5.2.1 Odchylka přímek I

Předpoklady: 5110

Metrické vlastnosti – určování měřitelných veličin (délky a velikosti úhlů)

Výhoda – metrické vlastnosti jsme už určovali v planimetrii $\Rightarrow$ můžeme si brát inspiraci

Všechny definice, které zavedeme musí splňovat dvě podmínky:
- musí být v souladu s analogickými definicemi v planimetrii
- musí zaručit jednoznačné určení hodnoty

$\Rightarrow$ časté využívání rovnoběžnosti a kolmosti (daným bodem je možné vést právě jednu rovnoběžku k dané přímce a právě jednu přímku kolmou k dané rovině)

Co znamená jednoznačné určení hodnoty – vzdálenost bodu od přímky……..

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určitě důležitý a je vhodné si ze studenty popovídat, aby věděli, jakým způsobem se definice metrických vlastností vyrábějí. Na druhou stranu je potřeba, aby nejpozději 15 minut po začátku hodiny začali pracovat na příkladu 2.

Definice odchylky přímek v planimetrii:
Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které spolu přímky svírají. Odchylka dvou rovnoběžných přímek je $0°$.

Př. 1: Srovnej planimetrickou definici odchylky dvou přímek se stavem ve stereometrii a navrhni její stereometrickou definici.

Ve stereometrii existují kromě různoběžných a rovnoběžných přímek ještě přímky mimoběžné $\Rightarrow$ pro první dva druhy přímek můžeme definici zachovat a musíme přidat definici odchylky pro mimoběžné přímky.

Mimoběžky se nepotkávají $\Rightarrow$ abychom změřili úhel musíme je „dostat k sobě“ a přitom zachovat směr (ten zachovávají rovnoběžky) $\Rightarrow$ pomocí rovnoběžek převedeme mimoběžky na různoběžky a pak budeme postupovat jako u různoběžek

Definice odchylky přímek ve stereometrii:
- Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých nebo pravých úhlů, které přímky spolu svírají.
- Odchylka dvou rovnoběžných přímek je $0°$.
- Odchylka dvou mimoběžných přímek je odchylka různoběžných přímek vedených libovolným bodem prostoru rovnoběžně s danými mimoběžkami.

$\Rightarrow$ **podle definice fakticky převedeme veškeré příklady do roviny a v ní to spočítáme (a stejně budeme postupovat i u ostatních metrických vlastností)**

Stejně jako v planimetrii píšeme pro odchylku φ přímek *p*, *q*: $\varphi = |\sphericalangle pq|$.

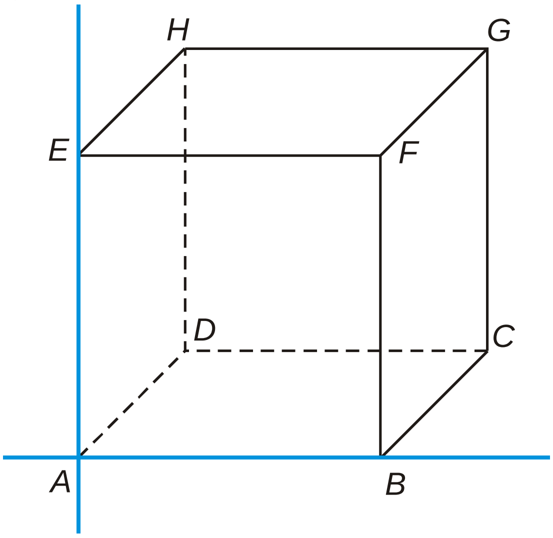
Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek:

a) *AB*, *AE* b) *AB*, *AD* c) *AE*, *AF*

d) *AB*, *BD* e) *CD*, *GH* f) *AD*, *FG*

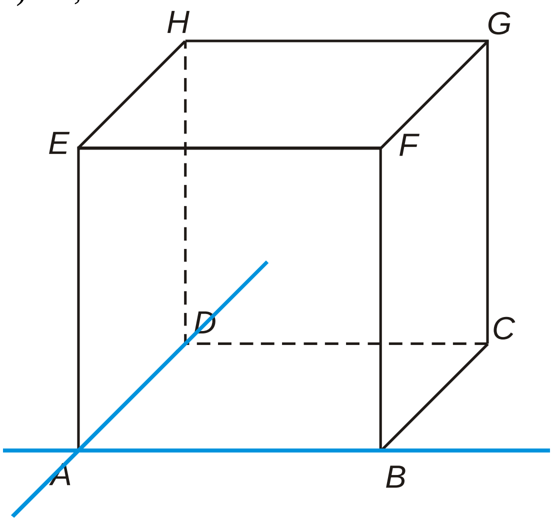
g) AB, $S_{AE}F$

a) *AB*, *AE*



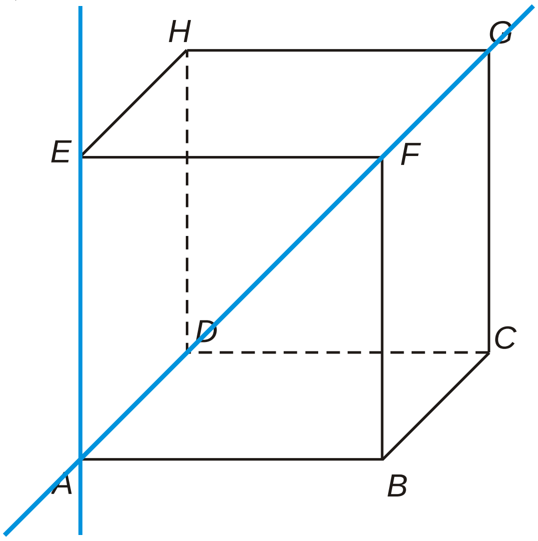
přímky *AB* a *AE* procházejí sousedními hranami přední stěny $\Rightarrow\ \varphi = 90°$

b) *AB*, *AD*



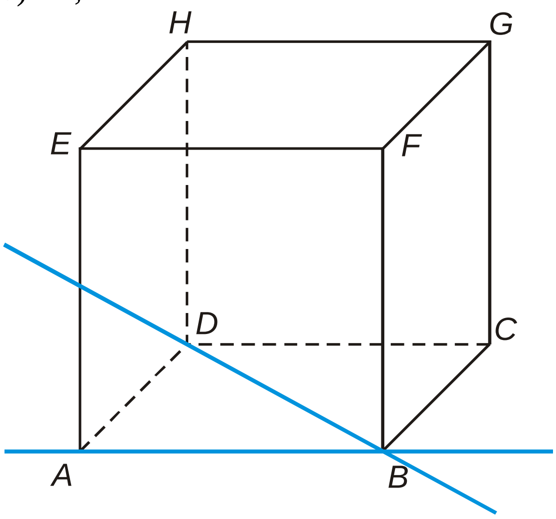
přímky *AB* a *AD* procházejí sousedními hranami podstavy $\Rightarrow\ \varphi = 90°$

c) *AE*, *AF*



přímka *AE* prochází stranou čtverce přední stěny, přímka *AF* prochází jeho úhlopříčkou $\Rightarrow\ \varphi = 45°$

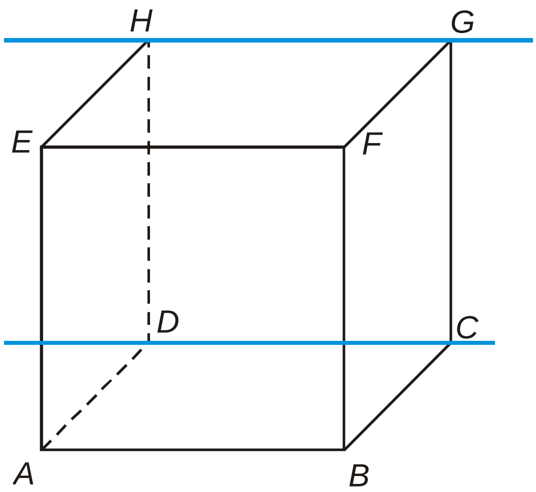
d) *AB*, *BD*



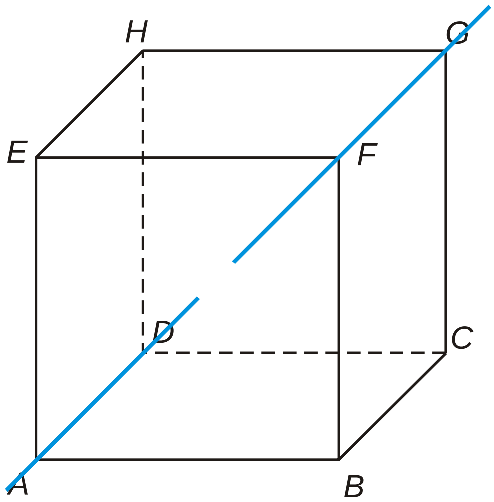
přímka *AB* prochází stranou čtverce podstavy, přímka *BD* prochází jeho úhlopříčkou $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$

e) *CD*, *GH*

f) *AD*, *FG*



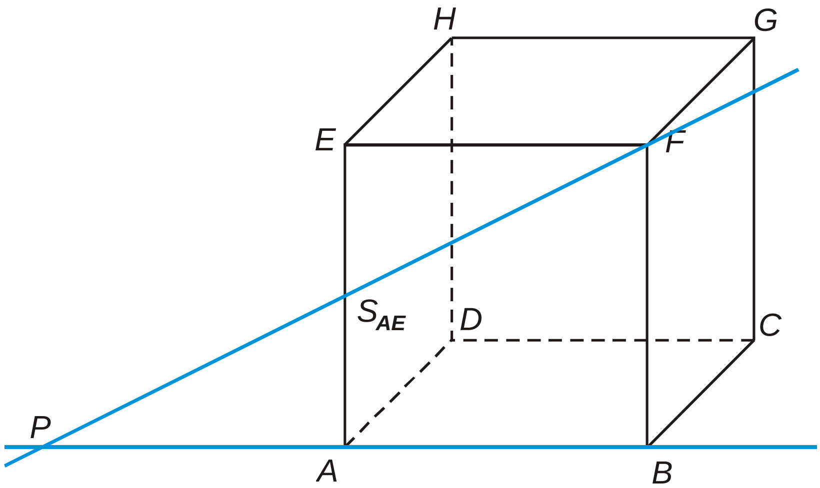
přímky CD a GH procházejí protějšími stranami čtverce zadní podstavy $\Rightarrow$ jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ $\varphi = 0$



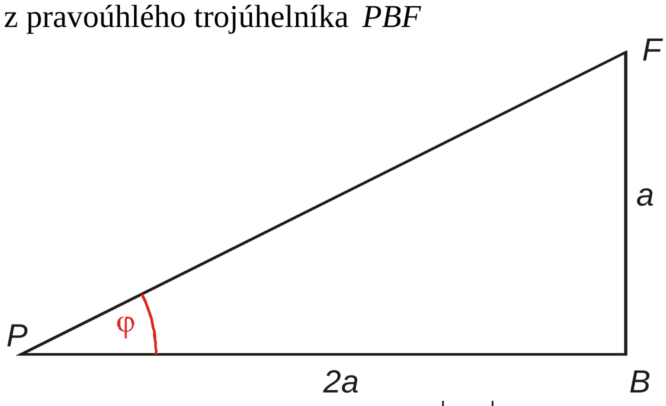
- přímka AD je rovnoběžná s přímkou EH (protější strany čtverce levé boční stěny)
- přímka FG je rovnoběžná s přímkou EH (protější strany čtverce horní podstavy)

$\Rightarrow$ přímky AD a FG jsou rovnoběžné $\varphi = 0$

g) AB, $S_{AE}F$



přímky AB a $S_{AE}F$ leží v rovině přední stěny, jsou různoběžné, jejich odchylku zjistíme z pravoúhlého trojúhelníka PBF

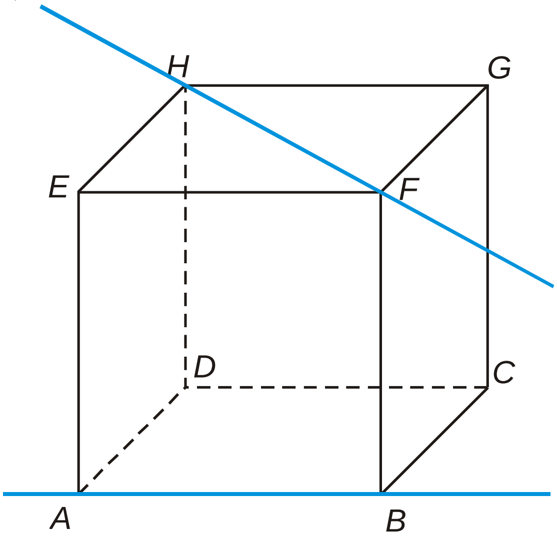


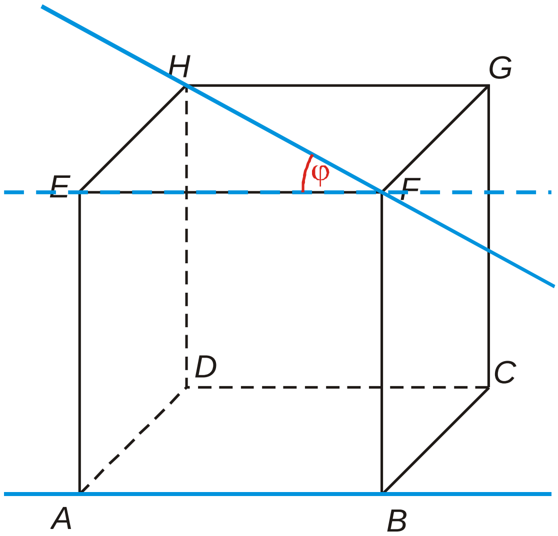
z obrázku vidíme, že platí: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{|BF|}{|PB|} = \frac{a}{2a} = 0{,}5 \Rightarrow \varphi = 26°34'$.

Pedagogická poznámka: Všechny body předchozího příkladu jsou velmi jednoduché. Pouze u bodů b) a d) je třeba u některých studentů dát pozor na to, aby si uvědomili, že zobrazení krychle ve volném rovnoběžném promítání zkresluje některé úhly a proto si musí situaci představit (nebo nakreslit v pohledu shora).
Bod g) je po dlouhé době prvním místem, kde narazíme na použití goniometrických funkcí. Pokud nechcete ztrácet čas a rozdávat mínusy, je dobré to studentům připomenout předem v minulé hodině.

Př. 3: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek:
a) *AB*, *HF* b) *DE*, *BG* c) *AH*, *BE*

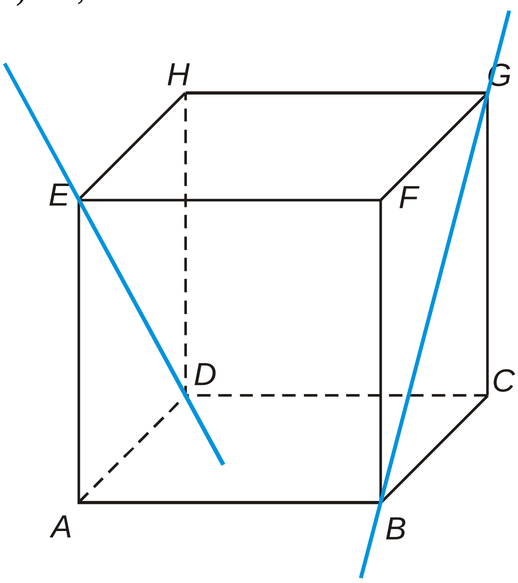
a) *AB*, *HF*

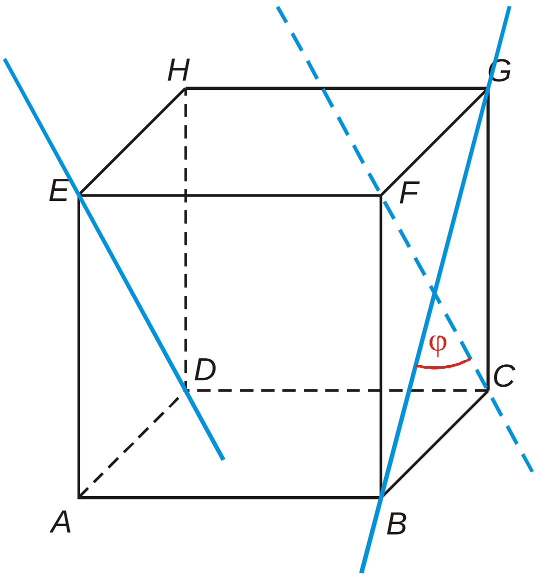




přímky *AB* a *HF* jsou mimoběžné $\Rightarrow$ hledáme v horní podstavě rovnoběžku s přímkou *AB* $\Rightarrow$ přímka *EF* $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$

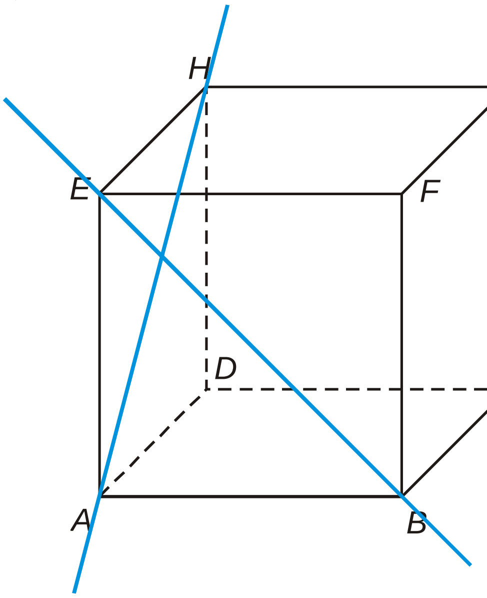
b) *DE*, *BG*

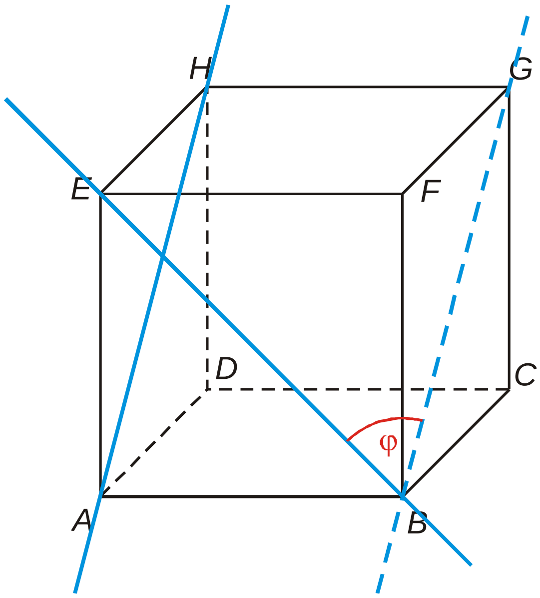




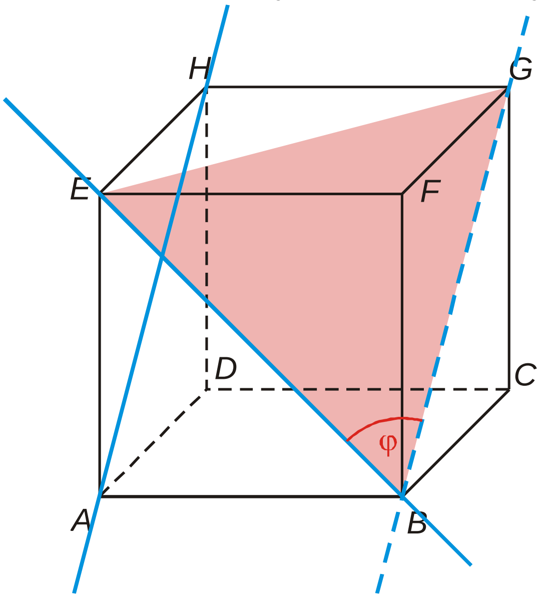
přímky *ED* a *BG* jsou mimoběžné $\Rightarrow$ hledáme v pravé stěně rovnoběžku s přímkou *ED* $\Rightarrow$ přímka *FC* $\Rightarrow$ $\varphi = 90°$ (úhlopříčky čtverce)

c) *AH*, *BE*





přímky *AH* a *BE* jsou mimoběžné $\Rightarrow$ snažíme se najít v krychli rovnoběžku s jednou z přímek takovou, aby se protínala druhou přímku $\Rightarrow$ přímka *BG*
velikost úhlu není zřejmá $\Rightarrow$ hledáme trojúhelník s vnitřním úhlem *EBG* $\Rightarrow$ trojúhelník *EBG*



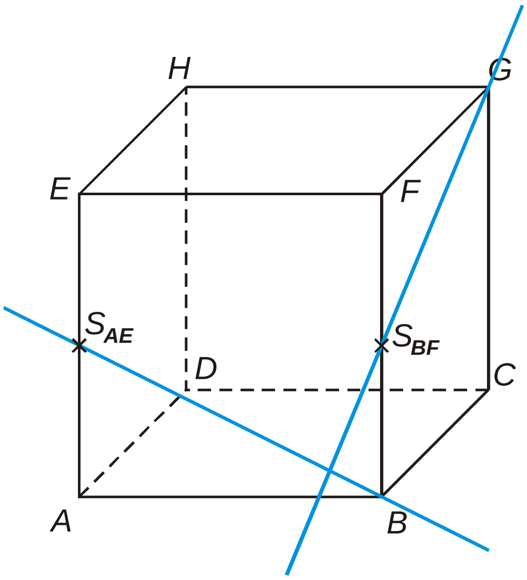
trojúhelník *EBG* je rovnostranný $\Rightarrow$ $\varphi = 60°$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti řeší bod a) jako nápodobu bodu 2 b). Prodlouží obě přímky, napravo od bodu *B* získají zdánlivý průsečík *P* a začnou kreslit trojúhelník *AHP*.

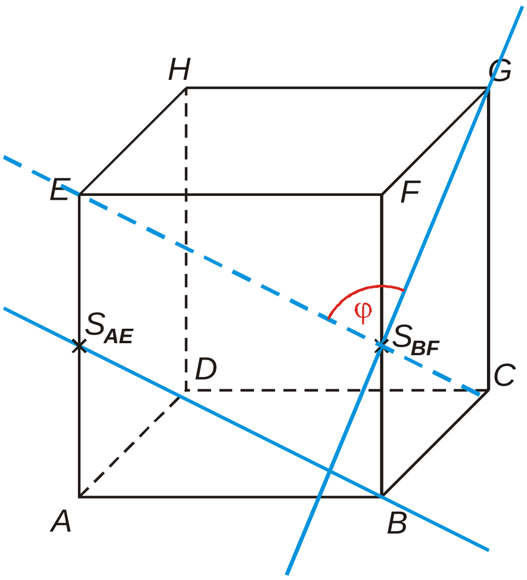
Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu i příkladů v dalších hodinách je důležité, aby studenti dokázali rozložit postup na jednotlivé kroky. Obrovskou roli při tom hraje jejich zápis do sešitu. Snažím se, aby si vždycky nakreslili trojúhelník, ze kterého bude možné odchylku určit, a mimo tento obrázek si pomocí dalších trojúhelníků určovali jednotlivé strany. Je dobré jim připomenout, že tímto způsobem rozloží těžký příklad na několik jednodušších.

Pedagogická poznámka: Při výpočtech odchylek mimoběžek je možné konstruovat rovnoběžku různým způsobem. Studenti určitě najdou různá řešení, je však dobré obrázek, který budeme používat při výpočtu sjednotit, aby si všichni mohli kontrolovat další postup (výsledek je samozřejmě u všech postupů stejný, ale značení je jiné a studentům podstatně ztěžuje orientaci).

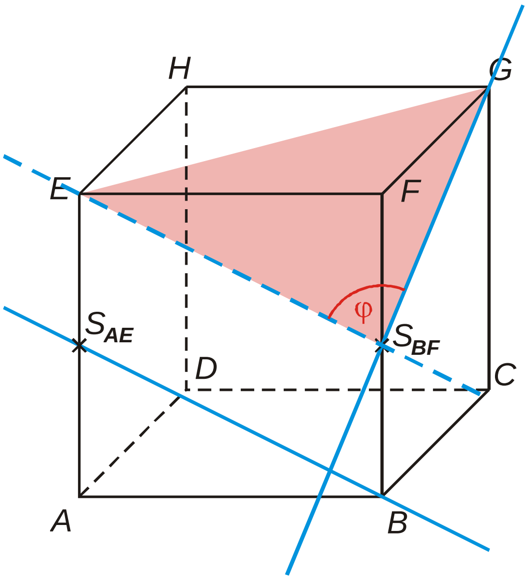
Př. 4: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek BS_{AE}, $S_{BF}G$.



přímky BS_{AE} a $S_{BF}G$ jsou mimoběžné $\Rightarrow$ snažíme se najít v krychli rovnoběžku s jednou z přímek takovou, aby se protínala druhou přímku $\Rightarrow$ přímka ES_{BF}



velikost úhlu není zřejmá $\Rightarrow$ hledáme trojúhelník s vnitřním úhlem $ES_{BF}G$ $\Rightarrow$ trojúhelník $ES_{BF}G$



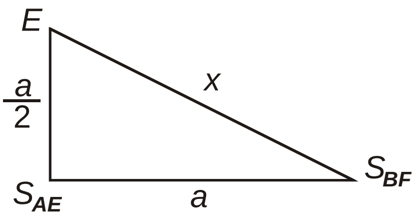
Určíme strany trojúhelníka $ES_{BF}G$:

strana EG **(úhlopříčka podstavy)**

$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$u = a\sqrt{2}$

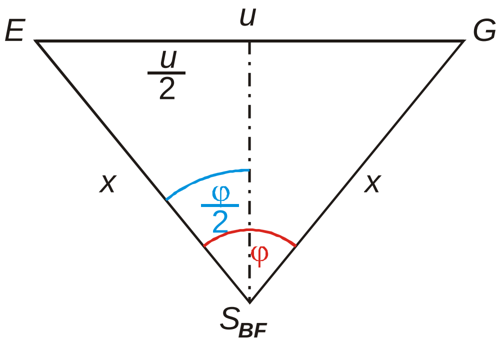
strana ES_{BF} **(přepona pravoúhlého trojúhelníku** $ES_{AE}S_{BF}$ **)**



$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Nakreslíme si trojúhelník $ES_{BF}G$



trojúhelník je rovnoramenný, osa úsečky EG ho dělí na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s úhlem $\frac{\varphi}{2}$:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{u}{2}}{x}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2}=39°14' \Rightarrow \varphi=78°28'$$

Odchylka přímek BS_{AE} a $S_{BF}G$ je $78°28'$.

Př. 5: Petáková:
strana 94/cvičení 29 c) f) g)

Shrnutí: Odchylku přímek určujeme pomocí planimetrické definice. U mimoběžných přímek využíváme rovnoběžek.