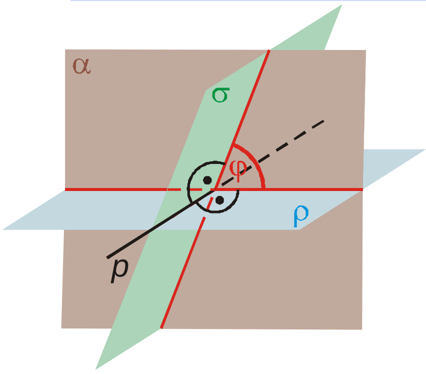
5.2.6 Odchylka rovin

Předpoklady: 5204

Odchylku dvou přímek už umíme, jak definovat odchylku dvou rovin?

Co by měla definice splňovat:
- podobně jako u ostatních věcí ji musíme převést na něco co už umíme (asi odchylku přímek),
- měla by být jednoznačná,
- měla by dávat očekávané výsledku u „jasných“ případů (rovnoběžných a kolmých rovin).

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Odchylku rovin ρ a σ píšeme: $|\measuredangle\rho\sigma|$.

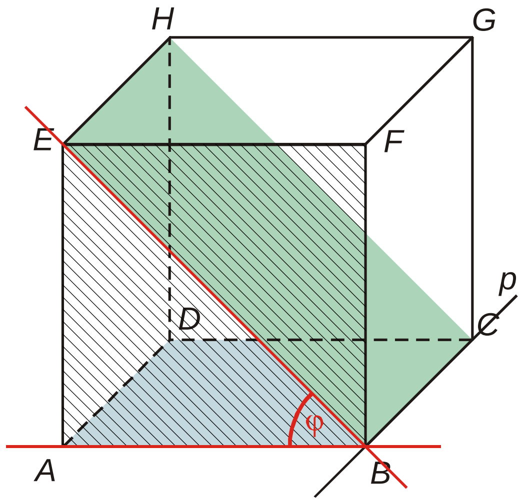


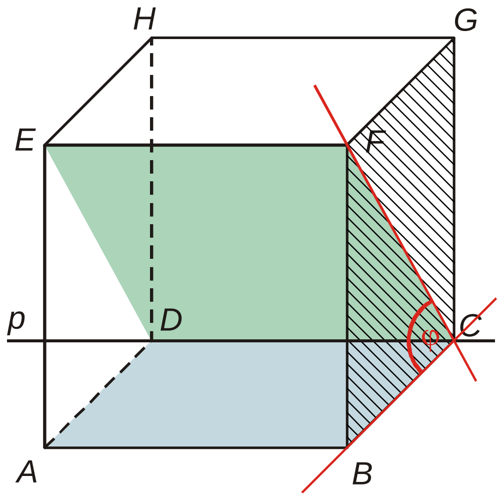
Jak najdeme rovinou kolmou na obě roviny?
Hledaná rovina je kolmá na průsečnici obou rovin.

Př. 1: Je dána standardní krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku rovin.
a) *BCE*, *ABC* b) *ABC*, *CDE* c) *DFG*, *ABE*

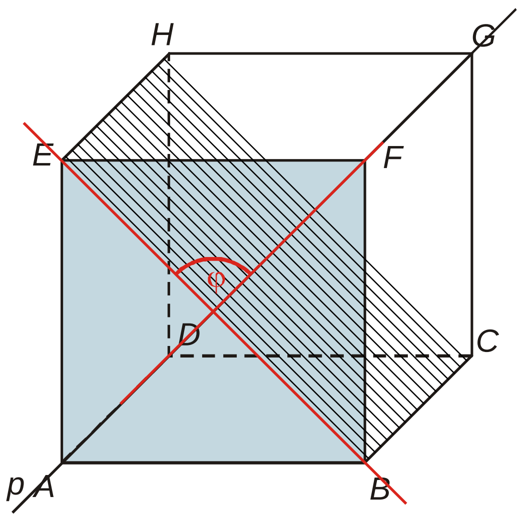
a) *BCE*, *ABC*
Průsečnicí obou rovin je přímka *BC* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina *ABE* (přední stěna) $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic *AB* a *BE* $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.

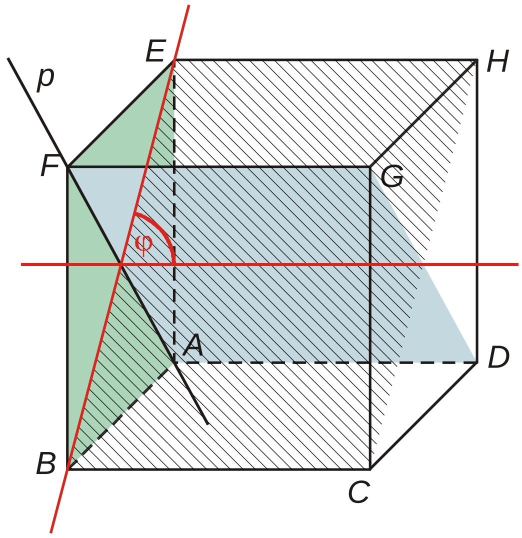
b) *ABC*, *CDE*
Průsečnicí obou rovin je přímka *CD* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina *BCF* (pravá boční stěna) $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic *BC* a *FC* $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$.





c) *DFG*, *ABE*
Průsečnicí obou rovin je přímka *AF* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina *BCE* $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic *BE* a $S_{BE}S_{CH}$ $\Rightarrow$ $\varphi = 90°$.



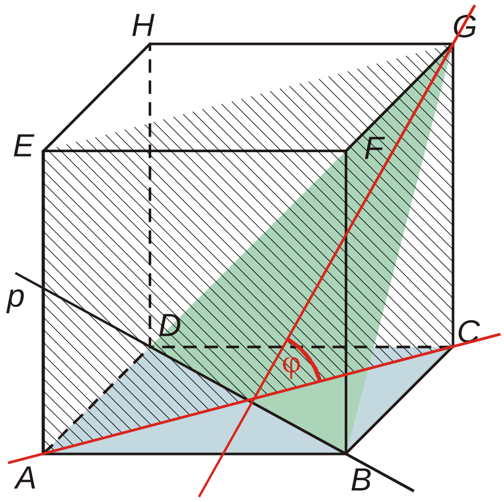


Obrázek v klasické poloze je velmi nepřehledný, stačí jej otočit o $90°$ a situace je podstatně zřejmější.

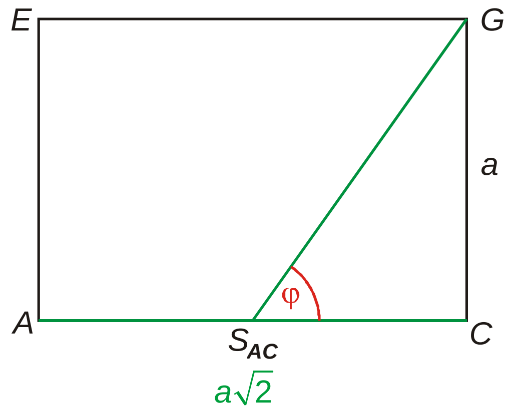
Pedagogická poznámka: Studenti by si měli vyzkoušet v bodě c) nakreslit krychli z jiné strany, je to v některých případech až nečekaně účinné.

Př. 2: Je dána standardní krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku rovin *BDG* a *ABC*.

Průsečnicí obou rovin je přímka *BD* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina *ACE* $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic *AC* a $S_{AC}G$ $\Rightarrow$ nakreslíme si situaci v rovině *ACG*



⇒

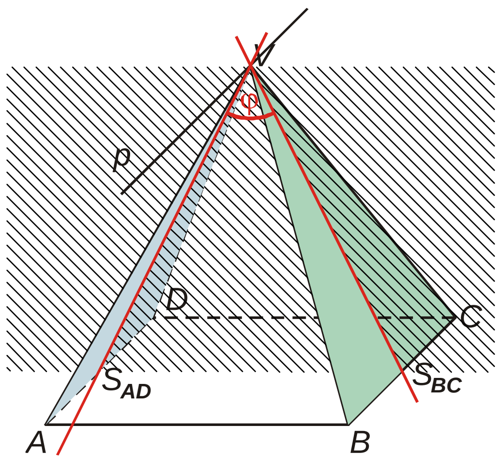


Odchylku spočteme z pravoúhlého trojúhelníku $S_{AC}CG$:

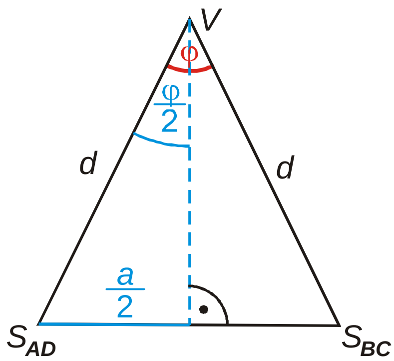
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{|CG|}{|S_{AC}C|} = \frac{a}{a\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 54°44'$$

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABDCV*; $|AB| = a = 6\,\text{cm}$, $|AV| = b = 8\,\text{cm}$. Urči odchylku rovin *ADV* a *BCV*.

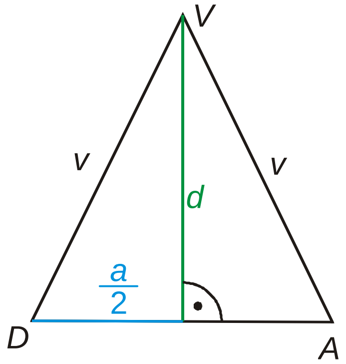
Průsečnicí obou rovin je přímka procházející vrcholem *V* rovnoběžná s přímkou *AB* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $S_{AD}S_{BC}V$ $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic $S_{AD}V$ a $S_{BC}V$ $\Rightarrow$ nakreslíme si situaci v rovině $S_{AD}S_{BC}V$.



⇒



$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|}$$



Vzdálenost $S_{AD}V$ určíme z rovnoramenného trojúhelníku *ADV*.

$$d^2 = v^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 - a^2}{4}$$

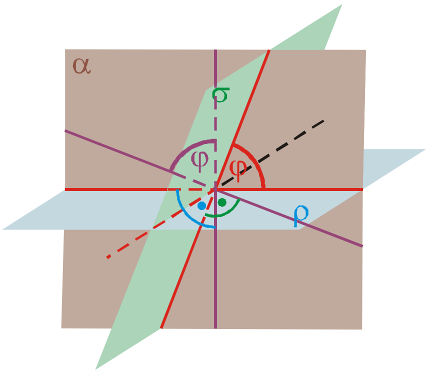
$$d = \sqrt{\frac{4v^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 - a^2}}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{4v^2-a^2}}{2}}=\frac{a}{\sqrt{4v^2-a^2}}=\frac{6}{\sqrt{4\cdot 8^2-6^2}}\Rightarrow\frac{\varphi}{2}=23°51'\Rightarrow\varphi=47°43'$$

Př. 4: Jdou dány dvě dvojice rovnoběžných rovin ρ, ρ' a σ, σ'. Jaký je vztah odchylek $|\measuredangle\rho\sigma|$ a $|\measuredangle\rho'\sigma'|$?

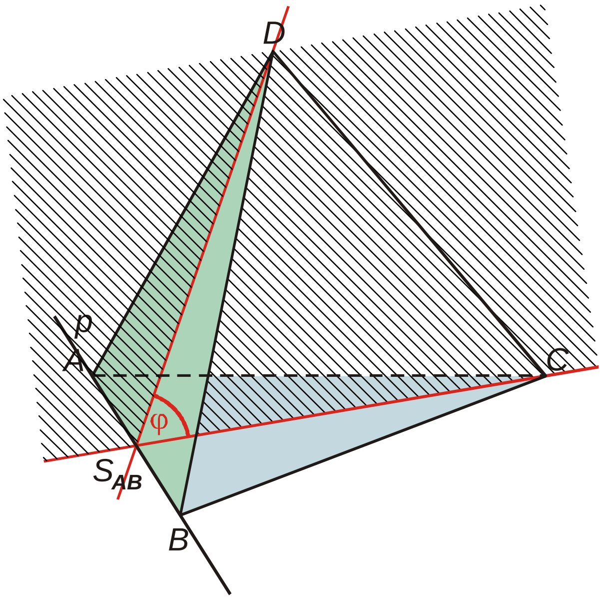
Platí: $|\measuredangle\rho\sigma|=|\measuredangle\rho'\sigma'|$

Jak jinak určit odchylku dvou rovin?
Směr roviny je určen také přímkou, která je k ní kolmá (**normála roviny**) $\Rightarrow$ odchylku rovin můžeme určit jako odchylku jejich normál.

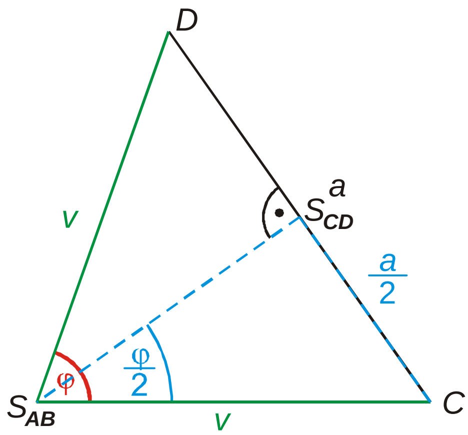


Př. 5: Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*. Urči odchylku stěn *ABC* a *ABD*.

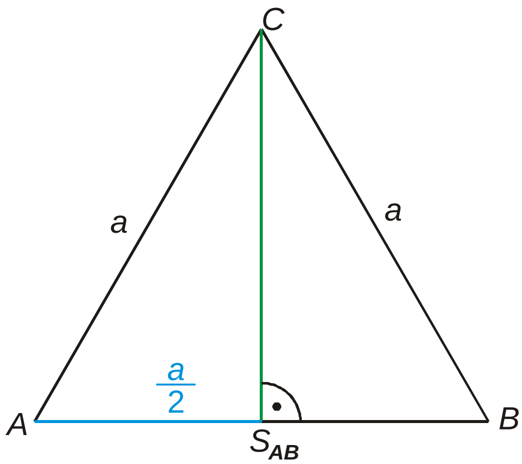
Průsečnicí obou rovin je přímka *AB* $\Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $S_{AB}CD$ $\Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic $S_{AB}D$ a $S_{AB}C$ $\Rightarrow$ nakreslíme si situaci v trojúhelníku $S_{AB}CD$.



$\Rightarrow$



$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{|S_{CD}C|}{|S_{AB}C|}$$



Délku výšky určíme z rovnostranného trojúhelníku *ABC*.

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{CD}C|}{|S_{AB}C|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 35°16' \Rightarrow \varphi = 70°31'$$

Př. 6: Petáková:
strana 94/cvičení 37 b)
strana 94/cvičení 35 d) e)
strana 94/cvičení 36 d)

Shrnutí: Odchylku rovin určujeme jako odchylku průsečnic s pomocnou na obě roviny kolmou rovinou.