5.2.3 Kolmost přímek a rovin I

Předpoklady: 5202

Př. 1: Vysvětli, proč máme speciální hodiny, které se zabývají kolmostí.

Na počátku kapitoly jsme si říkali, že stereometrické definice vycházejí kvůli jednoznačnosti z rovnoběžnosti nebo z kolmosti $\Rightarrow$ musíme si proto ujasnit, jak se určuje kolmosti, abychom ji mohli v definicích používat.

Dvě přímky jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jejich odchylka je $90°$.
$\Rightarrow$

- Navzájem kolmé mohou být i mimoběžky.
- Dvě úsečky jsou kolmé, právě když leží na kolmých přímkách.

Píšeme:

- přímky: $p \perp q$, $\leftrightarrow AB \perp \leftrightarrow CD$,
- úsečky: $AB \perp CD$.

Př. 2: Doplň vztahy mezi přímkami *p*, *q*, *r* v prostoru.
a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak … b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak …

a) Je-li $p \perp q$ a $q \parallel r$, pak $p \perp r$.
b) Je-li $p \parallel q$ a $q \perp r$, pak $p \perp r$.

Př. 3: Rozhodni, zda pro přímky *p*, *q*, *r* v prostoru platí věty:
a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$. b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.
Pokud věta neplatí, najdi protipříklad na přímkách určených vrcholy standardní krychle.

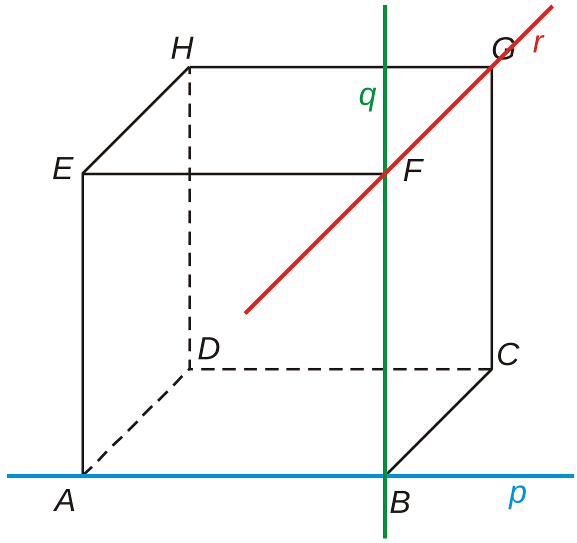
a) Je-li $p \parallel r$ a $q \perp r$, pak $p \perp q$.
Věta platí, jde o stejné tvrzení jako v bodě 1 a), pouze s prohozeným významem přímek *r* a *q*.

b) Je-li $p \perp q$ a $q \perp r$, pak $p \parallel r$.

Věta obecně neplatí, například ve standardní krychli pro přímky:

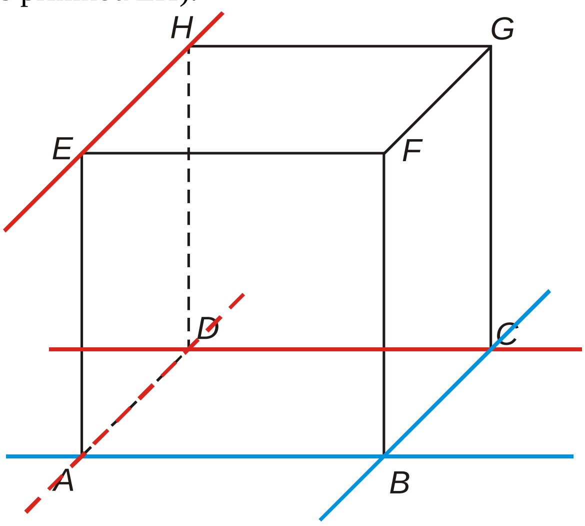
- $p = \leftrightarrow AB$
- $q = \leftrightarrow BF$
- $r = \leftrightarrow FG$

Odchylka mezi přímkou *p* a *r* může být libovolná. Například pokud bychom místo přímky *FG* zvolili za přímku *r* přímku *EF*, byly by přímky *p* a *r* rovnoběžné.

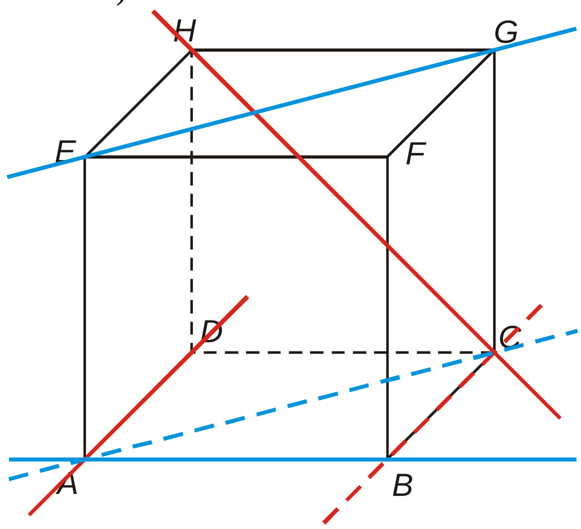


Př. 4: Rozhodni, které z dvojic přímek určených vrcholy standardní krychle jsou navzájem kolmé. Příklad řeš nejdříve bez obrázku, jen „v hlavě“.
a) AB, BC b) CD, EH c) AB, EG d) AD, CH

a) Přímky AB, BC jsou kolmé (leží na nich strany čtverce).
b) Přímky CD, EH jsou kolmé (přímka *AB* je kolmé na přímky *AD*, která je rovnoběžná s přímkou *EH*).



c) Přímky AB, EG nejsou kolmé (*AB* není kolmá s přímkou *AC*, která je rovnoběžná s přímkou *EG*).
d) Přímky AD, CH jsou kolmé (*HC* je kolmá na přímku *BC*, čtyřúhelník *BCHE* je obdélník).



Kdy je přímka kolmá k rovině?
Přímka je kolmá k rovině, právě když je kolmá ke všem přímkám roviny.

Píšeme:

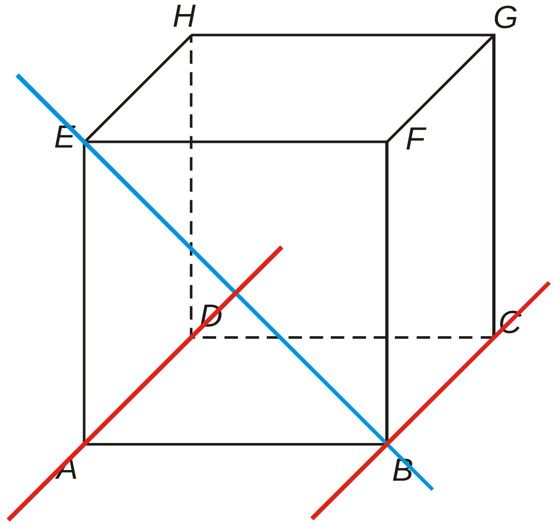
- $p \perp \rho$ - přímka *p*, je kolmá k rovině ρ = přímka *p* je kolmice k rovině ρ.

- $p \cap \rho = \{P\}$ = pata kolmice

Jak se přesvědčíme, že je rovina kolmá k přímce (zkoušet všechny přímky nemůžeme, je jich nekonečně mnoho)?
$\Rightarrow$ **kritérium kolmosti přímky a rovny:**
Je-li přímka kolmá ke dvěma různoběžkám roviny, pak je k rovině kolmá.

Př. 5: U standardní krychle *ABCDEFGH* najdi příklad toho, že přímka nemusí být kolmá k rovině, když je kolmá ke dvěma rovnoběžným přímkám v rovině.

Možností je hodně, například přímka *EB* je kolmá k přímkám *AD* i *BC*, ale k rovině *ABC* kolmá není.



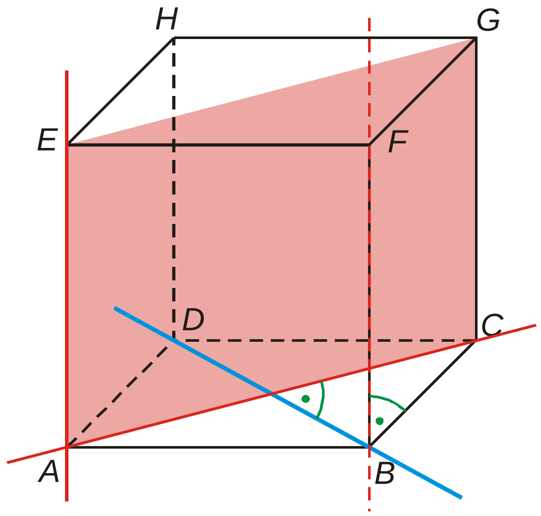
Proč nestačí kolmost na dvě rovnoběžky?
Přímka „obsahuje" jeden směr, rovina dva směry $\Rightarrow$ dvě rovnoběžky určují pouze jeden směr a nezaručují tedy, že přímka, která je k na ně kolmá, je kolmá na celou rovinu. Dvě různoběžky určují dva různé směry a tedy všechny směry roviny.

Př. 6: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Dokaž, že přímka *BD* je kolmá k rovině *ACE*.

Pokud má být přímka *BD* kolmá k rovině *ACE*, musí být kolmá ke dvě různoběžkám, které v ní leží $\Rightarrow$ hledáme dvě takové přímky:

- *BD* je kolmá k přímce *AC* (úhlopříčky v podstavě)
- *BD* je kolmá k přímce *BF* (strany obdélníka *BFHD*), *BF* je rovnoběžná s *AE* $\Rightarrow$ *BD* je kolmá k *AE*

$\Rightarrow$ *BD* je kolmá ke dvěma různoběžkám v rovině *ACE* $\Rightarrow$ je kolmá k celé rovině *ACE* (a tím i ke každé přímce v ní).

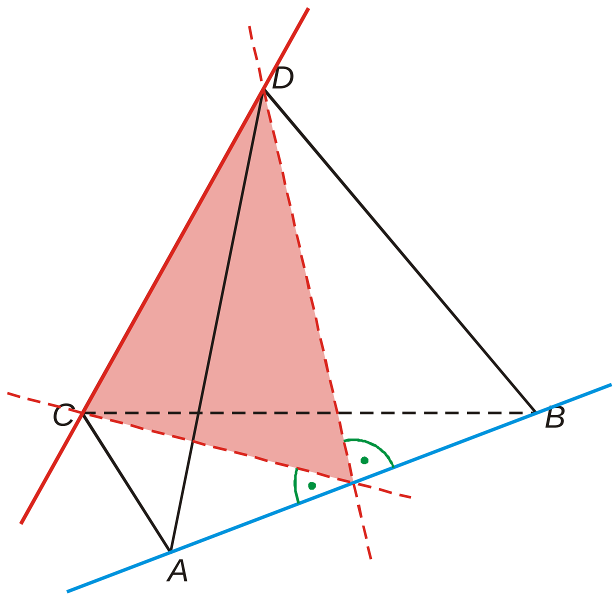


Př. 7: Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*. Dokaž, že platí $AB \perp CD$.

Nejde nalézt přímý důkaz kolmosti $\Rightarrow$ zkusíme najít rovinu, která obsahuje přímku *CD* a je kolmá na *AB*.
Adept: rovina CDS_{AB}. Dokazujeme, že $CDS_{AB} \perp AB$:

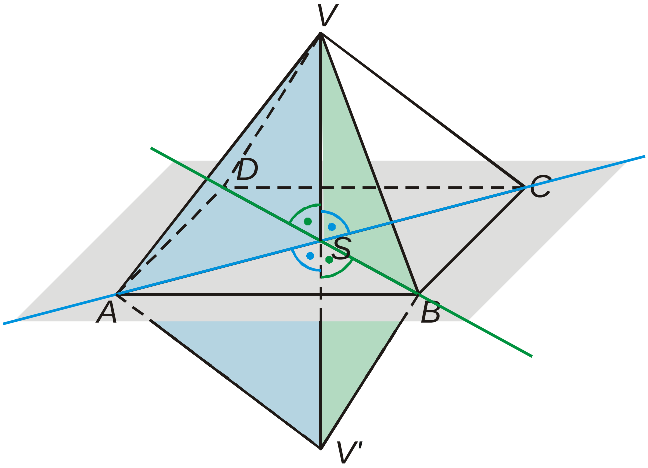
- přímka *AB* je kolmá na úsečku CS_{AB} (CS_{AB} je výška v rovnostranném trojúhelníku *ABC*),
- přímka *AB* je kolmá na úsečku DS_{AB} (DS_{AB} je výška v rovnostranném trojúhelníku *ABD*),

$\Rightarrow$ přímka *AB* je kolmá na rovinu CDS_{AB} (je kolmá na dvě různoběžné přímky v této rovině CS_{AB} a DS_{AB}) $\Rightarrow$ je tedy kolmá na všechny přímky v této rovině i na přímku *DC*.

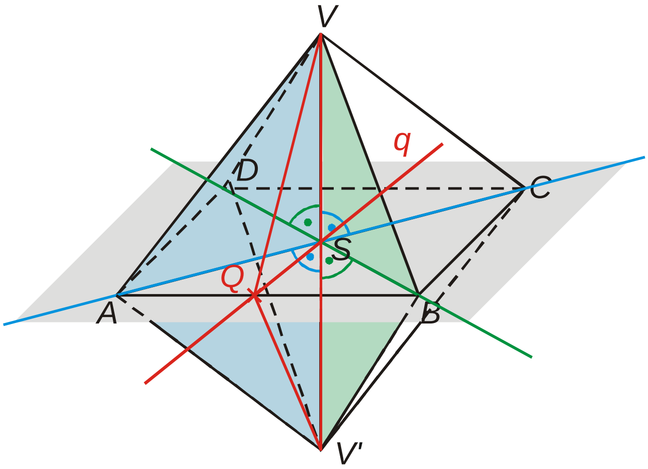


Se zájemci se vrátíme ke kritériu kolmosti přímky a roviny.

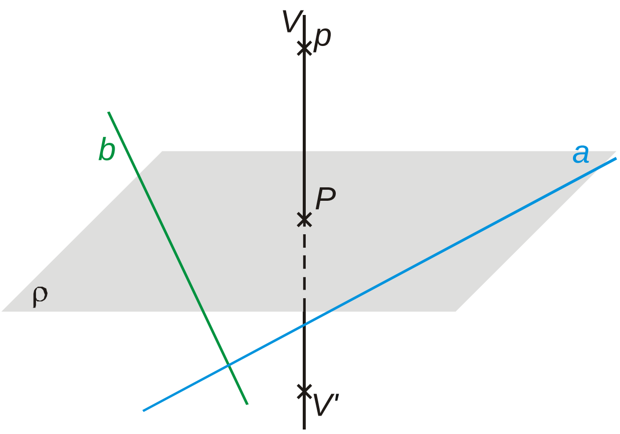
Př. 8: (BONUS) V klasické učebnici je kritérium kolmosti přímky a roviny dokazováno způsobem uvedeným níže. Zobecni důkaz pro přímku *p* kolmou k přímkám *a*, *b* v rovině ρ. Přímky *a*, *b* nejsou navzájem kolmé a neprochází patou kolmice přímky *p*.



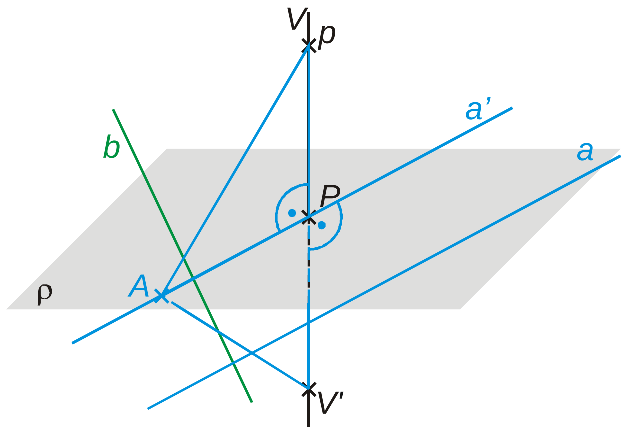
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*. Předpokládáme, že přímky *VS* je kolmá k přímkám *AC* a *BD* roviny *ABC* (vybarvená šedě). Na přímce *VS* sestrojíme bod *V'* tak, aby platilo $|VS| = |VS'|$ (vznikne tak jehlan $ABCDV'$ shodný s jehlanem *ABCDV*).
Trojúhelník *ASV* (modrý) je shodný s trojúhelníkem ASV' (věta *sss*).
Trojúhelník *BSV* (zelený) je shodný s trojúhelníkem BSV' (věta *sss*).



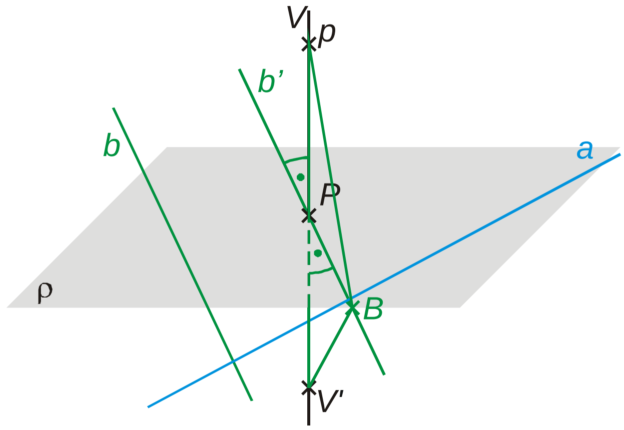
Nakreslíme si libovolnou přímku *q* ležící v rovině *ABC*. Její průsečík s přímkou *AB* označíme *Q*. Dokazujeme, že trojúhelníky *QSV* a QSV' jsou shodné. Víme: $|VS| = |VS'|$ $\Rightarrow$ potřebujeme $|QV| = |QV'|$.
Trojúhelníky *QAV* a QAV' jsou shodné (věta *sus*) $\Rightarrow$ platí $|QV| = |QV'|$ $\Rightarrow$ *QSV* a QSV' jsou shodné (věta *sss*) $\Rightarrow$ úhly *QSV* a QSV' jsou shodné, dohromady se rovnají přímému úhlu $\Rightarrow$ jsou kolmé $\Rightarrow$ přímka *VS* je kolmá na přímku *q*.



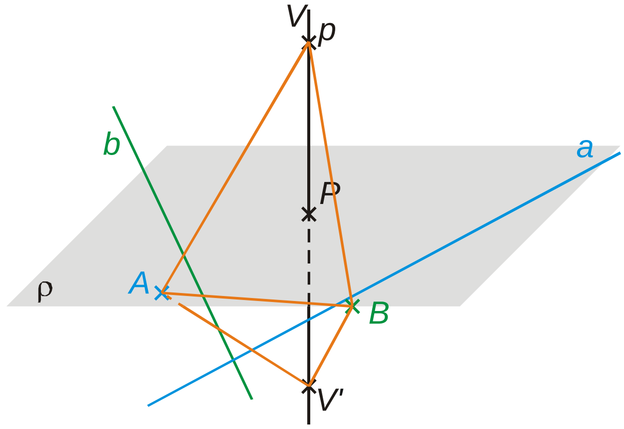
Krok 1:
Přímka *p* je kolmá k přímkám *a*, *b* v rovině ρ. Přímky *a*, *b* nejsou navzájem kolmé a neprochází patou kolmice přímky *p*.
Vyznačíme průsečík *P* přímky *p* s rovinou ρ.
Na přímce *p* zvolíme bod *V*.
Na přímce *p* zvolíme bod V' tak, aby platilo $|VP| = |VP'|$.



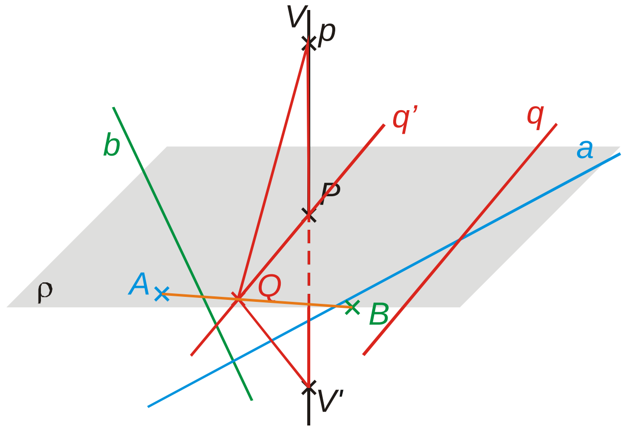
Krok 2:
Bodem P vedeme rovnoběžku a' s přímkou a, na které zvolíme libovolný bod A různý od P.
Trojúhelníky APV a APV' shodné podle věty *sus* (společná strana AP, úhly APV a APV', strany PV a PV').



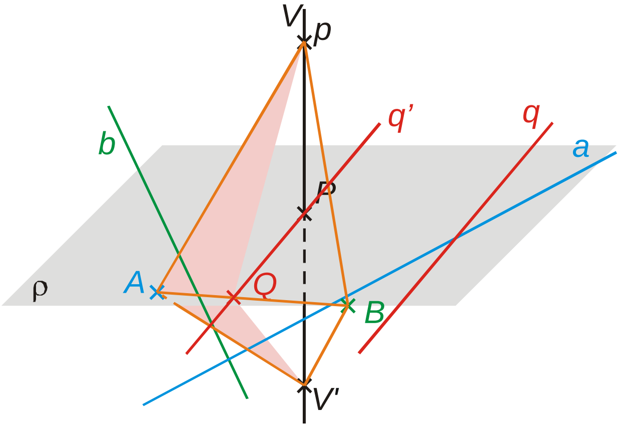
Krok 3:
Bodem P vedeme rovnoběžku b' s přímkou b, na které zvolíme libovolný bod B různý od P.
Trojúhelníky APV a APV' shodné podle věty *sus* (společná strana AP, úhly APV a APV', strany PV a PV').



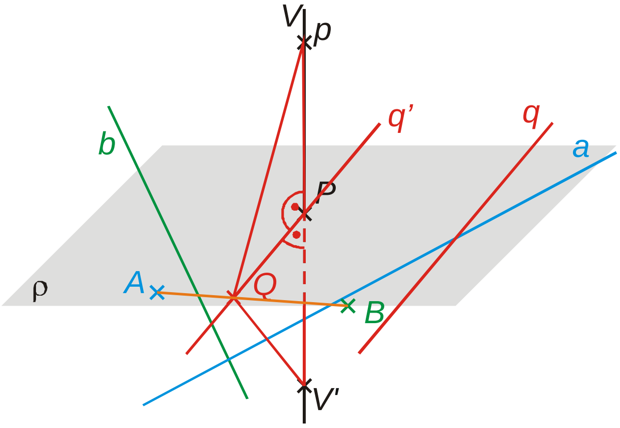
Krok 4:
V předchozích krocích jsme dokázali, že trojúhelníky ABV a ABV' jsou shodné podle věty *sss* (společná strana AB, shodná dvojice stran AV, AV' a shodná dvojice stran BV, BV').



Krok 5:
V libovolnou přímkou q roviny ABC (u které chceme dokázat její kolmost k přímce p) sestrojíme rovnoběžku bodem P. Její průsečík s úsečkou AB označíme Q.
Potřebujeme dokázat shodnost trojúhelníků QPV a QPV'. Víme, že se shodují dvě dvojice stran: společná strana QP a strany PV a PV' $\Rightarrow$ dokazujeme shodnost stran QV a QV'.



Krok 6:
Trojúhelníky AQV a AQV' jsou shodné podle věty *sus*: společná strana AQ, shodné úhly QAV a QAV' (ve shodných trojúhelnících viz. krok 4), shodné strany AV, AV' $\Rightarrow$ strana QV je shodná se stranou QV'.



Krok 7:
Trojúhelníky QPV a QPV' jsou shodné podle věty *sss* $\Rightarrow$ úhly QPV a QPV' jsou shodné, jejich součet je úhel pravý $\Rightarrow$ oba jsou kolmé $\Rightarrow$ přímka q' je kolmá k přímce p $\Rightarrow$ přímka q je kolmá k přímce p.

Pokud by byla přímka q' rovnoběžná s přímkou AB stačí zvolit jeden z bodů A, B jinak. Postup důkazu se nemění.

Shrnutí: