

5.2.8 Vzdálenost bodu od přímky

Předpoklady: 5207

Pedagogická poznámka: Třída počítá samostatně. Patnáct minut před koncem se sejdeme na příklad 4 a), který pak řešíme společně.

Vzdálenost bodů A, B je rovna délce úsečky AB , značíme $|AB|$.

Vzdálenost bodu A od přímky p : Bod A a přímka p určují rovinu, v ní postupujeme stejně jako v planimetrii \Rightarrow určíme vzdálenost bodu A a paty kolmice na přímku p jdoucí bodem A . Píšeme $|Ap|$ nebo $|A \leftrightarrow KL|$.

Je dána přímka p a bod A . Vzdáleností bodu A od přímky p rozumíme vzdálenost bodu A od bodu P , který je patou kolmice vedené v rovině Ap k přímce p z bodu A .

Př. 1: Porovnej definici vzdálenosti bodu A od přímky p s definicí odchylky přímky p od roviny ρ a najdi shodné rysy.

V obou definicích se používáme kolmosti.

- Sestrojíme kolmici a s její pomocí patu.
- Sestrojíme kolmý průmět přímky do roviny.

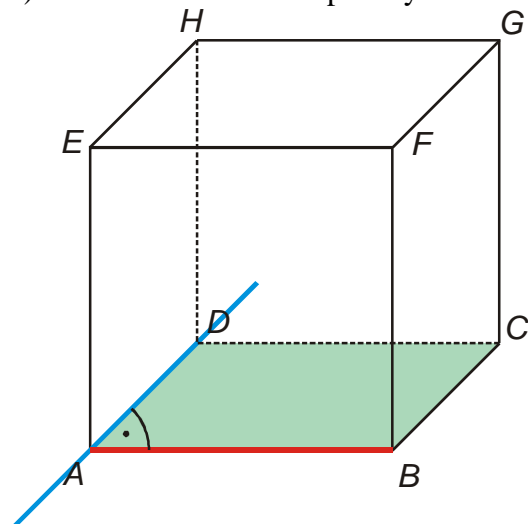
V obou definicích získáme nejmenší hodnotu.

- Pata kolmice je pro bod A nejbližším bodem přímky p .
- Úhel mezi přímkou p a jejím kolmým průmětem do roviny ρ je nejmenší z úhlů mezi přímkou p a libovolnou přímkou roviny ρ .

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $a = 4$ cm. Urči:

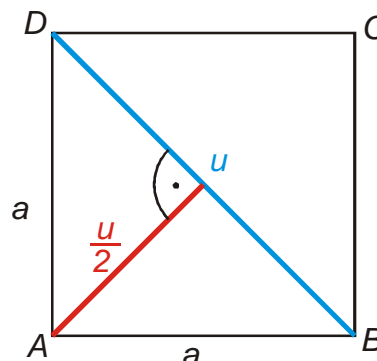
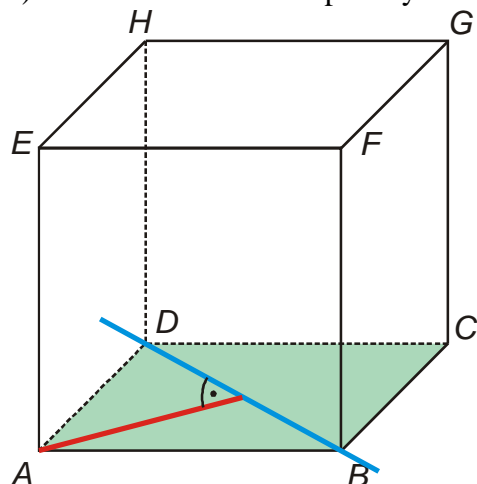
- a) vzdálenost bodu B od přímky AD , b) vzdálenost bodu A od přímky BD ,
c) vzdálenost bodu C od přímky EF .

a) vzdálenost bodu B od přímky AD



Z obrázku vidíme, že platí $|B \leftrightarrow AD| = a = 4 \text{ cm}$.

b) vzdálenost bodu A od přímky BD



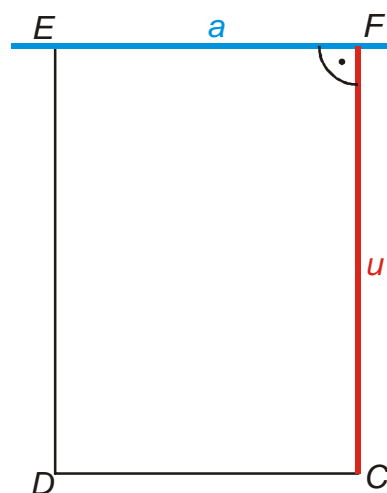
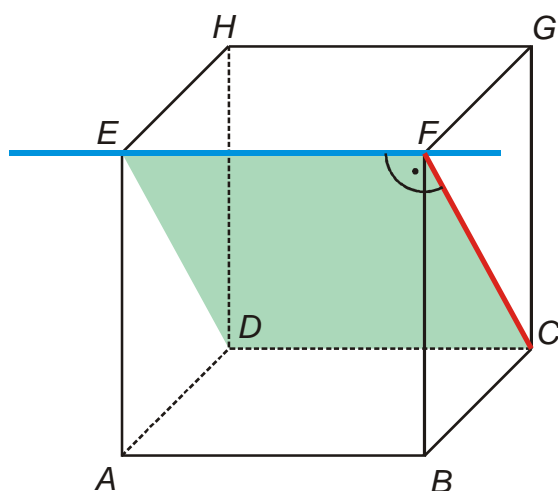
Hledaná vzdálenost je polovinou úhlopříčky podstavy.

$$u^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$u = a\sqrt{2}$$

$$|A \leftrightarrow BD| = \frac{u}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ cm} = 2,83 \text{ cm}$$

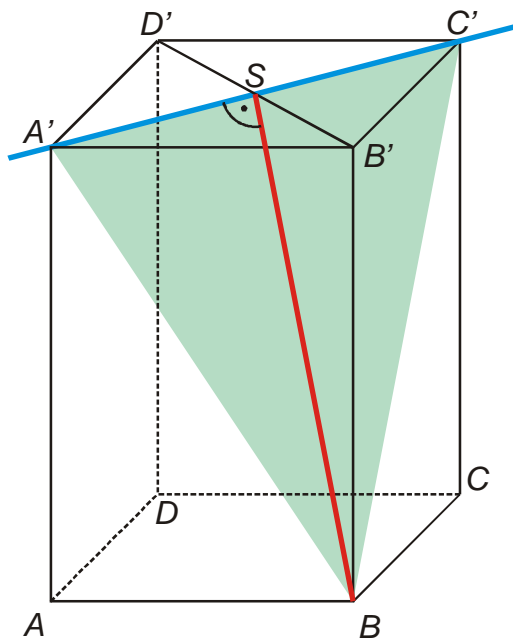
c) vzdálenost bodu C od přímky EF



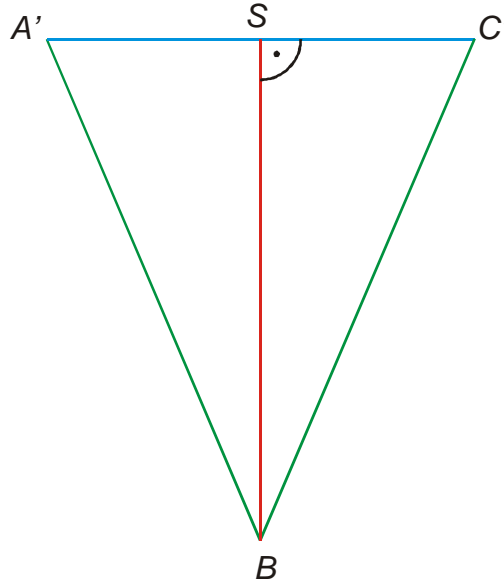
Hledaná vzdálenost je stranou obdélníku CDEF a také stěnovou úhlopříčkou krychle. Platí tedy: $|C \leftrightarrow EF| = u = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ cm} = 5,66 \text{ cm}$.

Pedagogická poznámka: Poměrně překvapivé procento studentů má problémy s bodem b), kde si nenakreslí samostatný obrázek podstavy a z průmětu krychle nepoznají, že hledaná vzdálenost je polovinou úhlopříčky.

Př. 3: Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A'B'C'D'$, $|AB|=a=4\text{ cm}$,
 $|AA'|=v=6\text{ cm}$. Urči vzdálenost bodu B od přímky $A'C'$.

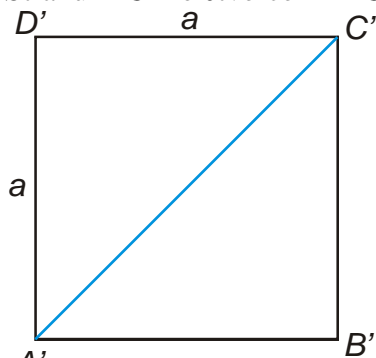


Z obrázku je vidět, že vzdálenost určíme pomocí rovnoramenného trojúhelníku $A'C'B$.



Abychom spočítali délku strany BS , musíme určit zbývající strany.

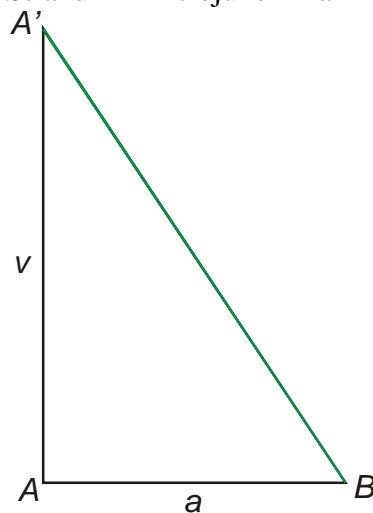
Stranu $A'C'$ ze čtverce $A'B'C'D'$.



$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

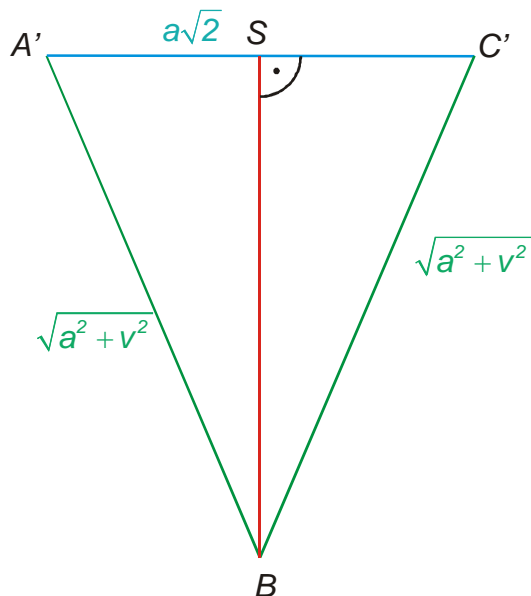
$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = |A'C'|$$

Stranu $A'B$ z trojúhelníka ABA' .



$$c^2 = a^2 + v^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + v^2} = |A'B|$$

Doplníme výsledky do obrázku.



Z pravoúhlého trojúhelníku $A'SB$.

$$|BS|^2 = |A'B|^2 - |A'S|^2 = \left(\sqrt{a^2 + v^2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

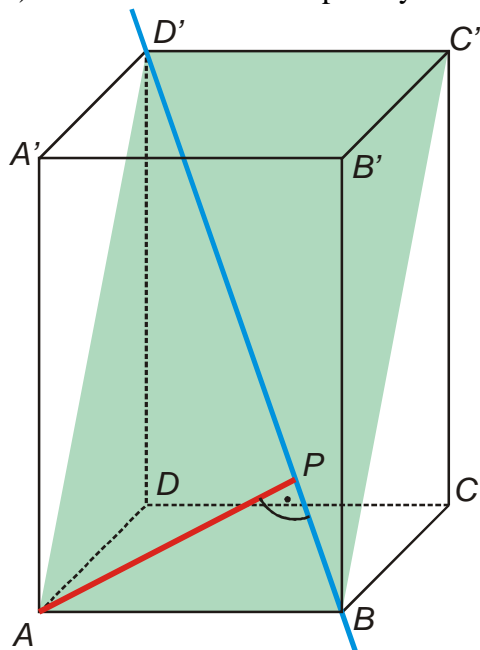
$$|BS|^2 = a^2 + v^2 - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 + v^2$$

$$|BS| = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + v^2}$$

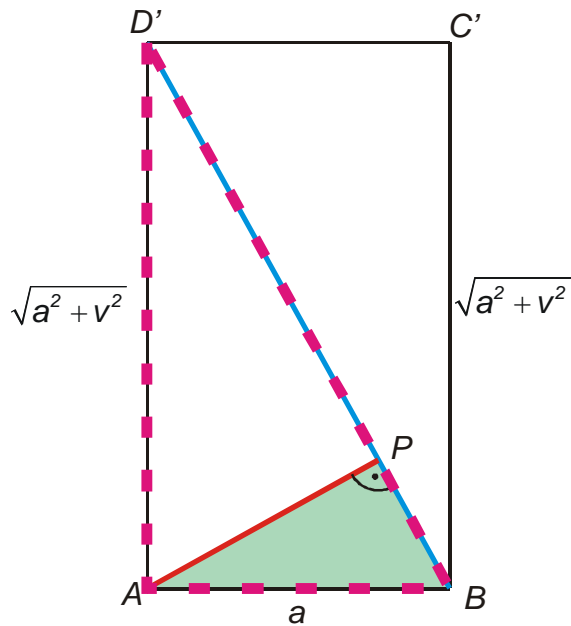
Dosazení: $|BS| = \sqrt{\frac{a^2}{2} + v^2} = \sqrt{\frac{4^2}{2} + 6^2} \text{ cm} = 6,63 \text{ cm}$

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCD A'B'C'D'$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|AA'| = v = 6 \text{ cm}$. Urči: a) vzdálenost bodu A od přímky BD' , b) vzdálenost bodu A' od přímky $D'S_{BC}$.

a) vzdálenost bodu A od přímky BD'



Příklad řešíme v obdélníku $ABC'D'$.



Známe délky stran: $|AB| = a$, $|BC'| = \sqrt{a^2 + v^2}$
(stěnová úhlopříčka).

Vydeme z podobnosti trojúhelníků ABP a $D'AB$:

$$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|D'A|}{|D'B|} \Rightarrow |AP| = |AB| \frac{|D'A|}{|D'B|}.$$

Úhlopříčka obdélníku $ABC'D'$:

$$|D'B|^2 = |AB|^2 + |D'A|^2 = a^2 + (\sqrt{a^2 + v^2})^2 = 2a^2 + v^2$$

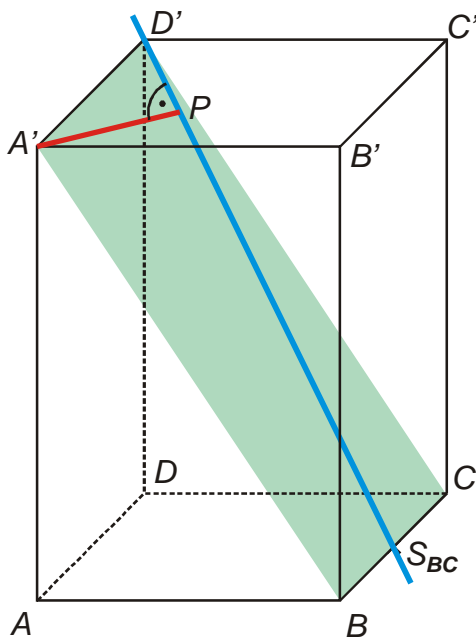
$$|D'B| = \sqrt{2a^2 + v^2}$$

Dosaďme délky stran:

$$|AP| = |AB| \frac{|D'A|}{|D'B|} = \frac{a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{2a^2 + v^2}}.$$

$$|AP| = \frac{a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{2a^2 + v^2}} = \frac{4\sqrt{4^2 + 6^2}}{\sqrt{2 \cdot 4^2 + 6^2}} \text{ cm} = 3,50 \text{ cm}$$

b) vzdálenost bodu A' od přímky $D'S_{BC}$



Příklad řešíme v obdélníku $BCA'D'$:

Známe délky stran:

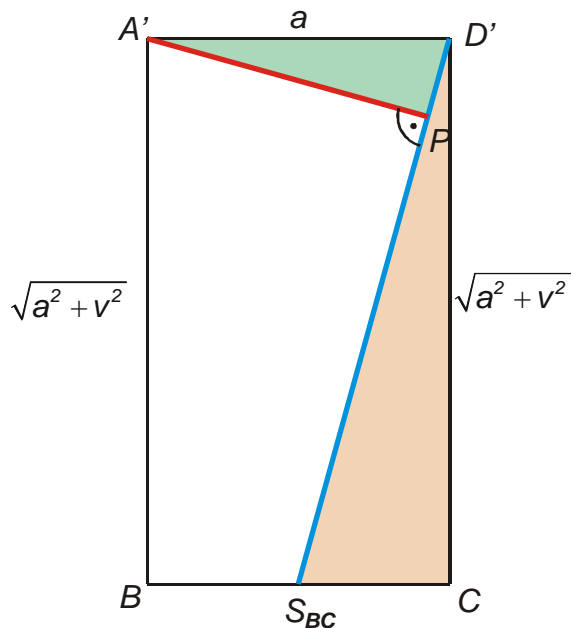
- $|BC| = a$
- $|CD'| = \sqrt{a^2 + v^2}$ (stěnová úhlopříčka).

Vydeme z podobnosti trojúhelníků $A'D'P$ a $D'S_{BC}C$:

$$\frac{|A'P|}{|A'D'|} = \frac{|D'C|}{|D'S_{BC}|}$$

$$|A'P| = |A'D'| \frac{|D'C|}{|D'S_{BC}|}$$

Ještě musíme dopočítat stranu $D'S_{BC}$



v trojúhelníku $D'S_{BC}C$ (přepona):

$$|D'S_{BC}|^2 = |CD'|^2 + |S_{BC}C|^2 = (\sqrt{a^2 + v^2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|D'S_{BC}|^2 = a^2 + v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2 + 4v^2}{4}$$

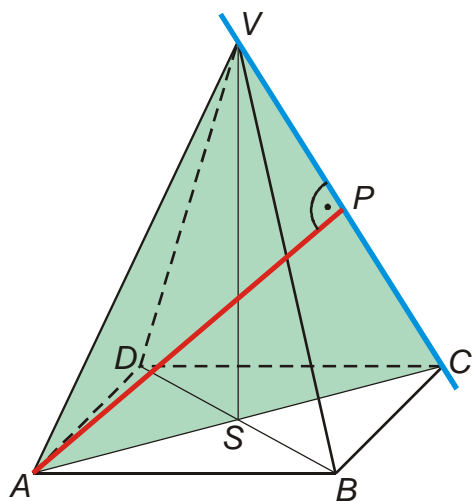
$$|D'S_{BC}| = \sqrt{\frac{5a^2 + 4v^2}{4}} = \frac{\sqrt{5a^2 + 4v^2}}{2}$$

Dosadíme o vztahu: $|A'P| = a \frac{\sqrt{a^2 + v^2}}{\frac{\sqrt{5a^2 + 4v^2}}{2}} = \frac{2a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{5a^2 + 4v^2}}$

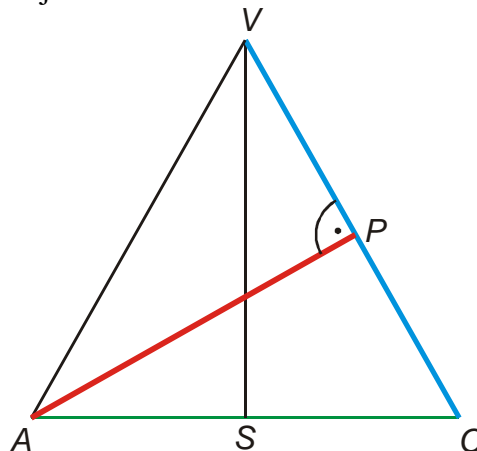
Dosazení: $|A'P| = \frac{2a\sqrt{a^2 + v^2}}{\sqrt{5a^2 + 4v^2}} = \frac{2 \cdot 4\sqrt{4^2 + 6^2}}{\sqrt{5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 6^2}} \text{ cm} = 3,85 \text{ cm}$

Poznámka: Body b) a c) je samozřejmě možné řešit místo v obdélnících pouze v trojúhelnících ABD' (případně $A'D'S_{BC}$).

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|SV| = v = 5 \text{ cm}$. Urči vzdálenost vrcholu A od přímky CV .



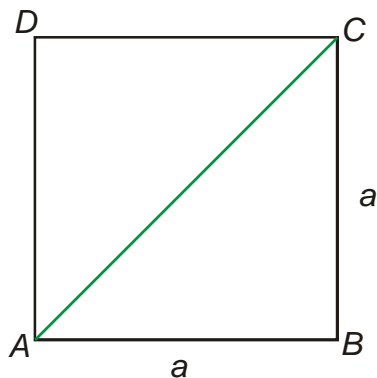
Vzdálenost určíme z rovnoramenného trojúhelníku ACV .



Nejdříve vypočteme délky stran v trojúhelníku ACV .

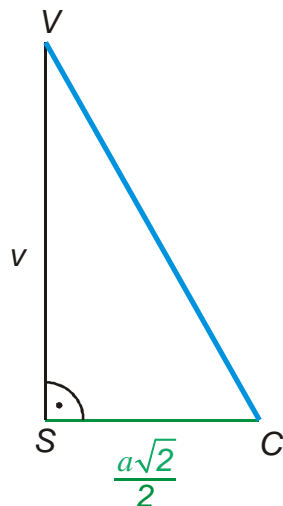
Stranu AC ze čtverce $ABCD$:

Stranu CV z pravoúhlého trojúhelníka SCV :



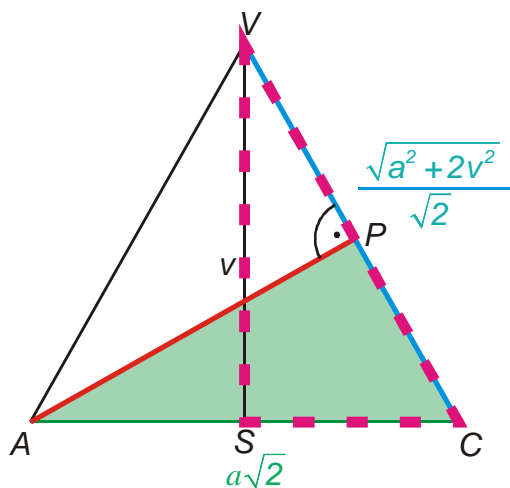
$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} = |AC|$$



$$|CV|^2 = |SC|^2 + |SV|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{2a^2}{4} + v^2 = \frac{a^2 + 2v^2}{2}$$

$$|CV| = \frac{\sqrt{a^2 + 2v^2}}{\sqrt{2}}$$



Trojúhelníky ACP a VSC jsou si podobné.

$$\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{|SV|}{|CV|}$$

$$|AP| = |AC| \frac{|SV|}{|CV|}$$

Dosadíme vypočtené délky stran:

$$|AP| = |AC| \frac{|SV|}{|CV|} = a\sqrt{2} \frac{v}{\frac{\sqrt{a^2 + 2v^2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}av}{\sqrt{a^2 + 2v^2}} = \frac{2av}{\sqrt{a^2 + 2v^2}}$$

$$\text{Dosazení: } |AP| = \frac{2av}{\sqrt{a^2 + 2v^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 2 \cdot 5^2}} \text{ cm} = 4,92 \text{ cm}$$

Dodatek: Předchozí příklad můžeme spočítat také pomocí vzorce pro obsah trojúhelníku:

$$\text{Platí: } S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow$$

v našem trojúhelníku konkrétně: $|CV| \cdot |AP| = |AC| \cdot |SV| \Rightarrow$

$$|AP| = \frac{|AC| \cdot |SV|}{|CV|} \text{ - stejný vztah, jaký jsme získali použitím podobnosti.}$$

Př. 6: Petáková:
strana 92/cvičení 17 f) h)
strana 92/cvičení 19 b) d)

Shrnutí: Vzdálenost bodu od přímky určujeme v rovině určené přímkou a bodem stejným způsobem jako v planimetrii.