

5.2.6 Odchylka rovin

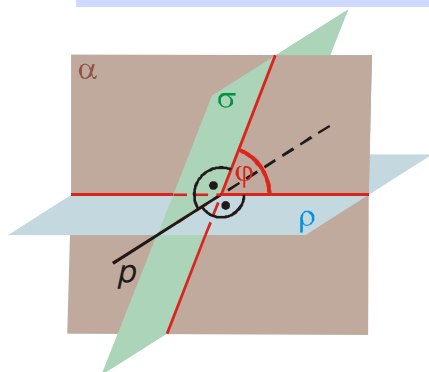
Předpoklady: 5204

Odchylku dvou přímek už umíme, jak definovat odchylku dvou rovin?

Co by měla definice splňovat:

- podobně jako u ostatních věcí ji musíme převést na něco, co už umíme (asi odchylku přímek),
- měla by být jednoznačná,
- měla by dávat očekávané výsledky u „jasných“ případů (rovnoběžných a kolmých rovin).

Odchylka dvou rovin je odchylka jejich průsečnic s rovinou, která je k oběma rovinám kolmá. Odchylku rovin ρ a σ píšeme: $|\sphericalangle \rho \sigma|$.



Jak najdeme rovinu kolmou na obě roviny?

Hledaná rovina je kolmá na průsečnici obou rovin.

Př. 1: Je dána standardní krychle $ABDCEFGH$. Urči odchylku rovin.

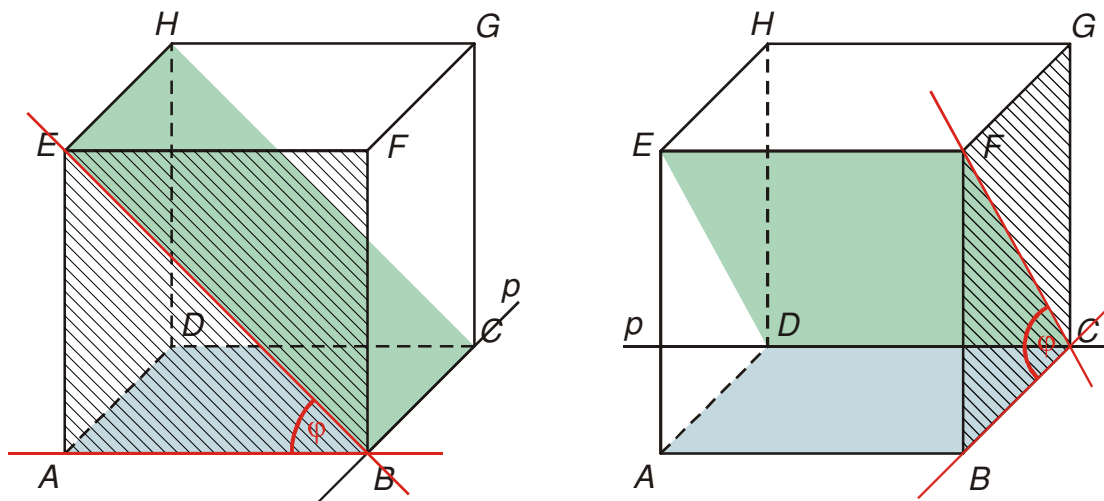
- a) BCE, ABC b) ABC, CDE c) DFG, ABE

a) BCE, ABC

Průsečnicí obou rovin je přímka $BC \Rightarrow$
pomocnou kolmou rovinou je rovina ABE
(přední stěna) \Rightarrow určíme odchylku
průsečnic AB a $BE \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

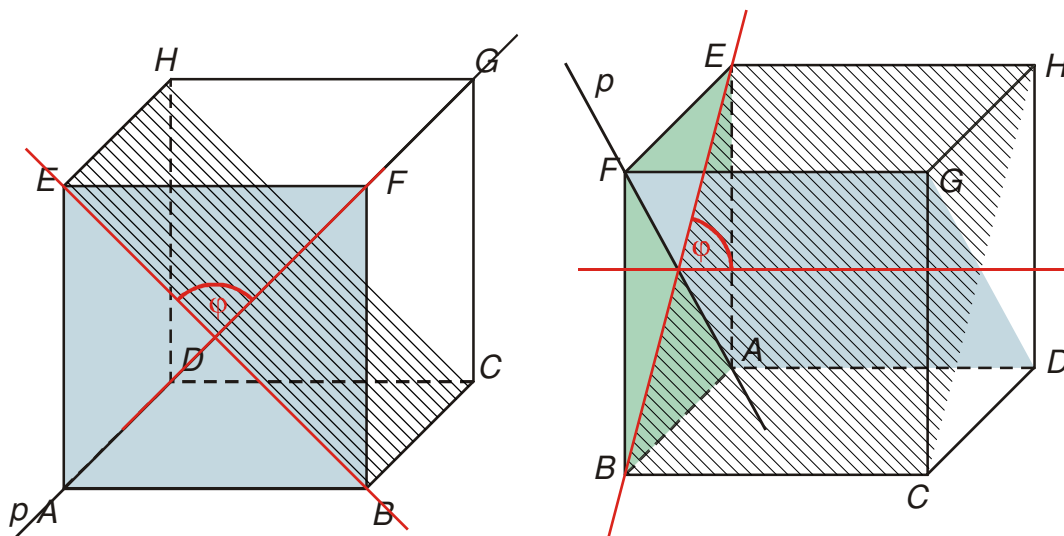
b) ABC, CDE

Průsečnicí obou rovin je přímka $CD \Rightarrow$
pomocnou kolmou rovinou je rovina BCF
(pravá boční stěna) \Rightarrow určíme odchylku
průsečnic BC a $FC \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.



c) DFG, ABE

Průsečnicí obou rovin je přímka $AF \Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $BCE \Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic BE a $S_{BE}S_{CH} \Rightarrow \varphi = 90^\circ$.

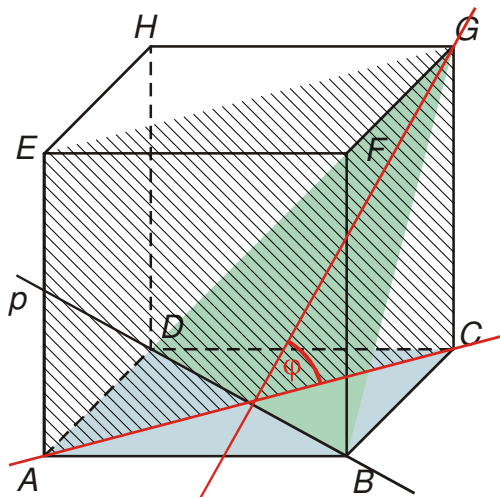


Obrázek v klasické poloze je velmi nepřehledný, stačí jej otočit o 90° a situace je podstatně zřejmější.

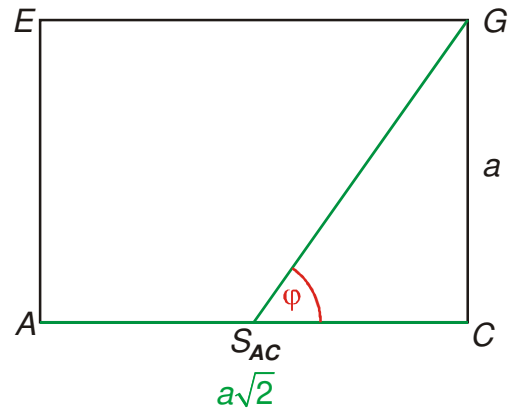
Pedagogická poznámka: Studenti by si měli vyzkoušet v bodě c) nakreslit krychli z jiné strany, je to v některých případech až nečekaně účinné.

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABDCEFGH$. Urči odchylku rovin BDG a ABC .

Průsečnicí obou rovin je přímka $BD \Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $ACE \Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic AC a $S_{AC}G \Rightarrow$ nakreslíme si situaci v rovině ACG



⇒

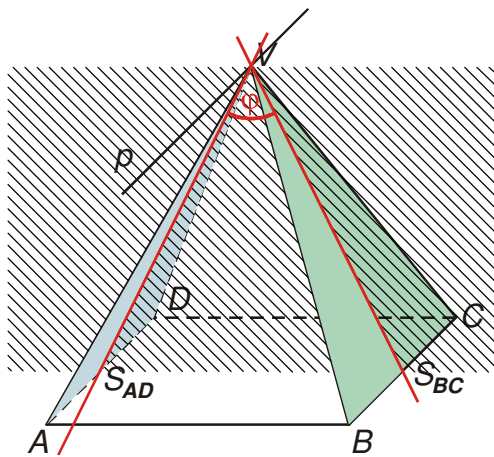


Odchylku spočteme z pravoúhlého trojúhelníku $S_{AC}CG$:

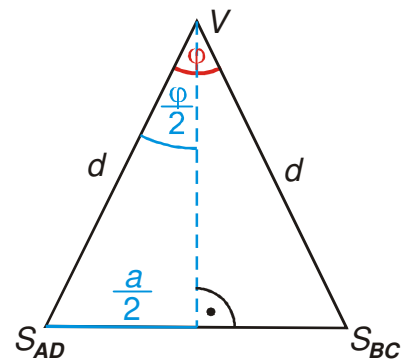
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|CG|}{|S_{AC}C|} = \frac{a}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi = 54^{\circ}44'$$

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABDCV$; $|AB| = a = 6 \text{ cm}$, $|AV| = b = 8 \text{ cm}$. Urči odchylku rovin ADV a BCV .

Průsečnicí obou rovin je přímka procházející vrcholem V rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $S_{AD}S_{BC}V \Rightarrow$ určujeme odchylku průsečnic $S_{AD}V$ a $S_{BC}V \Rightarrow$ nakreslíme si situaci v rovině $S_{AD}S_{BC}V$.



⇒

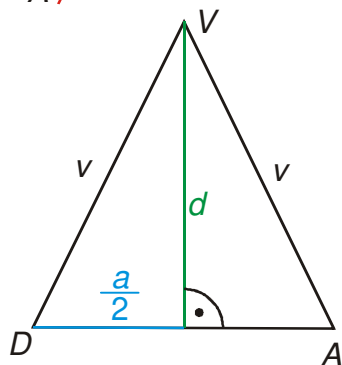


$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|}$$

Vzdálenost $S_{AD}V$ určíme z rovnoramenného trojúhelníku ADV .

$$d^2 = v^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 - a^2}{4}$$

$$d = \sqrt{\frac{4v^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 - a^2}}{2}$$



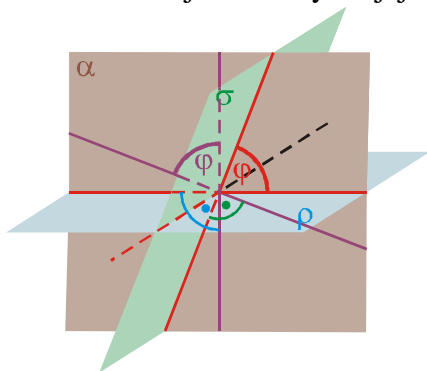
$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{AD}S|}{|S_{AD}V|} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{4v^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{4v^2 - a^2}} = \frac{6}{\sqrt{4 \cdot 8^2 - 6^2}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 23^\circ 51' \Rightarrow \varphi = 47^\circ 43'$$

Př. 4: Jdou dány dvě dvojice rovnoběžných rovin ρ, ρ' a σ, σ' . Jaký je vztah odchylek $|\angle \rho \sigma|$ a $|\angle \rho' \sigma'|$?

Platí: $|\angle \rho \sigma| = |\angle \rho' \sigma'|$

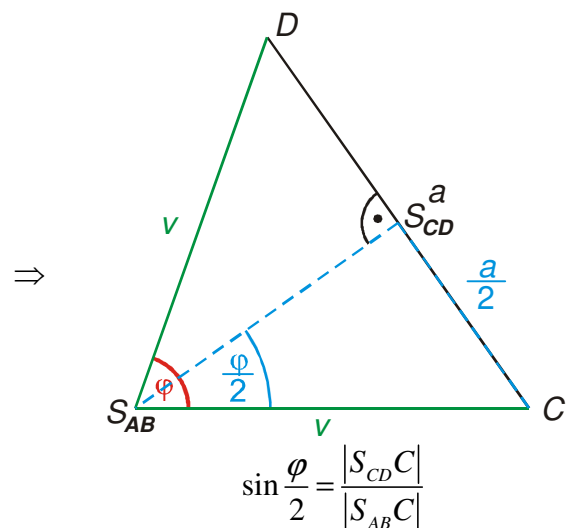
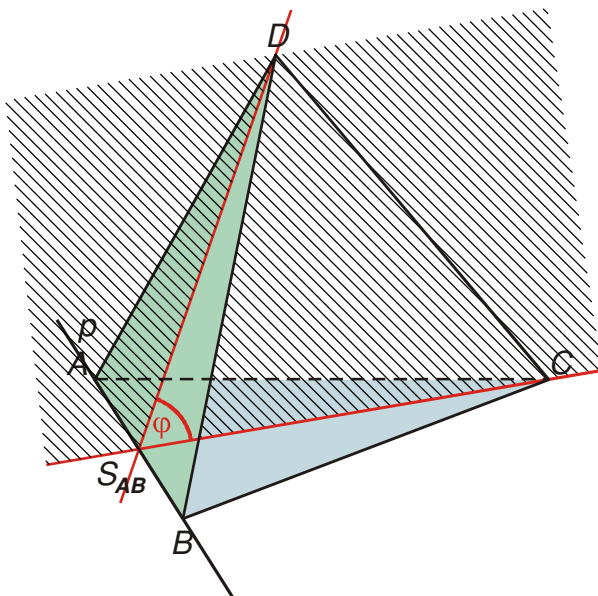
Jak jinak určit odchylku dvou rovin?

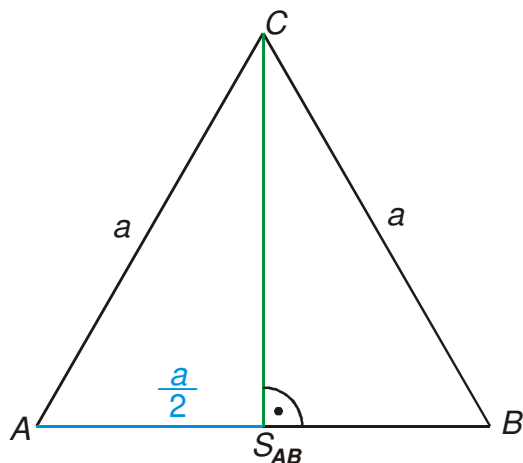
Směr roviny je určen také přímkou, která je k ní kolmá (**normála roviny**) \Rightarrow odchylku rovin můžeme určit jako odchylku jejich normál.



Př. 5: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Urči odchylku stěn ABC a ABD .

Přesečnicí obou rovin je přímka $AB \Rightarrow$ pomocnou kolmou rovinou je rovina $S_{AB}CD \Rightarrow$ určíme odchylku průsečnic $S_{AB}D$ a $S_{AB}C \Rightarrow$ nakreslíme si situaci v trojúhelníku $S_{AB}CD$.





Délku výšky určíme z rovnostranného trojúhelníku ABC .

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{|S_{CD}C|}{|S_{AB}C|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 35^\circ 16' \Rightarrow \varphi = 70^\circ 31'$$

Př. 6: Petáková:

strana 94/cvičení 37 b)

strana 94/cvičení 35 d) e)

strana 94/cvičení 36 d)

Shrnutí: Odchylku rovin určujeme jako odchylku průsečnic s pomocnou na obě roviny kolmou rovinou.