

5.2.4 Kolmost přímek a rovin II

Předpoklady: 5203

Př. 1: Zformuluj stereometrické věty analogické k planimetrické větě: „Daným bodem lze v rovině k dané přímce vést jedinou kolmici.“

Věta: „Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmici.“ je nesprávná, kolmých přímek je nekonečně mnoho a tvoří rovinu. \Rightarrow můžeme zformulovat dvě věty:

- Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmou rovinu.
- Daným bodem lze v prostoru k dané rovině vést jedinou kolmici.

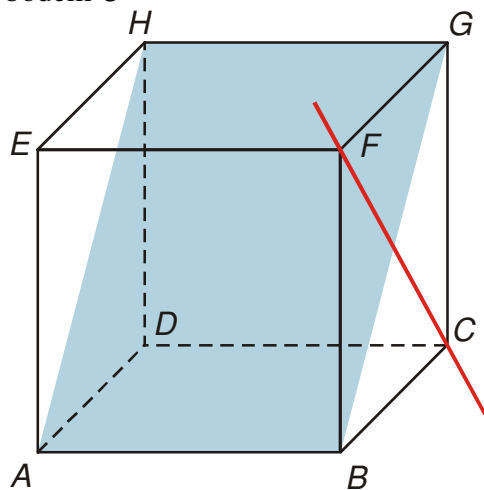
Pedagogická poznámka: Studenti budou určitě nejdříve navrhnout větu: „Daným bodem lze v prostoru k dané přímce vést jedinou kolmici.“ Že je věta nesprávná, můžeme pomocí tužek ukázat snadno.

Pokud je čas, je možné diskusi směřovat k tomu, že kolmý směr, který hledáme, je vlastně „zbytkem do počtu rozměrů“. V dvojrozměrné rovině k přímce zbyval jediný směr, který se směrem přímky „nemá nic společného“ (je na ni kolmý) a proto bylo hledání kolmice daným bodem jednoznačné. V trojrozměrném prostoru zůstávají k přímce dva rozměry, které spolu se zadaným bodem jednoznačně určují rovinu.

Př. 2: Ve standardní krychli najdi:

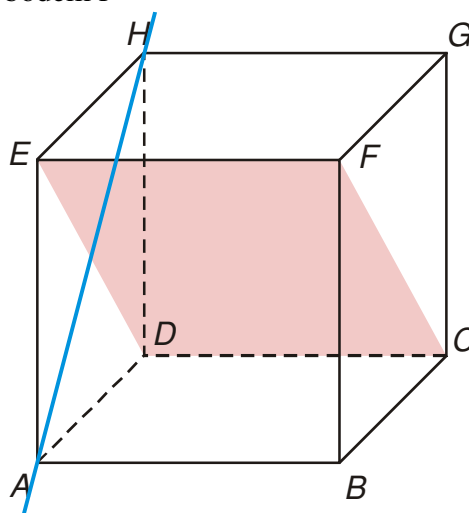
- a) přímku kolmou na rovinu BGH procházející bodem C ,
- b) rovinu kolmou na přímku AH procházející bodem F .

a) přímka kolmá na rovinu BGH procházející bodem C



Hledanou přímkou je přímka FC (je kolmá na přímku BG a přímku HG).

b) rovina kolmá na přímku AH procházející bodem F

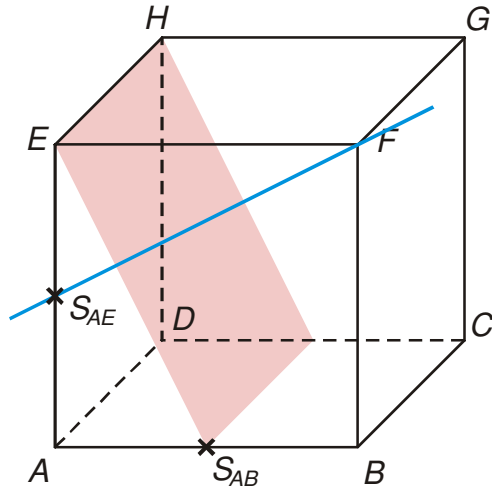


Hledanou rovinou je rovina CDE (obsahuje dvě přímky kolmé na přímku AH : přímku ED a přímku EF).

Př. 3: Ve standardní krychli najdi:

- rovinu kolmou na přímce $S_{AE}F$ procházející bodem E ,
- přímku kolmou na rovinu ABS_{EH} procházející bodem E .

a) rovina kolmá na přímce $S_{AE}F$ procházející bodem E

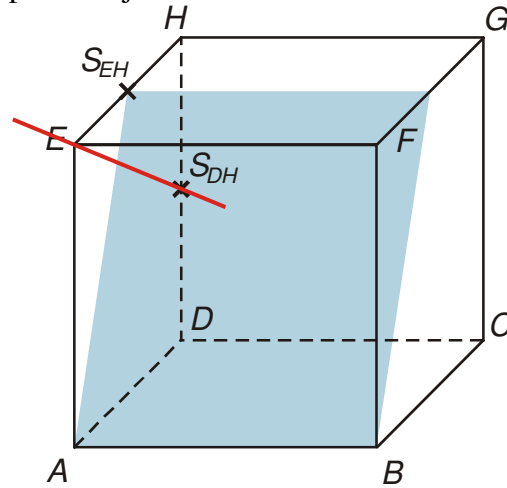


Přímka $S_{AE}F$ leží v přední stěně \Rightarrow hledaná rovina určitě obsahuje přímku EH (je kolmá na přední stěnu).

Druhou přímkou hledané roviny je přímka ES_{AB} (leží v přední stěně a je kolmá na $S_{AE}F$).

Hledanou rovinou je rovina EHS_{AB} .

b) přímka kolmá na rovinu ABS_{EH} procházející bodem E



Hledaná přímka leží v levé boční stěně (boční stěna je kolmá k přímce AB), musí být kolmá na přímce $AS_{EH} \Rightarrow$ jde o přímku ES_{DH} .

Př. 4: Doplně následující věty tak, aby platily pro libovolné přímky p, q a libovolné roviny ρ a σ :

- Je-li $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$ pak ...
- Je-li $p \perp \rho$ a $q \parallel p$ pak ...
- Je-li $p \perp \rho$ a $\sigma \perp p$ pak ...
- Je-li $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$ pak ...

- Je-li $p \perp \rho$ a $q \perp \rho$, pak $p \parallel q$.
- Je-li $p \perp \rho$ a $q \parallel p$ pak $q \perp \rho$.
- Je-li $p \perp \rho$ a $\sigma \perp p$ pak $\rho \parallel \sigma$.
- Je-li $p \perp \rho$ a $\rho \parallel \sigma$ pak $p \perp \sigma$.

Kolmý (pravouhlý) průmět

Př. 5: V praxi se často využívá kolmý průmět bodu do roviny. Navrhni postup konstrukce.

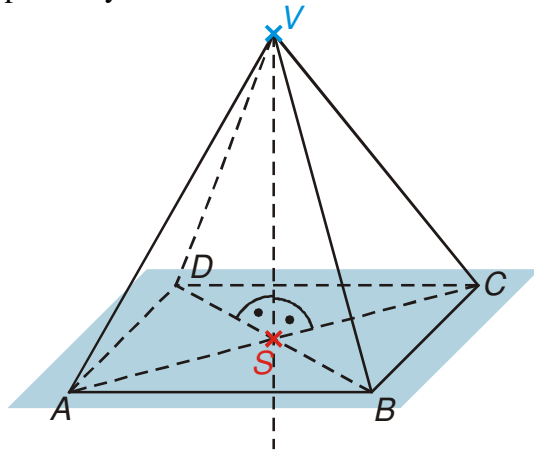
Kolmým průmětem bodu A do roviny ρ je pata A' kolmice vedené bodem A k rovině ρ .

\Rightarrow Kolmice bodem A je pouze jedna \Rightarrow kolmý průmět A' je jednoznačně určený bodem A a rovinou ρ .

Př. 6: Najdi:

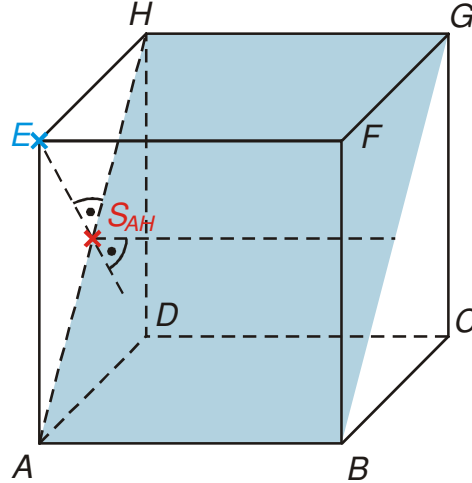
- kolmý průmět vrcholu V pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ do roviny podstavy,
- kolmý průmět vrcholu E do roviny ABG ve standardní krychli.

a) kolmý průmět vrcholu V pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ do roviny podstavy



Hledaným bodem je střed S podstavy jehlanu.

b) kolmý průmět vrcholu E do roviny ABG ve standardní krychli



Hledaným bodem je bod S_{AH} - střed pravé boční stěny.

Kolmý průmět útvaru do roviny ρ je množina kolmých průmětů jeho bodů (pravoúhlé promítání).

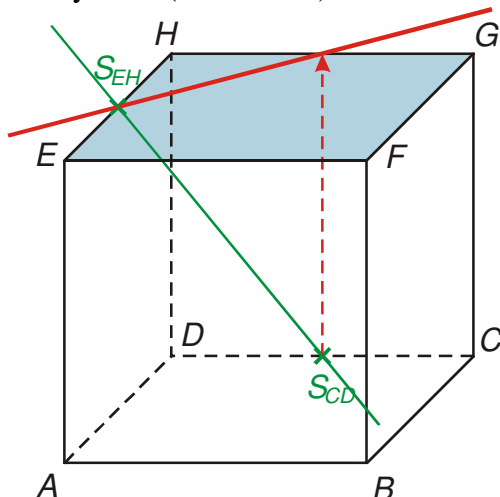
Jak budeme konstruovat **kolmý (pravoúhlý) průmět přímky?**

Promítneme dva vhodné body a spojíme je.

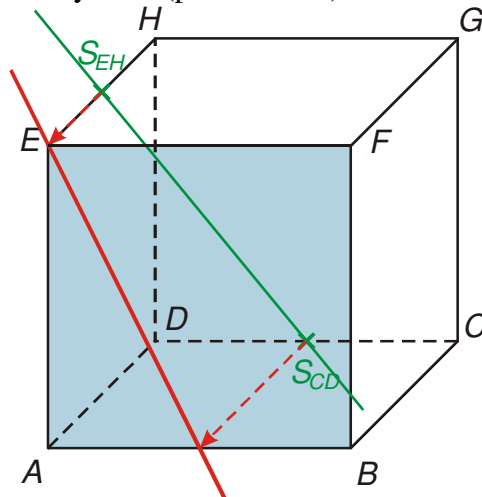
Př. 7: Ve standardní krychli najdi pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do:

- roviny EFG (horní stěna),
- roviny ABE (přední stěna),
- roviny BCF (pravá boční stěna).

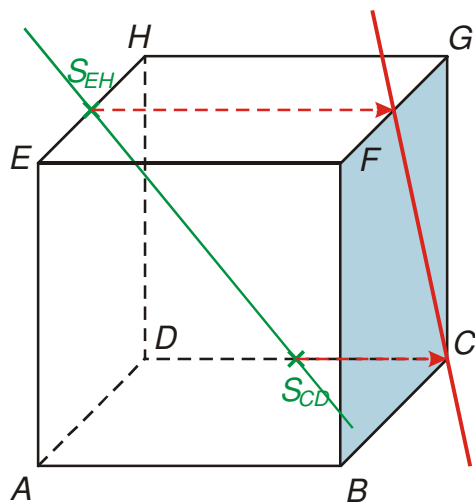
a) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny EFG (horní stěna)



b) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny ABE (přední stěna)



c) pravoúhlý průmět přímky $S_{EH}S_{CD}$ do roviny BCF (pravá boční stěna)

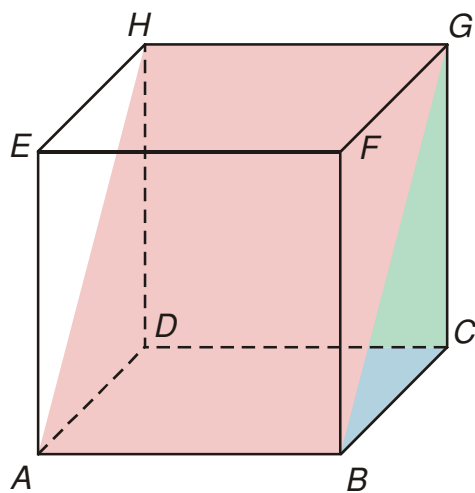


Př. 8: Najdi kritérium pro kolmost dvou rovin.

Dvě roviny jsou k sobě kolmé právě tehdy, když jedna z nich obsahuje přímku kolmou k druhé rovině.

Píšeme $\rho \perp \sigma$, vztah je oboustranný.

Př. 9: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$ a tři roviny ABC , CDG , ABG . Urči, které dvě jsou na sebe kolmé.



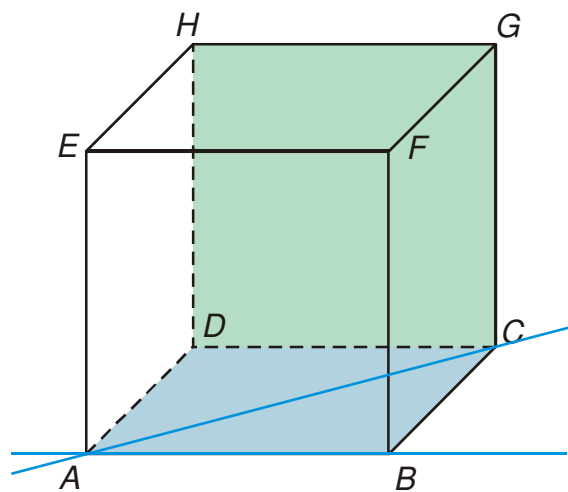
Navzájem kolmé jsou roviny ABC a CDG . Například rovina CDG obsahuje přímku CG kolmou na přímky AB a BC .

Př. 10: Je dána rovina ρ a dvě k ní kolmé navzájem různoběžné roviny σ a τ . Rozhodni, co musí platit pro průsečnici

Rovina σ obsahuje směr kolmý k rovině ρ stejně jako rovina τ , směr průsečnice je společným směrem obou rovin \Rightarrow průsečnice je kolmá k rovině ρ .

\Rightarrow předchozí úvaha ukazuje cestu, jak hledat kolmice na rovinu: K rovině najdeme dvě navzájem kolmé roviny a jejich průsečnice je hledanou kolmou přímkou.

Př. 11: Rozhodni, zda pro roviny ρ , σ a přímku p platí věta: „Je-li $\rho \perp \sigma$ a $p \subset \rho$, pak $p \perp \sigma$.“



Věta neplatí.
Například rovina ABC je kolmá na rovinu CDG , přesto v rovině ABC leží přímka AC , která na rovinu CDG kolmá není.
Přímka AB je dokonce s rovinou CDG rovnoběžná.

Shrnutí: