5.2.4 Kolmost přímek a rovin II

Předpoklady: 5203

Př. 1: Zformuluj stereometrické věty analogické k planimetrické větě: „Daným bodem lze v rovině k dané přímce vést jedinou kolmici."

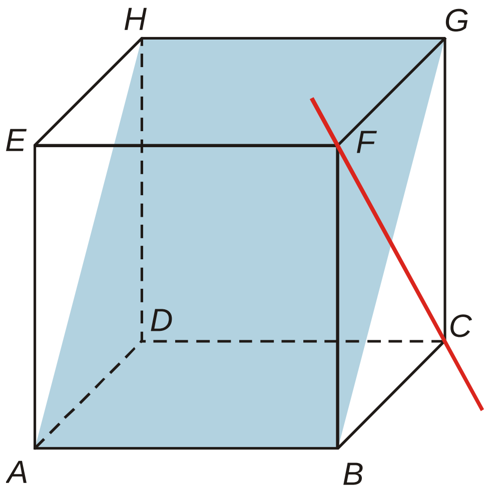
Věta: „Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmici." je nesprávná, kolmých přímek je nekonečně mnoho a tvoří rovinu. $\Rightarrow$ můžeme zformulovat dvě věty:

- Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmou rovinu.
- Daným bodem lze v prostoru k dané rovině vést jedinou kolmici.

Pedagogická poznámka: Studenti budou určitě nejdříve navrhovat větu: „Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmici." Že je věta nesprávná můžeme pomocí tužek ukázat snadno.
Pokud je čas, je možné diskusi směřovat k tomu, že kolmý směr, který hledáme, je vlastně „zbytkem do počtu rozměrů". V dvojrozměrné rovině k přímce zbýval jediný směr, který se směrem přímky „nemá nic společného" (je na ní kolmý) a proto bylo hledání kolmice daným bodem jednoznačné. V trojrozměrném prostoru zbývají k přímce dva rozměry, které spolu se zadaným bodem jednoznačně určují rovinu.

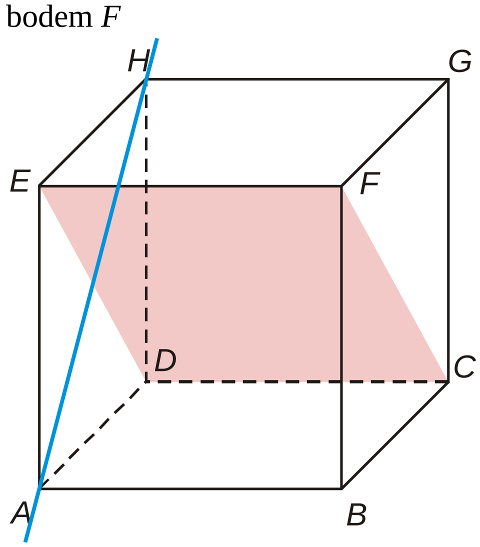
Př. 2: Ve standardní krychli najdi:
a) přímku kolmou na rovinu *BGH* procházející bodem *C*,
b) rovinu kolmou na přímku *AH* procházející bodem *F*.

a) přímka kolmá na rovinu *BGH* procházející bodem *C*



Hledanou přímkou je přímka *FC* (je kolmá na přímku *BG* a přímku *HG*).

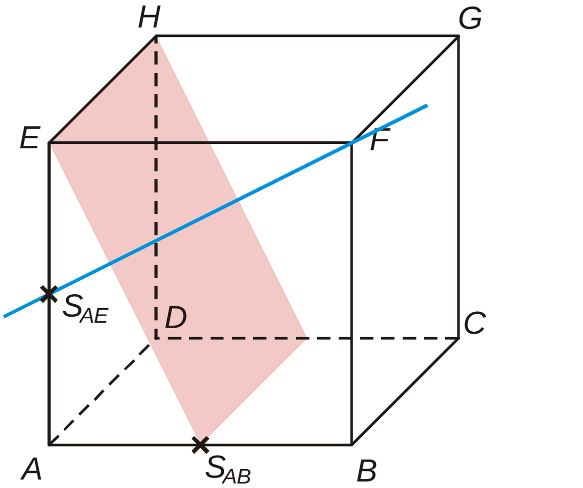
b) rovina kolmá na přímku *AH* procházející bodem *F*



Hledanou rovinou je rovina *CDE* (obsahuje dvě přímky kolmé na přímku *AH*: přímku *ED* a přímku *EF*).

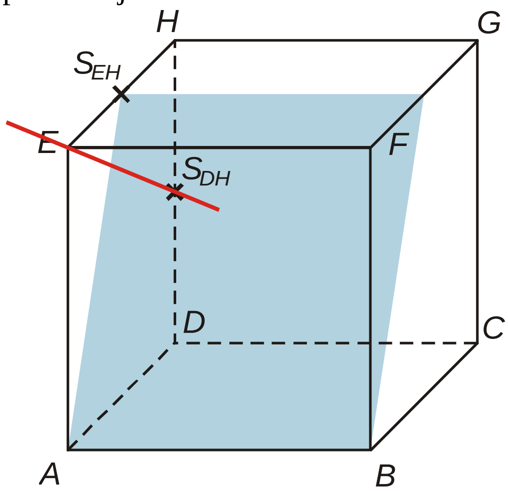
Př. 3: Ve standardní krychli najdi:
a) rovinu kolmou na přímku $S_{AE}F$ procházející bodem *E*,
b) přímku kolmou na rovinu ABS_{EH} procházející bodem *E*.

a) rovina kolmá na přímku $S_{AE}F$ procházející bodem *E*



Přímka $S_{AE}F$ leží v přední stěně $\Rightarrow$ hledaná rovina určitě obsahuje přímku *EH* (je kolmá na přední stěnu).
Druhou přímkou hledané roviny je přímka ES_{AB} (leží v přední stěně a je kolmá na $S_{AE}F$).
Hledanou rovinou je rovina EHS_{AB}.

b) přímka kolmá na rovinu ABS_{EH} procházející bodem *E*



Hledaná přímka leží v levé boční stěně (boční stěna je kolmá k přímce *AB*), musí být kolmá na přímku AS_{EH} $\Rightarrow$ jde o přímku ES_{DH}.

Př. 4: Doplň následující věty tak, aby platily pro libovolné přímky *p*, *q* a libovolné roviny ρ a σ:
a) Je-li $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$ pak …
b) Je-li $p \perp \rho$ a $q \parallel p$ pak …
c) Je-li $p \perp \rho$ a $\sigma \perp p$ pak …
d) Je-li $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$ pak …

a) Je-li $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$, pak $p \parallel q$.
b) Je-li $p \perp \rho$ a $q \parallel p$ pak $q \perp \rho$.
c) Je-li $p \perp \rho$ a $\sigma \perp p$ pak $\rho \parallel \sigma$.
d) Je-li $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$ pak $p \perp \sigma$.

Kolmý (pravoúhlý) průmět

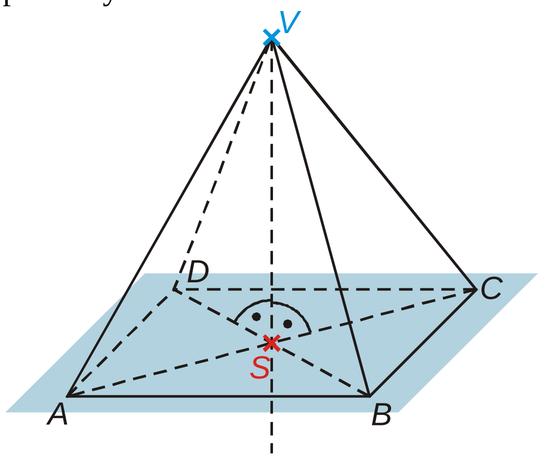
Př. 5: V praxi se často využívá kolmý průmět bodu do roviny. Navrhni postup konstrukce.

Kolmým průmětem bodu *A* do roviny ρ je pata A' kolmice vedené bodem *A* k rovině ρ.

$\Rightarrow$ Kolmice bodem *A* je pouze jedna $\Rightarrow$ kolmý průmět A' je jednoznačně určený bodem *A* a rovinou ρ.

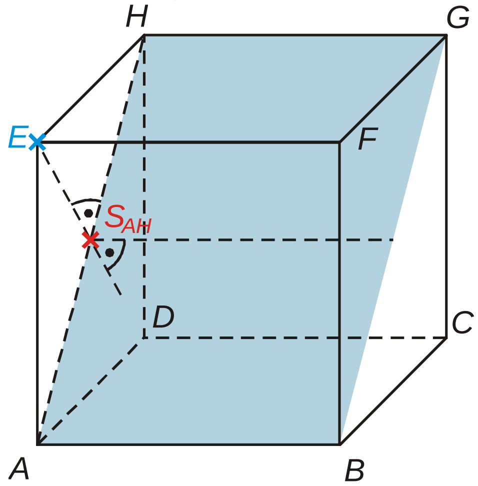
Př. 6: Najdi:
a) kolmý průmět vrcholu V pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ do roviny podstavy,
b) kolmý průmět vrcholu E do roviny ABG ve standardní krychli.

a) kolmý průmět vrcholu V pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ do roviny podstavy



Hledaným bodem je střed S podstavy jehlanu.

b) kolmý průmět vrcholu E do roviny ABG ve standardní krychli

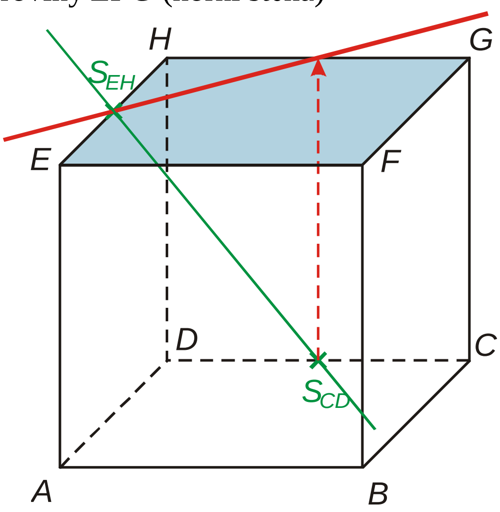


Hledaným bodem je bod S_{AH} - střed pravé boční stěny.

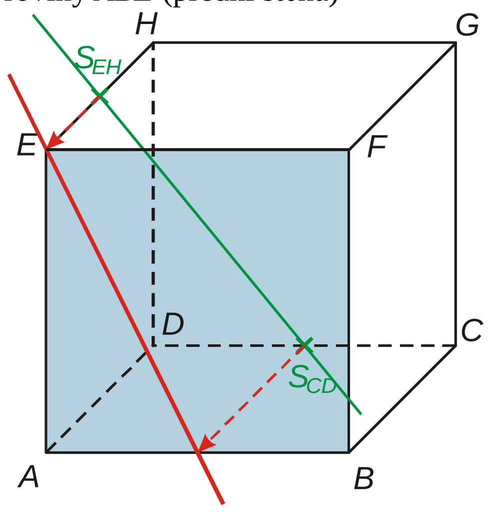
Kolmý průmět útvaru do roviny ρ je množina kolmých průmětů jeho bodů (pravoúhlé promítání).
Jak budeme konstruovat **kolmý (pravoúhlý) průmět přímky**?
Promítneme dva vhodné body a spojíme je.

Př. 7: Ve standardní krychli najdi pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do:
a) roviny EFG (horní stěna),
b) roviny ABE (přední stěna),
c) roviny BCF (pravá boční stěna).

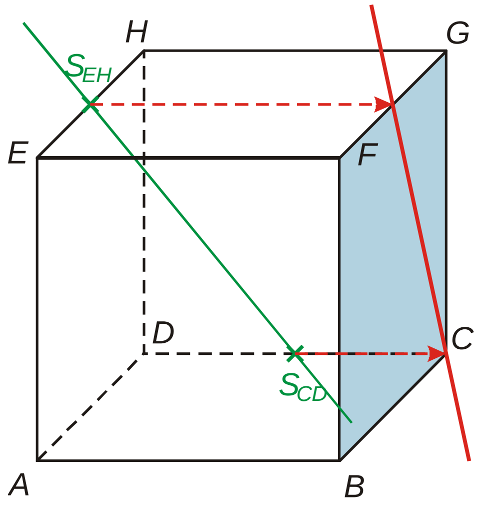
a) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny EFG (horní stěna)



b) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny ABE (přední stěna)



c) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny *BCF* (pravá boční stěna)

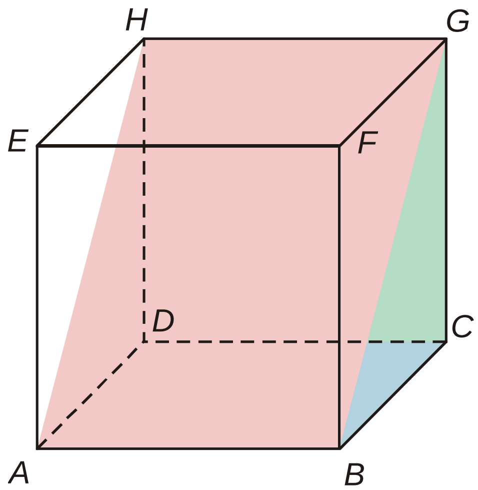


Př. 8: Najdi kritérium pro kolmost dvou rovin.

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Píšeme $\rho \perp \sigma$, vztah je oboustranný.

Př. 9: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH* a tři roviny *ABC*, *CDG*, *ABG*. Urči, které dvě jsou na sebe kolmé.



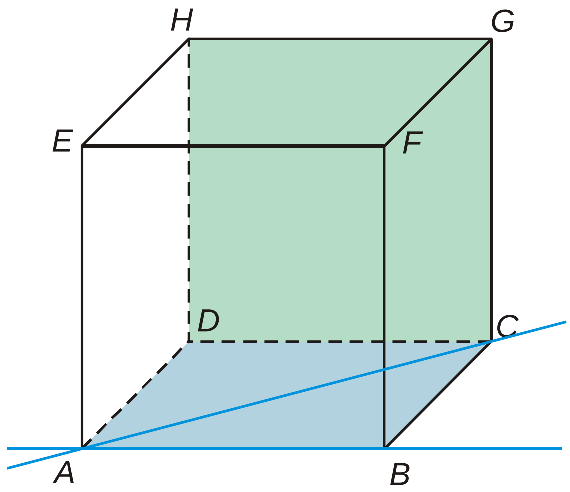
Navzájem kolmé jsou roviny *ABC* a *CDG*. Například rovina *CDG* obsahuje přímku *CG* kolmou na přímky *AB* a *BC*.

Př. 10: Je dána rovina ρ a dvě k ní kolmé navzájem různoběžné roviny σ a τ. Rozhodni, co musí platit pro průsečnici

Rovina σ obsahuje směr kolmý k rovině ρ, stejně jako rovina τ, směr průsečnice je společným směrem obou rovin $\Rightarrow$ průsečnice je kolmá k rovině ρ.

$\Rightarrow$ předchozí úvaha ukazuje cestu jak hledat kolmice na rovinu: K rovině najdeme dvě navzájem kolmé roviny a jejich průsečnice je hledanou kolmo přímkou.

Př. 11: Rozhodni, zda pro roviny ρ, σ a přímku p platí věta: „Je-li $\rho \perp \sigma$ a $p \subset \rho$, pak $p \perp \sigma$.



Věta neplatí.
Například rovina *ABC* je kolmá na rovinu *CDG*, přesto v rovině *ABC* leží přímka *AC*, která na rovinu *CDG* kolmá není.
Přímka *AB* je dokonce s rovinou *CDG* rovnoběžná.

Shrnutí: