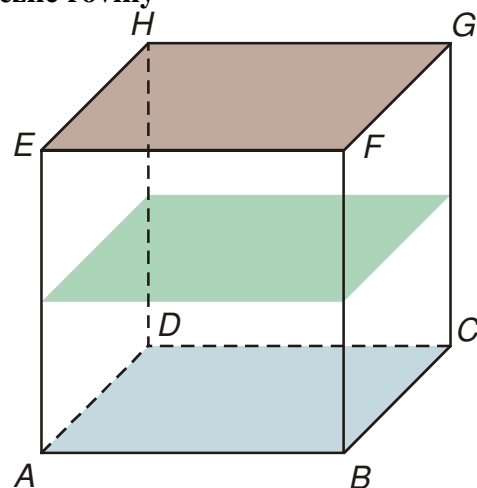
Přímka  $BG$  je rovnoběžná s přímkou  $AH$ .  
Přímka  $BE$  je rovnoběžná s přímkou  $CH$ .

Hledanou rovinou je rovina  $BEG$ .

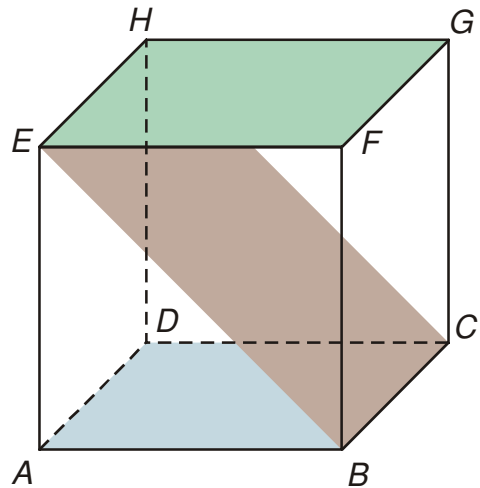
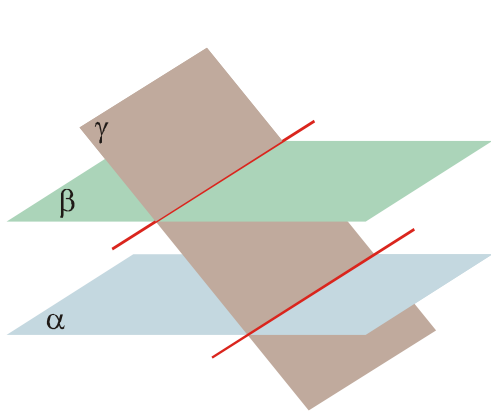


**Př. 9:** Existuje celkem pět možností pro vzájemnou polohu tří rovin  $\alpha, \beta, \gamma$ . Najdi všechny tyto možnosti, modeluj je v dvojici pomocí sešitů a demonstruj je pomocí tří rovin určených vrcholy nebo středy hran standardní krychle  $ABCDEFGH$ .

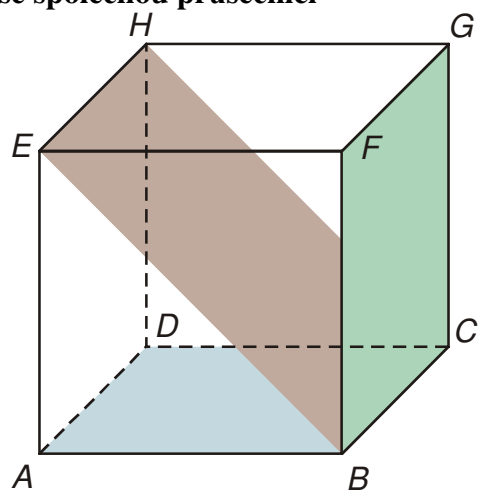
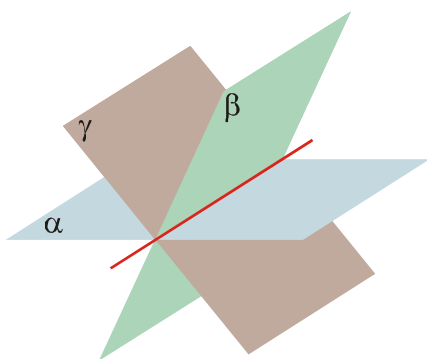
**tři navzájem rovnoběžné roviny**



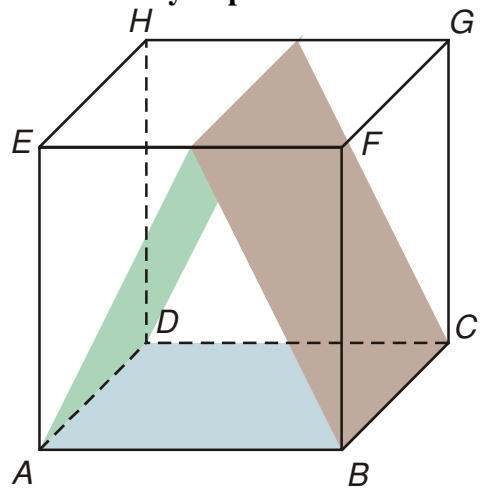
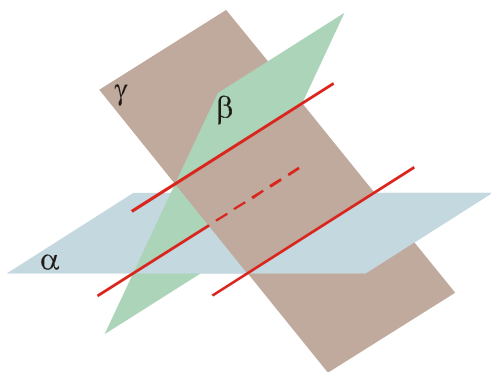
**dvě rovnoběžné roviny, třetí je protíná v rovnoběžných přímkách**



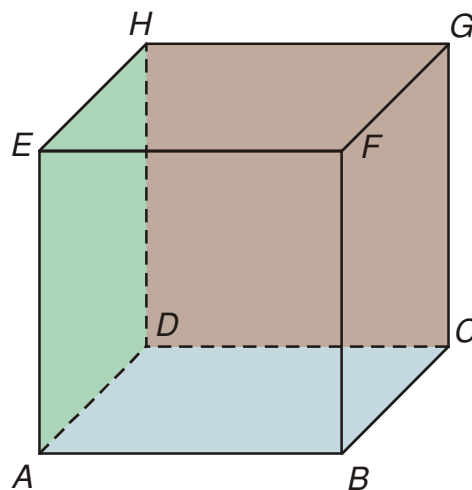
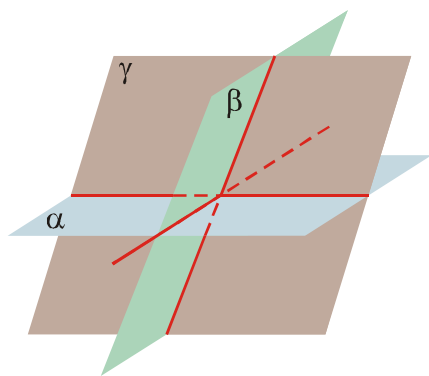
**tři navzájem různoběžné roviny se společnou průsečnicí**



**tři navzájem různoběžné roviny se třemi rovnoběžnými průsečnicemi**



**tři navzájem různoběžné roviny se třemi průsečnicemi, které procházejí jedním bodem**



**Př. 10:** Petáková:  
strana 90/cvičení 3  
strana 90/cvičení 4  
strana 90/cvičení 5 c) d)

**Shrnutí:**