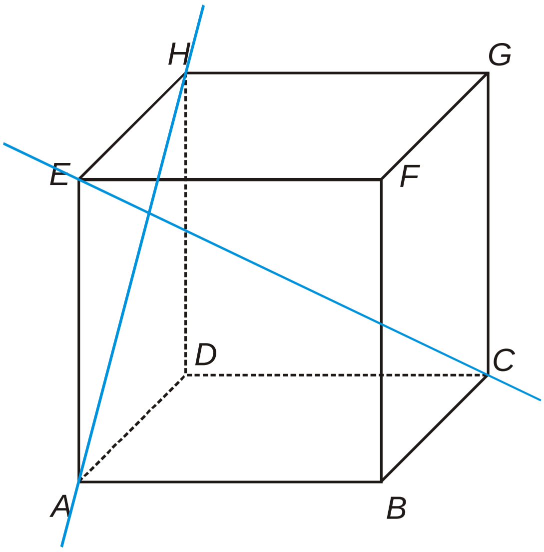
5.2.2 Odchylka přímek II

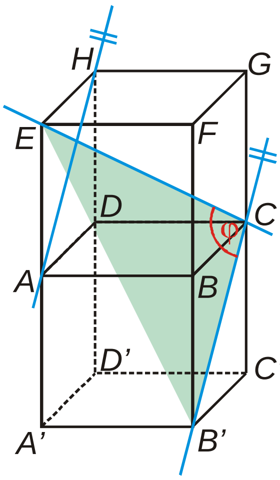
Předpoklady: 5201

Př. 1: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek *CE* a *AH*.

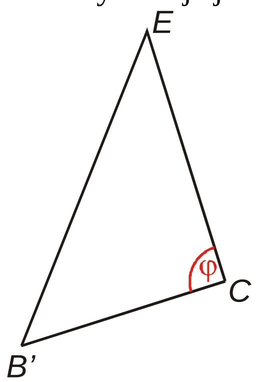


Problém: Přímky jsou mimoběžné, když se budeme snažit sestrojit rovnoběžku jedním z krajních bodů, dostaneme se mimo krychli.

Řešení: Kromě zadané krychle dokreslíme do obrázku ještě druhou pomocnou shodnou krychli, která nám umožní nakreslit trojúhelník s hledanou odchylkou.

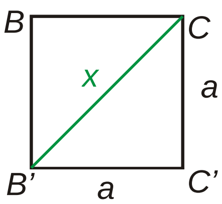


Hledaný úhel je jedním z vnitřních úhlů trojúhelníku $B'CE$.



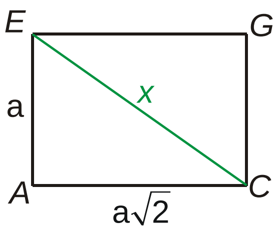
Musíme určit délky jeho stran.

Strana $B'C$ ze čtverce $B'C'BC$



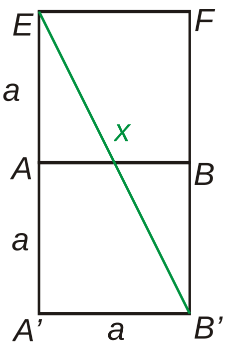
$$a^2 + a^2 = x^2$$
$$x^2 = 2a^2$$
$$x = a\sqrt{2}$$

Strana EC z obdélníku $ACGE$.



$$a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = x^2$$
$$x^2 = 3a^2$$

Strana $B'E$ z obdélníku $A'B'FE$.



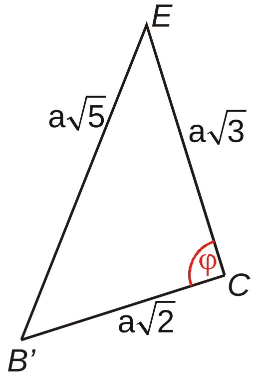
$x = a\sqrt{3}$

$a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = x^2$

$x^2 = 5a^2$

$x = a\sqrt{5}$

Zakreslíme určené délky do trojúhelníku $B'CE$ a pomocí kosinové věty určíme úhel φ.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(a\sqrt{5}\right)^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}$$

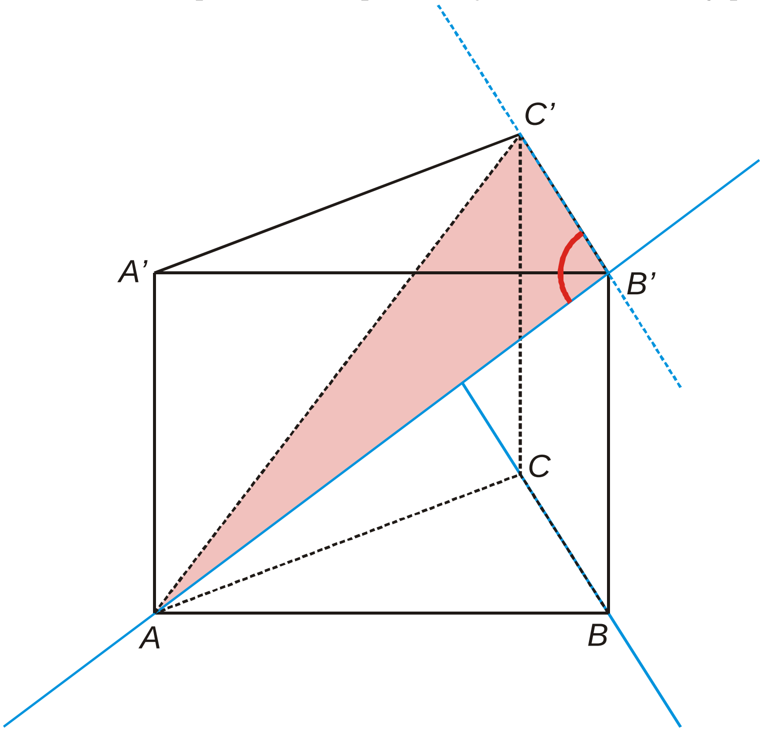
$$\cos\alpha = \frac{2a^2 + 3a^2 - 5a^2}{2 \cdot a^2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{0}{2 \cdot a^2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 90°$$

Odchylka přímek *CE* a *AH* je $90°$ $\Rightarrow$ přímky jsou na sebe kolmé.

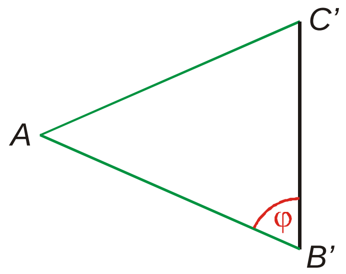
Př. 2: Najdi další způsoby, jak sestrojit rovnoběžku s jednou z přímek z předchozího příkladu tak, aby bylo možné pokračovat ve výpočtu.

Př. 3: Je dán pravidelný trojboký hranol *ABCA'B'C'* ; $|AB| = a = 6\,\text{cm}$, $|AA'| = v = 4{,}5\,\text{cm}$. Urči odchylku přímek *BC* a *AB'*.

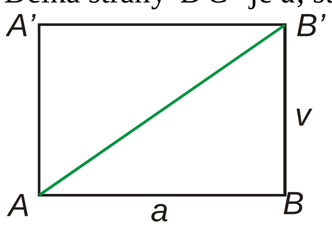
Přímky jsou mimoběžné $\Rightarrow$ musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou *BC* procházející bodem *B'*, tedy přímku *B'C'*.



Získáme trojúhelník $AB'C'$, ze kterého můžeme vypočíst úhel při vrcholu B'. Trojúhelník $AB'C'$ si nakreslíme zvlášť a určíme délky jeho stran.



Délka strany $B'C'$ je *a*, strany AB' a AC' jsou stejné určíme je z obdélníku $ABB'A'$.

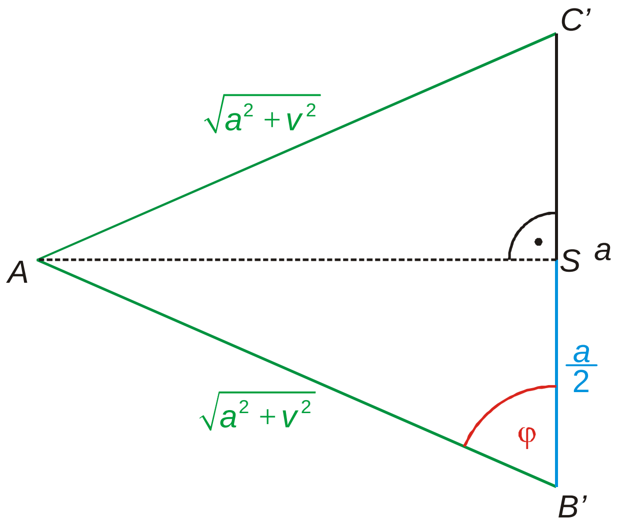


Pythagorova věta:

$$x^2 = a^2 + v^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + v^2}\ .$$

Trojúhelník $AB'C'$: Je rovnoramenný $\Rightarrow$ rozdělíme jej podle osy souměrnosti na dvě části:



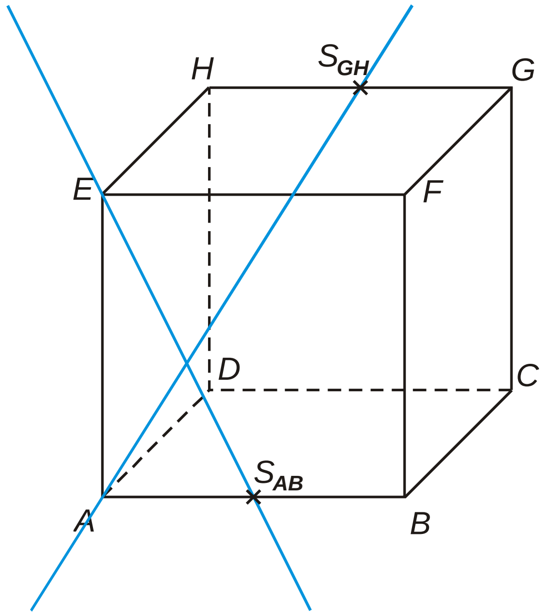
Úhel φ vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku ASB':

$$\cos\varphi = \frac{|SB'|}{|AB'|} = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+v^2}} = \frac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}}$$

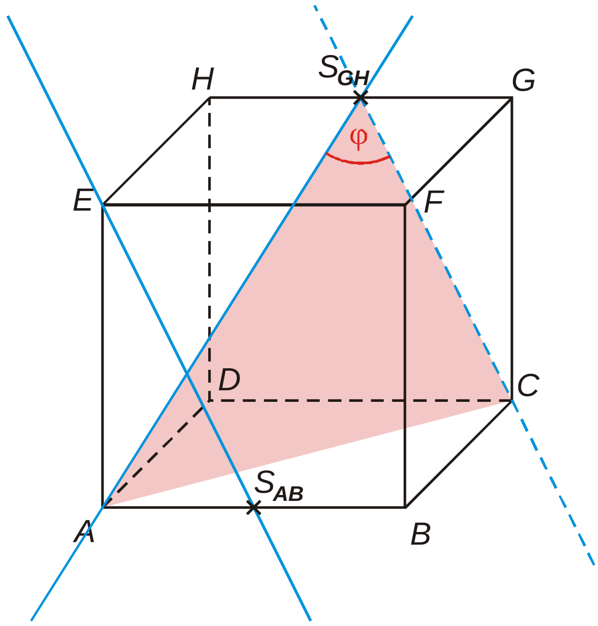
Dosadíme: $\cos\varphi = \dfrac{a}{2\sqrt{a^2+v^2}} = \dfrac{6}{2\sqrt{6^2+4{,}5^2}}$

$$\Rightarrow\ \varphi = 66°25'$$

Př. 4: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek AS_{GH}, $S_{AB}E$.



Přímky jsou mimoběžné $\Rightarrow$ musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku rovnoběžnou s přímkou $S_{AB}E$ procházející bodem S_{GH}.

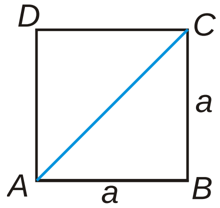


Získáme trojúhelník ACS_{GH}, ve kterém určujeme úhel u vrcholu S_{GH}.
Neznám ani jednu ze stran $\Rightarrow$ postupně je určujeme z dalších trojúhelníků.

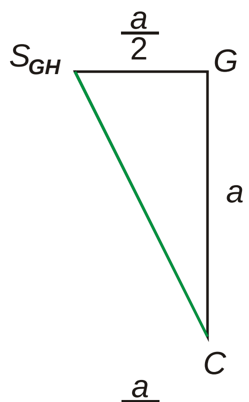
Strana *AC* ze čtverce *ABCD*:

$x^2 = a^2 + a^2$

$x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



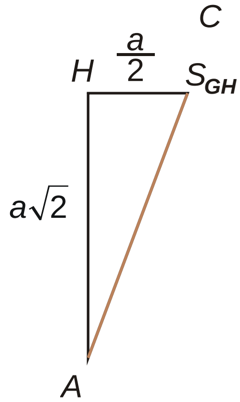
Strana $S_{GH}C$ z trojúhelníku CGS_{GH}:



$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

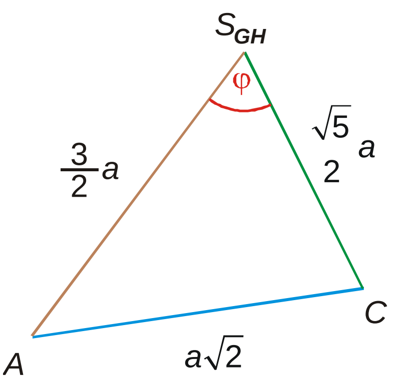
$$x = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Strana AS_{GH} z trojúhelníku AHS_{GH}:



$$x^2 = \left(\sqrt{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3}{2}a$$



Známe všechny strany trojúhelníka, pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

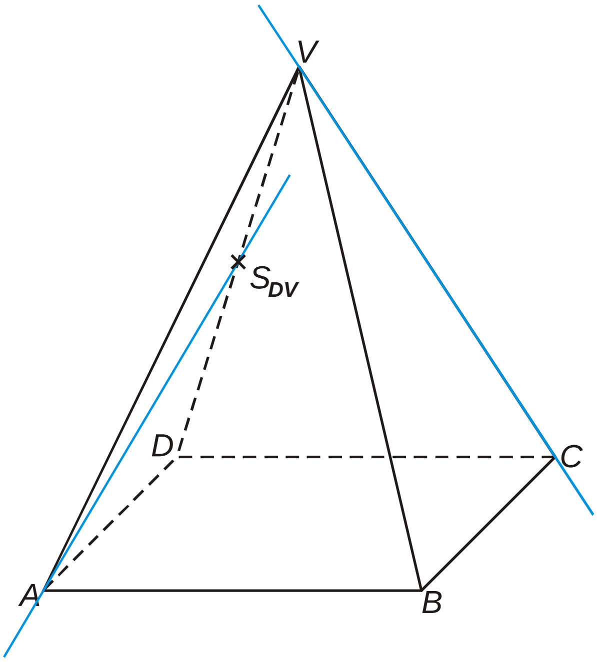
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Dosadíme: $a = a\sqrt{2}$, $b = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $c = a\dfrac{3}{2}$.

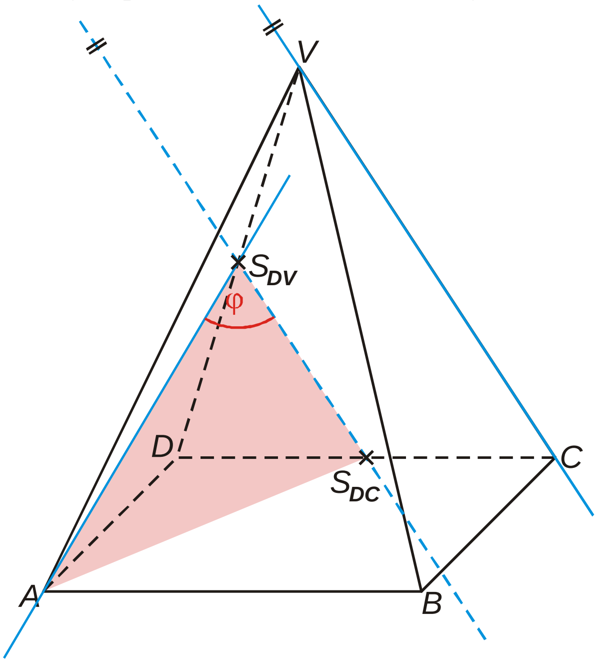
$$\cos\alpha = \frac{\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{3}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2\left(a\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(a\frac{3}{2}\right)} = \frac{a^2\frac{5}{4} + a^2\frac{9}{4} - 2a^2}{a^2\sqrt{5}\frac{3}{2}} = \frac{a^2\left(\frac{5+9-8}{4}\right)}{a^2\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{6}{4}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63°26'$$

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*; $|AB| = a = 5\,\text{cm}$, $|AV| = b = 7\,\text{cm}$. Urči odchylku přímek *CV* a AS_{DV}.



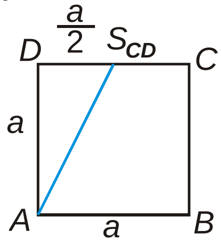
Přímky jsou mimoběžné $\Rightarrow$ musíme najít vhodnou rovnoběžku, například přímku $S_{DC}S_{DV}$, která je s přímkou CV rovnoběžná (je střední příčkou trojúhelníku *CDV*).



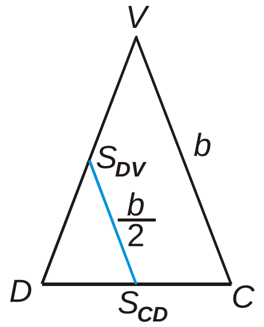
Získáme trojúhelník $AS_{CD}S_{DV}$, ve kterém určujeme úhel u vrcholu S_{DV}.
Neznám ani jednu ze stran $\Rightarrow$ postupně je určujeme z dalších trojúhelníků.

Strana AS_{CD} ze čtverce *ABCD*:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

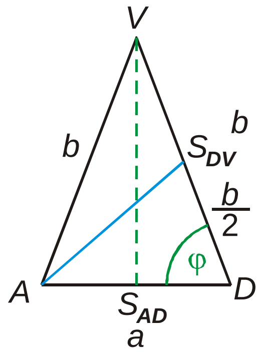


$$x=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$$



Strana $S_{DC}S_{DV}$ z trojúhelníku CDV je střední příčkou trojúhelníku odpovídající straně CV $\Rightarrow$

$$x=\left|S_{CD}S_{DV}\right|=\frac{|CV|}{2}=\frac{|AV|}{2}=\frac{b}{2}$$



Strana AS_{DV} z trojúhelníku ADS_{DV}:

Kosinová věta: $c^2=a^2+b^2-ab\cos\gamma$

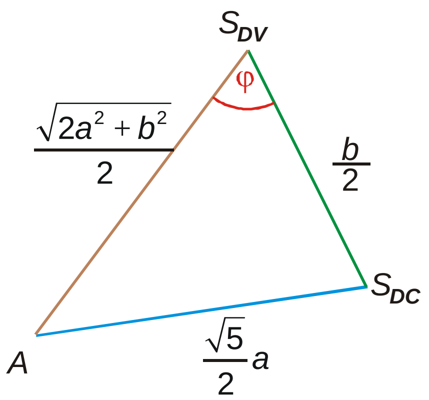
$$x^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2a\frac{b}{2}\cos\varphi$$

Hodnotu $\cos\varphi$ určíme z pravoúhlého trojúhelníku

$$S_{AD}DV:\ \cos\varphi=\frac{\frac{a}{2}}{b}=\frac{a}{2b}.$$

$$x^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2a\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2b}=a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{4}$$

$$x^2=\frac{2a^2+b^2}{4}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$$



Známe všechny strany trojúhelníka, pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$$

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Dosadíme: $a=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $b=\frac{b}{2}$, $c=\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$.

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}{2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}\right)}=\frac{\frac{b^2}{4}+\frac{2a^2+b^2}{4}-\frac{5a^2}{4}}{2\cdot\frac{b}{2}\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}}=\frac{\frac{2b^2-3a^2}{4}}{\frac{b\cdot\sqrt{2a^2+b^2}}{2}}=\frac{2b^2-3a^2}{2b\cdot\sqrt{2a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{2b^2-3a^2}{2b\cdot\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{2\cdot7^2-3\cdot5^2}{2\cdot7\cdot\sqrt{2\cdot5^2+7^2}}\Rightarrow\alpha=80°30'$$

Př. 6: Petáková:
strana 94/cvičení 31 b) e) f) i)

Shrnutí: