

5.2.9 Vzdálenost bodu od roviny

Předpoklady: 5208

Opakování z minulé hodiny (definice vzdálenosti bodu od přímky):

Je dána přímka p a bod A . Vzdáleností bodu A od přímky p rozumíme vzdálenost bodu A od bodu P , který je patou kolmice vedené v rovině Ap k přímce p z bodu A .

Máme A bod a rovinu ρ , vzdálenost bodu A od roviny ρ opět potřebujeme převést na vzdálenost dvou bodů. Jaký bod máme v rovině ρ najít?

Podobně jako u vzdálenosti bodu od přímky půjde o kolmý průmět bodu A do roviny ρ .

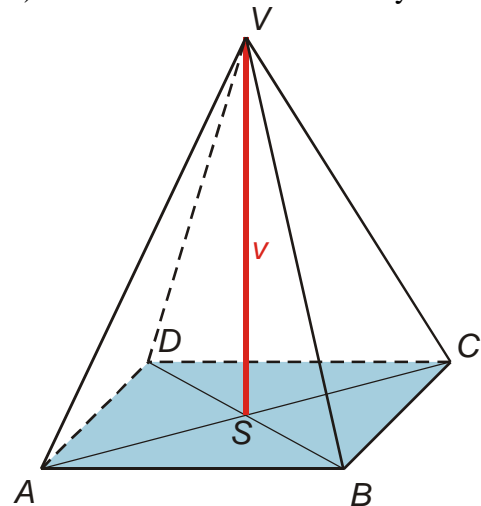
Př. 1: Zformuluj definici vzdálenosti bodu od roviny analogickou definici vzdálenosti bodu od přímky.

Je dána rovina ρ a bod A . Vzdáleností bodu A od roviny ρ rozumíme vzdálenost bodu A od bodu P , který je patou kolmice vedené z bodu A k rovině ρ .

Takto definovaná vzdálenost bodu od roviny je nejkratší vzdáleností mezi bodem A a libovolným bodem roviny ρ .

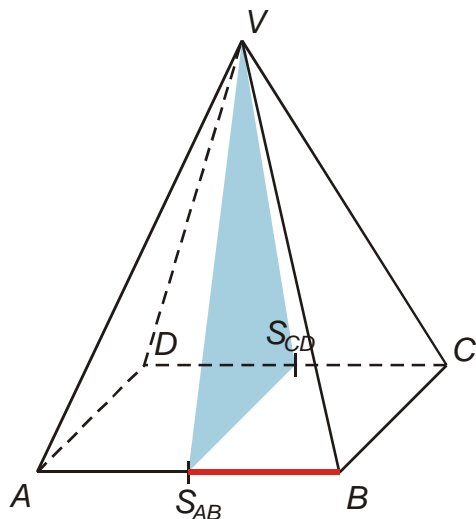
Př. 2: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|SV| = v = 5 \text{ cm}$. Urči:
a) vzdálenost bodu V od roviny ABC , b) vzdálenost bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$,
c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV .

a) vzdálenost bodu V od roviny ABC



b) vzdálenost bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$

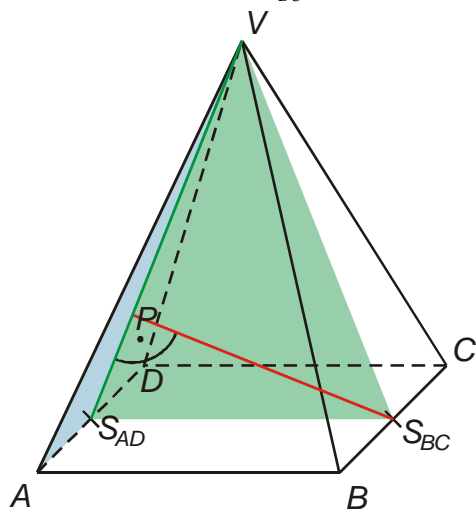
Z obrázku je vidět, že kolmým průmětem bodu V do roviny ABC je střed podstavy $S \Rightarrow$ vzdálenost bodu V od roviny ABC je tedy rovna $v = 5 \text{ cm}$.



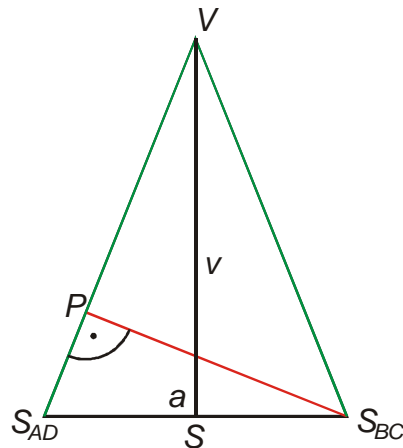
Přímka AB je kolmá k rovině $S_{AB}S_{CD}V$,
 kolmým průmětem bodu B do roviny
 $S_{AB}S_{CD}V$ je tedy bod $S_{AB} \Rightarrow$ vzdálenost
 bodu B od roviny $S_{AB}S_{CD}V$ je rovna

$$\frac{a}{2} = 2 \text{ cm}.$$

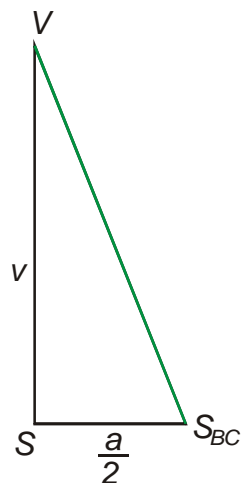
c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV



Kolmý průmět bodu S_{BC} (označíme si ho P)
 do roviny ADV bude určitě ležet v rovině
 $S_{AD}S_{BC}V$ (je kolmá na rovinu ADV a prochází
 bodem S_{BC}). Nakreslíme si trojúhelník
 $S_{AD}S_{BC}V$.



Vypočteme délku strany $S_{BC}V$ z pravoúhlého trojúhelníku $S_{BC}VS$.

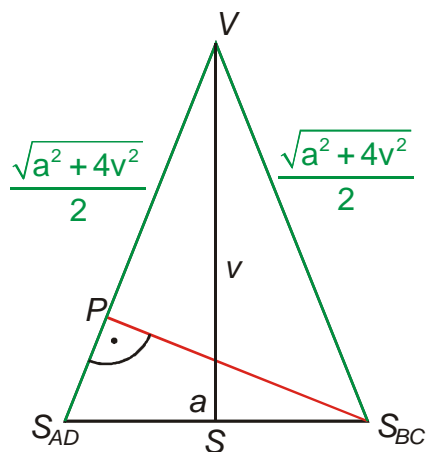


$$|S_{BC}V|^2 = |SS_{BC}|^2 + |SV|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{a^2 + 4v^2}{4}$$

$$|S_{BC}V| = \sqrt{\frac{a^2 + 4v^2}{4}}$$

$$|S_{BC}V| = \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{2}$$

Doplňme do obrázku trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$.



Možností jak určit úsečku PS_{BC} je více, nejjednodušší vychází ze vzorce pro obsah trojúhelníka:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}.$$

Jednu dvojici strana-výška tvoří úsečky $S_{AD}S_{BC}$ a SV (obě známe), druhou úsečky $S_{AD}V$ a PS_{BC} (druhou chceme určit) \Rightarrow

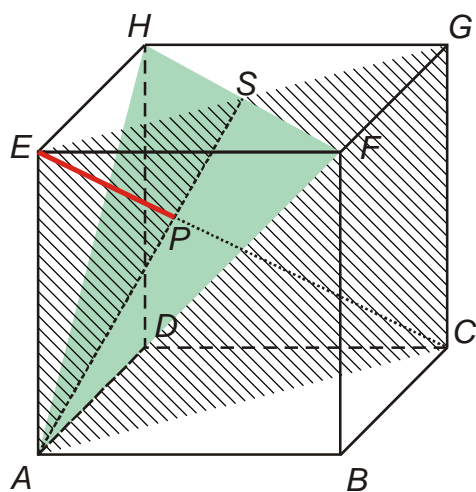
$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{|S_{AD}S_{BC}||SV|}{2} = \frac{|S_{BC}V||PS_{BC}|}{2}$$

$$|S_{AD}S_{BC}||SV| = |S_{BC}V||PS_{BC}|$$

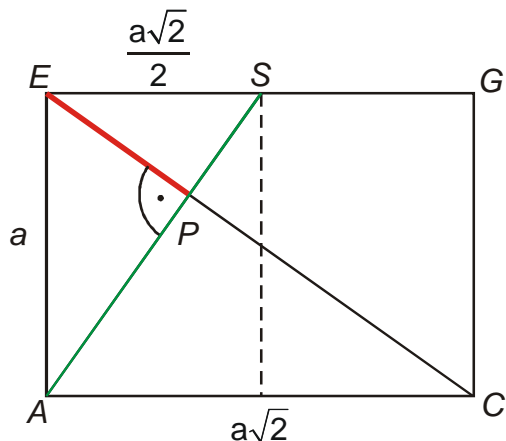
$$|PS_{BC}| = \frac{|S_{AD}S_{BC}||SV|}{|S_{BC}V|} = \frac{av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}} = \frac{2av}{2\sqrt{a^2 + 4v^2}}$$

Dosadíme: $|PS_{BC}| = \frac{2av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 4 \cdot 5^2}} \text{ cm} = 3,71 \text{ cm}.$

Př. 3: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$ $a = 4 \text{ cm}$. Urči vzdálenost bodu E od roviny AFH .



Nakreslíme si obdélník $ACGE$.



Doplňme obrázek:

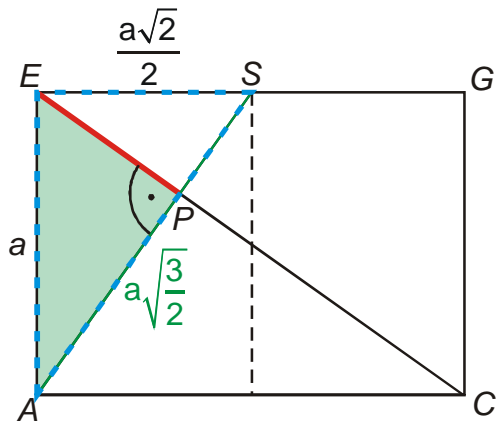
Hledáme kolmý průmět bodu E do roviny AFH . Víme z předchozích příkladů, že přímka EC je kolmá k rovině AFH a hledaným průmětem bude její průsečík s rovinou AFH . Předchozí informaci pro vyřešení příkladu nepotřebujeme, stačí si uvědomit, že krychle je souměrná podle roviny $ACEG$ a kolmice na E i kolmý průmět musí ležet v této rovině (jinak by průměty byly dva a to není možné).

Dopočteme délku úsečky AS :

$$|AS|^2 = |ES|^2 + |EA|^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$|AS|^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

$$|AS| = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$



Využijeme podobnost trojúhelníků ASE a AEP .

$$\frac{|ES|}{|AS|} = \frac{|EP|}{|AE|}$$

$$|EP| = |AE| \frac{|ES|}{|AS|} = a \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = a \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Dosadíme: $|EP| = a \frac{\sqrt{3}}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ cm} = 2,31 \text{ cm}$

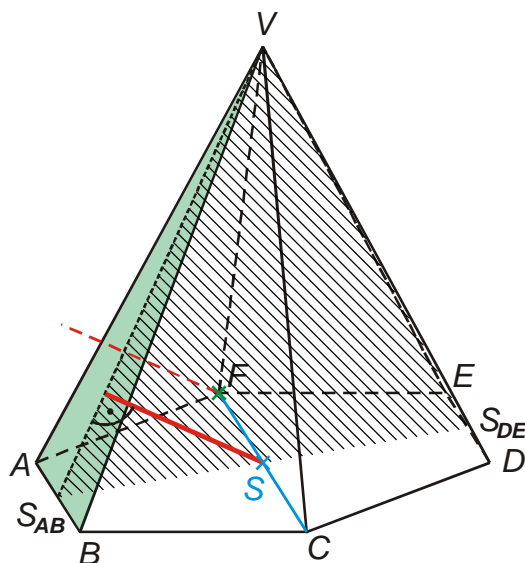
Př. 4: Zformuluj kritérium pro rovnoběžnost přímky s rovinou pomocí vzdálenosti bodu od roviny.

Přímka p je rovnoběžná s rovinou ρ , jestliže lze na přímce p najít dva různé body ležící v téže poloze ohraničeném rovinou ρ , které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Př. 5: Zformuluj kritérium pro rovnoběžnost dvou rovin pomocí vzdálenosti bodu od roviny.

Dvě roviny ρ a σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině σ najít tři různé body, které neleží v přímce, ale leží ve stejném poloze s hraniční rovinou ρ a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost.

Př. 6: Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$, $|SV| = v = 6 \text{ cm}$. Urči vzdálenost bodu F od roviny ABV .

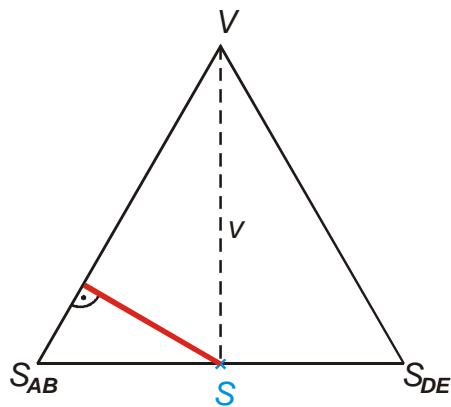


Potřebujeme najít kolmý průmět bodu F do roviny $ABV \Rightarrow$ problém pata kolmice z bodu F leží mimo jehlan \Rightarrow hledáme jiný bod se stejnou vzdáleností, jehož pata leží na hranici jehlanu.

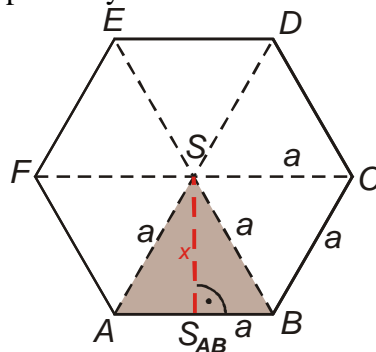
Přímka CF je rovnoběžná s přímkou $AB \Rightarrow$ je rovnoběžná s rovinou $ABV \Rightarrow$ vzdálenost všech bodů této přímky od roviny ABV je stejná jako vzdálenost bodu A .

Kolmice z bodu S na rovinu ABV leží v rovině $S_{AB}S_{DE} \Rightarrow$ vzdálenost bodu S od roviny ABV určíme pomocí trojúhelníku $S_{AB}S_{DE}V$.

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AB}S_{DE}V$.



Délku úsečky $S_{AB}S$ určíme z obrázku podstavy:



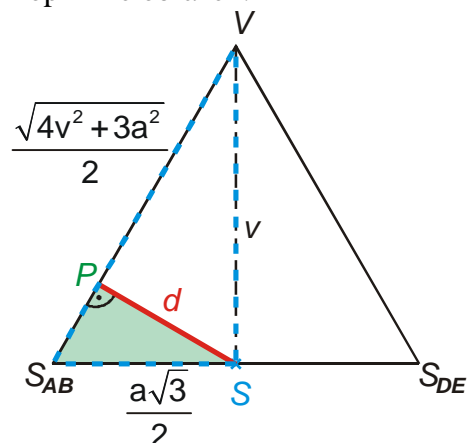
Vzdálenost $|S_{AB}S|$ je také výškou v rovnostranném trojúhelníku se stranou a .

$$x^2 = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vzdálenost $|S_{AB}V|$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku $S_{AB}SV$:

$$|S_{AB}V| = \sqrt{v^2 + x^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4v^2 + 3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 + 3a^2}}{2}.$$

Doplníme obrázek:



Využijeme podobnost trojúhelníků $S_{AB}SV$ a $S_{AB}SP$.

$$\frac{|SV|}{|S_{AB}V|} = \frac{|PS|}{|S_{AB}S|}$$

$$|PS| = |SV| \frac{|S_{AB}S|}{|S_{AB}V|} = v \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{4v^2 + 3a^2}}{2}} = \frac{v \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2 + 3a^2}}$$

Dosadíme: $|PS| = \frac{v \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{4v^2 + 3a^2}} = \frac{6 \cdot 4\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 6^2 + 3 \cdot 4^2}} \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$

Př. 7: Petáková:

strana 93/cvičení 24 c) f)

strana 93/cvičení 25 b)

strana 93/cvičení 26 c)

strana 93/cvičení 27 c)

Shrnutí: Vzdálenost bodu od roviny určujeme opět pomocí kolmého průmětu.