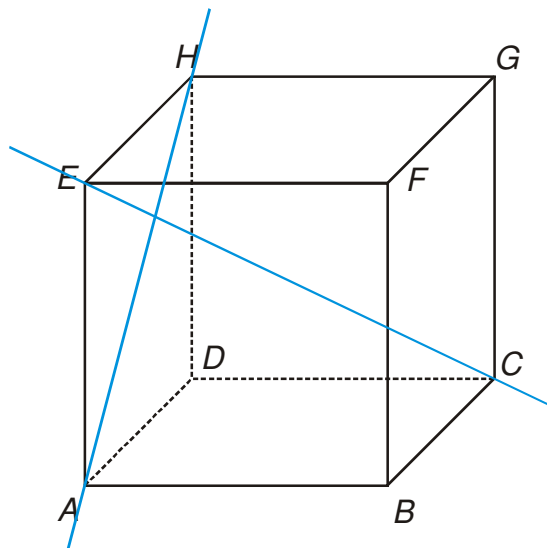


## 5.2.2 Odchylka přímek II

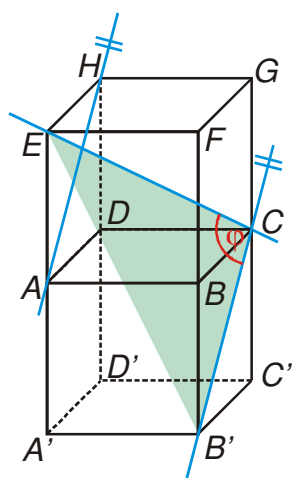
**Předpoklady:** 5201

**Př. 1:** Je dána standardní krychle  $ABCDEFGH$ . Urči odchylku přímek  $CE$  a  $AH$ .

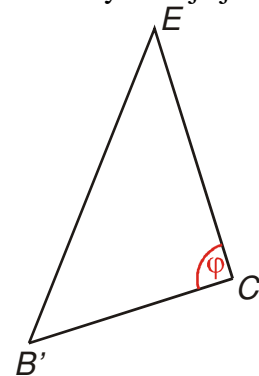


**Problém:** Přímky jsou mimoběžné, když se budeme snažit sestavit rovnoběžku jedním z krajních bodů, dostaneme se mimo krychli.

**Řešení:** Kromě zadané krychle dokreslíme do obrázku ještě druhou pomocnou shodnou krychli, která nám umožní nakreslit trojúhelník s hledanou odchylkou.

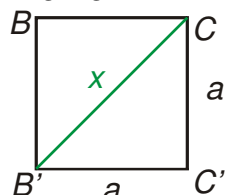


Hledaný úhel je jedním z vnitřních úhlů trojúhelníku  $B'CE$ .



Musíme určit délky jeho stran.

Strana  $B'C$  ze čtverce  $B'C'BC$

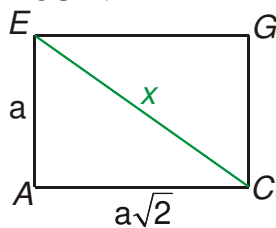


$$a^2 + a^2 = x^2$$

$$x^2 = 2a^2$$

$$x = a\sqrt{2}$$

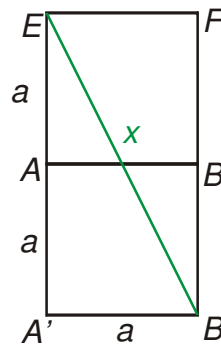
Strana  $EC$  z obdélníku  $ACGE$ .



$$a^2 + (a\sqrt{2})^2 = x^2$$

$$x^2 = 3a^2$$

Strana  $B'E$  z obdélníku  $A'B'FE$ .



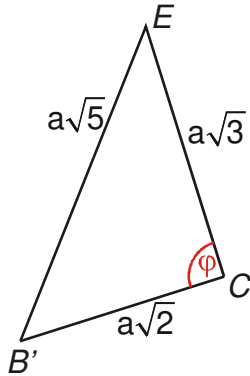
$$x = a\sqrt{3}$$

$$a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = x^2$$

$$x^2 = 5a^2$$

$$x = a\sqrt{5}$$

Zakreslíme určené délky do trojúhelníku  $B'CE$  a pomocí kosinové věty určíme úhel  $\varphi$ .



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{5})^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}$$

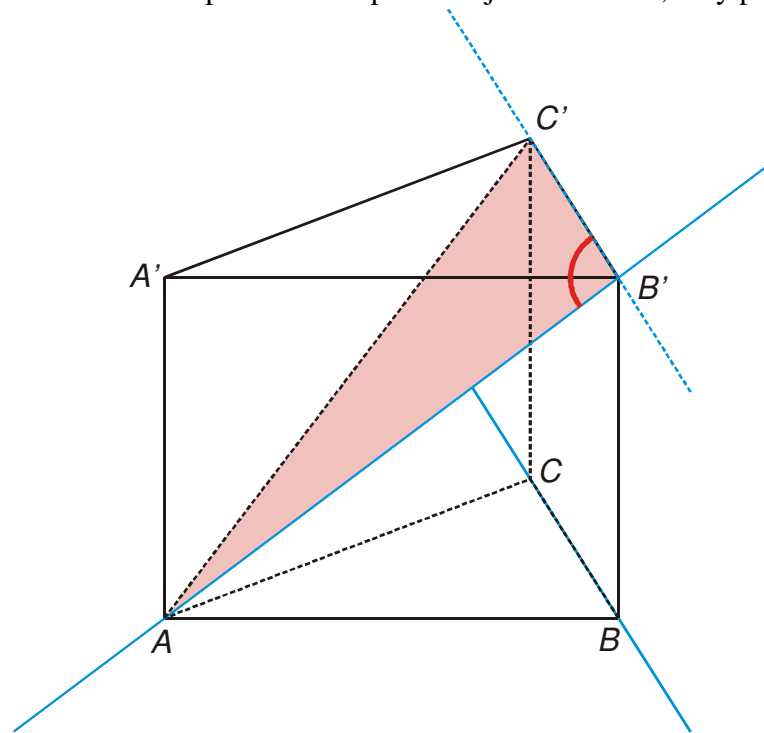
$$\cos \alpha = \frac{2a^2 + 3a^2 - 5a^2}{2 \cdot a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{0}{2 \cdot a^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

Odchylka přímek  $CE$  a  $AH$  je  $90^\circ \Rightarrow$  přímky jsou na sebe kolmé.

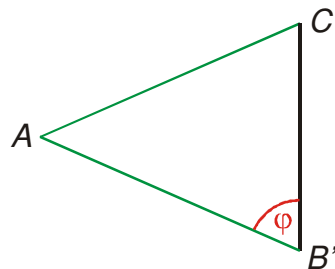
**Př. 2:** Najdi další způsoby, jak sestavit rovnoběžku s jednou z přímek z předchozího příkladu tak, aby bylo možné pokračovat ve výpočtu.

**Př. 3:** Je dán pravidelný trojboký hranol  $ABCA'B'C'$ ;  $|AB| = a = 6 \text{ cm}$ ,  $|AA'| = v = 4,5 \text{ cm}$ .  
Urči odchylku přímek  $BC$  a  $AB'$ .

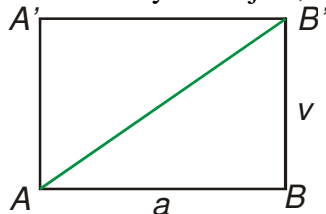
Přímky jsou mimoběžné  $\Rightarrow$  musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou  $BC$  procházející bodem  $B'$ , tedy přímkou  $B'C'$ .



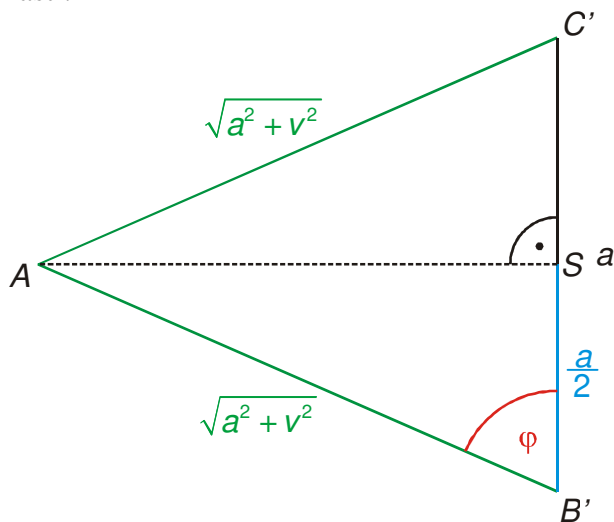
Získáme trojúhelník  $AB'C'$ , ze kterého můžeme vypočítat úhel při vrcholu  $B'$ . Trojúhelník  $AB'C'$  si nakreslíme zvlášť a určíme délky jeho stran.



Délka strany  $B'C'$  je  $a$ , strany  $AB'$  a  $AC'$  jsou stejné, určíme je z obdélníku  $ABB'A'$ .



Trojúhelník  $AB'C'$ : Je rovnoramenný  $\Rightarrow$  rozdělíme jej podle osy souměrnosti na dvě části:



Pythagorova věta:

$$x^2 = a^2 + v^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + v^2}.$$

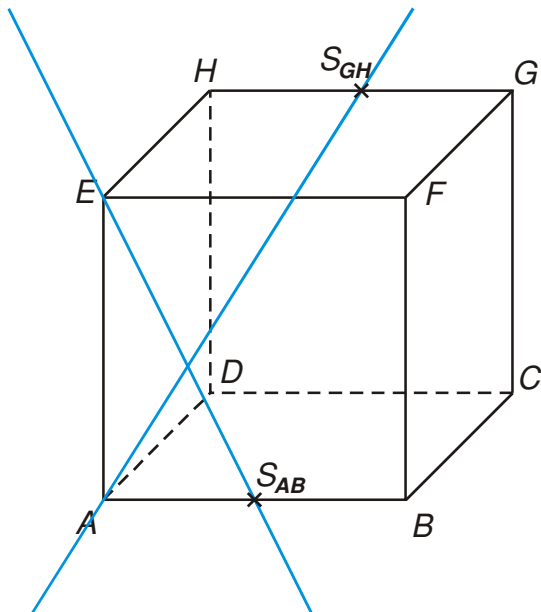
Úhel  $\varphi$  vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku  $ASB'$ :

$$\cos \varphi = \frac{|SB'|}{|AB'|} = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + v^2}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + v^2}}$$

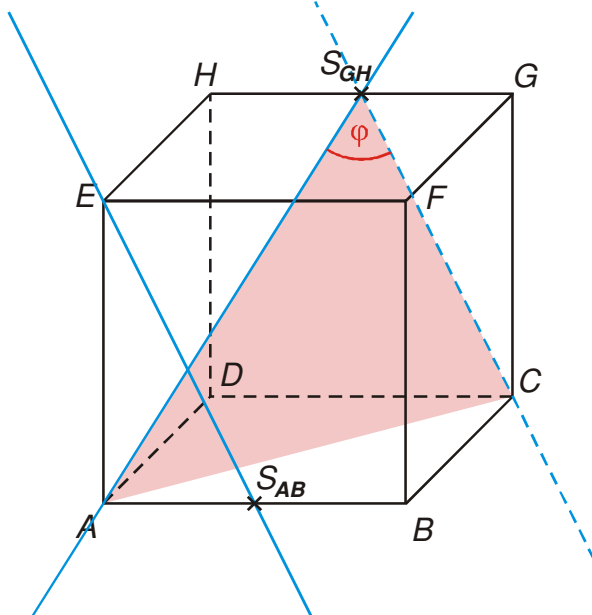
$$\text{Dosadíme: } \cos \varphi = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + v^2}} = \frac{6}{2\sqrt{6^2 + 4,5^2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 66^\circ 25'$$

**Př. 4:** Je dána standardní krychle  $ABCDEFGH$ . Urči odchylku přímek  $AS_{GH}$ ,  $S_{AB}E$ .



Přímky jsou mimoběžné  $\Rightarrow$  musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou  $S_{AB}E$  procházející bodem  $S_{GH}$ .



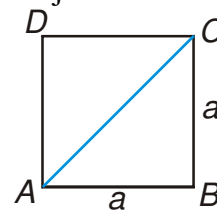
Získáme trojúhelník  $ACS_{GH}$ , ve kterém určujeme úhel u vrcholu  $S_{GH}$ .

Neznáme ani jednu ze stran  $\Rightarrow$  postupně je určujeme z dalších trojúhelníků.

Strana  $AC$  ze čtverce  $ABCD$ :

$$x^2 = a^2 + a^2$$

$$x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$



Strana  $S_{GH}C$  z trojúhelníku  $CGS_{GH}$ :

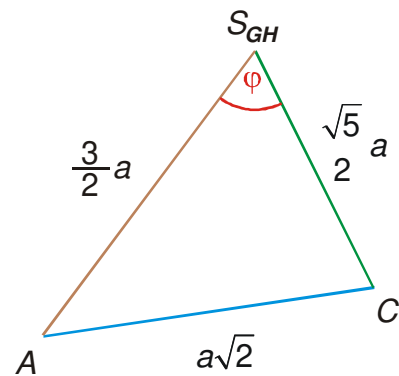
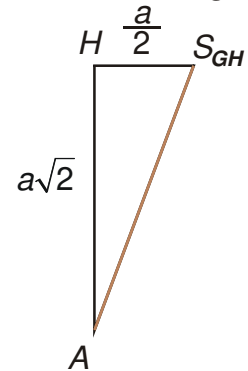
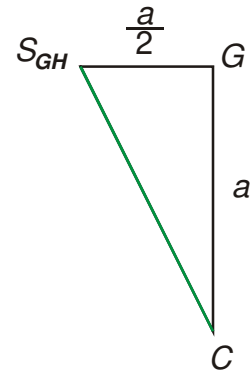
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Strana  $AS_{GH}$  z trojúhelníku  $AHS_{GH}$ :

$$x^2 = (\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$$



Známe všechny strany trojúhelníka, pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

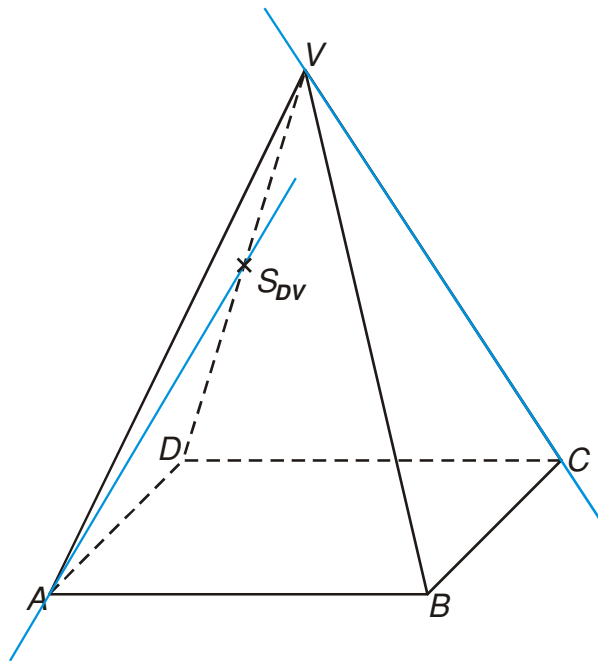
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dosadíme:  $a = a\sqrt{2}$ ,  $b = a\frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $c = a\frac{3}{2}$ .

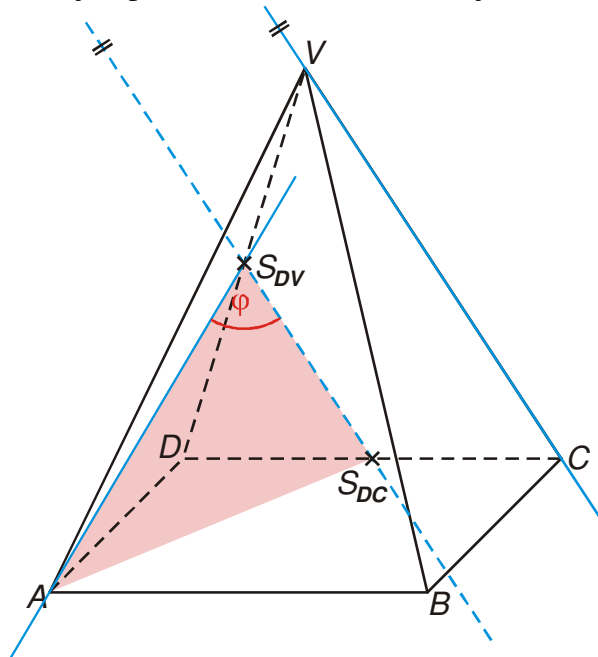
$$\cos \alpha = \frac{\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{3}{2}\right)^2 - (a\sqrt{2})^2}{2\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(a\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^2\frac{5}{4} + a^2\frac{9}{4} - 2a^2}{a^2\sqrt{5}\frac{3}{2}} = \frac{a^2\left(\frac{5+9-8}{4}\right)}{a^2\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26'$$

**Př. 5:** Je dán pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ ;  $|AB| = a = 5 \text{ cm}$ ,  $|AV| = b = 7 \text{ cm}$ . Urči odchylku přímek  $CV$  a  $AS_{DV}$ .



Přímky jsou mimoběžné  $\Rightarrow$  musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku  $S_{DC}S_{DV}$ , která je s přímkou  $CV$  rovnoběžná (je střední příčkou trojúhelníku  $CDV$ ).

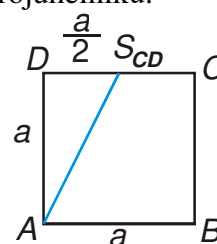


Získáme trojúhelník  $AS_{CD}S_{DV}$ , ve kterém určujeme úhel u vrcholu  $S_{DV}$ .

Neznáme ani jednu ze stran  $\Rightarrow$  postupně je určujeme z dalších trojúhelníků.

Strana  $AS_{CD}$  ze čtverce  $ABCD$ :

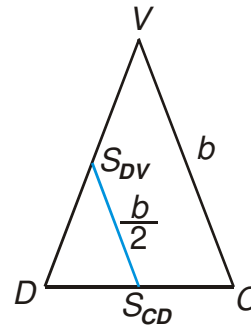
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$



$$x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Strana  $S_{DC}S_{DV}$  z trojúhelníku  $CDV$  je střední příčkou trojúhelníku odpovídající straně  $CV \Rightarrow$

$$x = |S_{CD}S_{DV}| = \frac{|CV|}{2} = \frac{|AV|}{2} = \frac{b}{2}$$



Strana  $AS_{DV}$  z trojúhelníku  $ADS_{DV}$  :

Kosinová věta:  $c^2 = a^2 + b^2 - ab \cos \varphi$

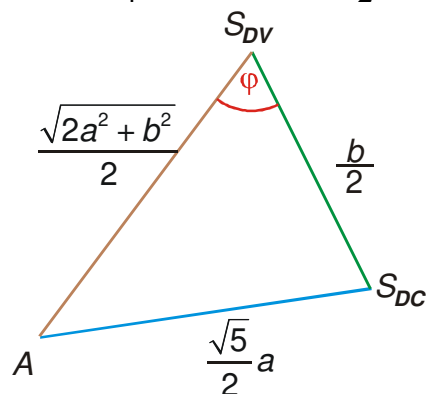
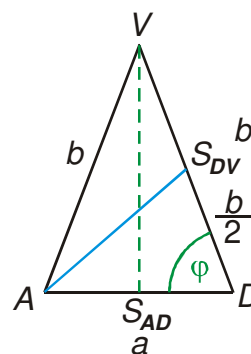
$$x^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a \frac{b}{2} \cos \varphi$$

Hodnotu  $\cos \varphi$  určíme z pravoúhlého trojúhelníku

$$S_{AD}DV : \cos \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2a \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2b} = a^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{2a^2 + b^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$$



Známe všechny strany trojúhelníka, pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dosadíme:  $a = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ ,  $b = \frac{b}{2}$ ,  $c = \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}$ .

$$\cos \alpha = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}{2 \left(\frac{b}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}\right)} = \frac{\frac{b^2}{4} + \frac{2a^2 + b^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{\sqrt{2a^2 + b^2}}{2}} = \frac{\frac{2b^2 - 3a^2}{4}}{\frac{b \cdot \sqrt{2a^2 + b^2}}{2}} = \frac{2b^2 - 3a^2}{2b \cdot \sqrt{2a^2 + b^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{2b^2 - 3a^2}{2b \cdot \sqrt{2a^2 + b^2}} = \frac{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{2 \cdot 5^2 + 7^2}} \Rightarrow \alpha = 80^\circ 30'$$

**Př. 6:** Petáková:  
strana 94/cvičení 31 b) e) f) i)

**Shrnutí:**