

5.2.11 Vzdálenost roviny a přímky

Předpoklady: 5210

Př. 1: Rozhodni, kdy má smysl uvažovat o vzdálenosti přímky od roviny, a navrhní definici této vzdálenosti.

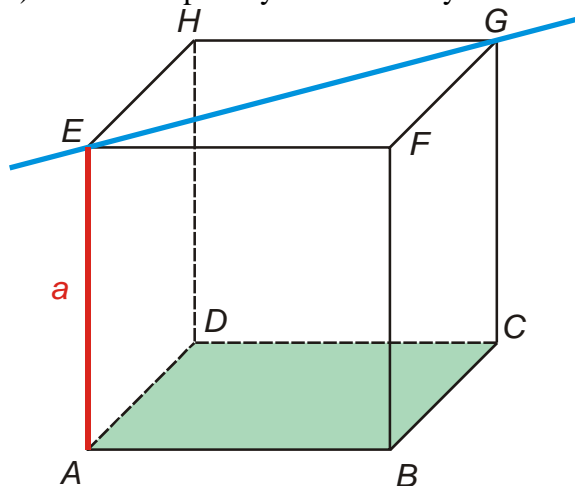
Uvažovat o vzdálenosti přímky a roviny můžeme pouze v případě, že přímka je s rovinou rovnoběžná. Ve všech ostatních případech se přímka s rovinou protíná.

Za vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné považujeme vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny.

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$. Urči vzdálenost:

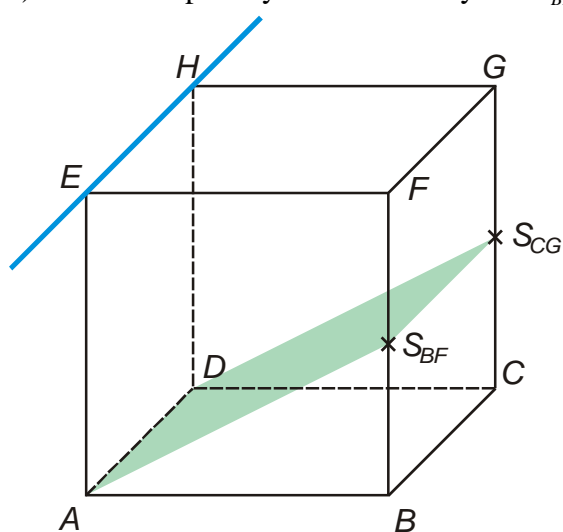
- přímky EG od roviny ABC ,
- přímky EH od roviny ADS_{BF} ,
- přímky GH od roviny ABS_{CG} .

a) vzdálenost přímky EG od roviny ABC

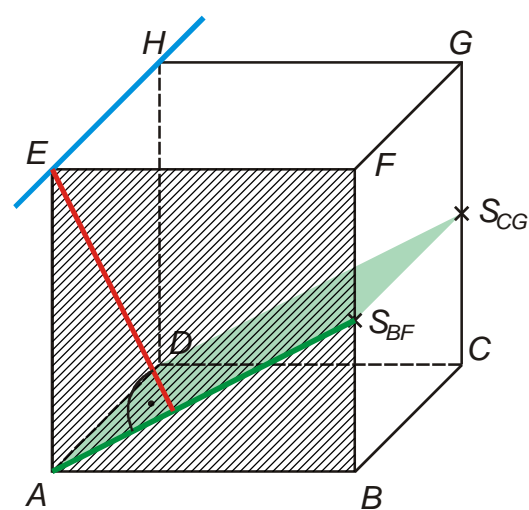


Přímka EG je rovnoběžná s rovinou ABC . Zvolíme na přímce EG libovolný bod například bod E . Jeho kolmým průmětem do roviny ABC je bod A . Vzdálenost přímky EG od roviny ABC je tedy rovna délce hrany EA , která je dlouhá 4 cm.

b) vzdálenost přímky EH od roviny ADS_{BF}



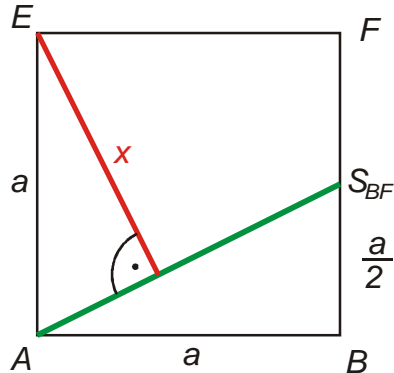
Přímka EH je rovnoběžná s rovinou ADS_{BF}



Rovina ADS_{BF} je kolmá k přední stěně ABE

(je rovnoběžná s přímkou AD) \Rightarrow můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ADS_{BF} určit vzdálenost přímky od roviny.

Nakreslíme si čtverec $ABFE$:



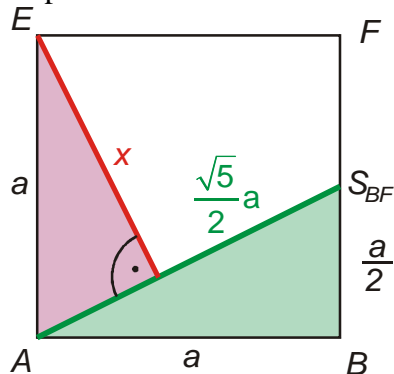
Musíme určit délku úsečky AS_{BF} , například z trojúhelníku ABS_{BF} .

$$|AS_{BF}|^2 = |AB|^2 + |BS_{BF}|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AS_{BF}|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Doplňme vzdálenost do obrázku.



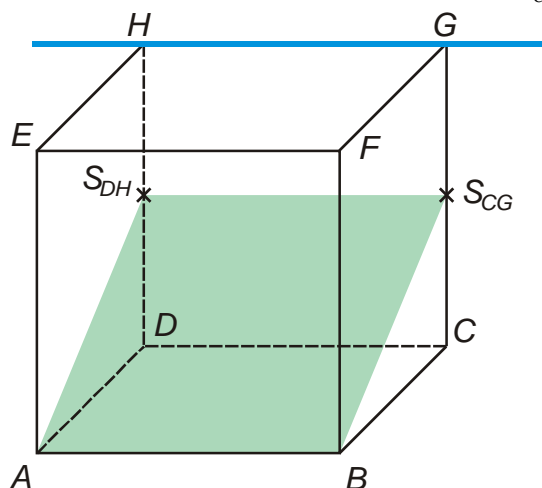
Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{a}{2}}$$

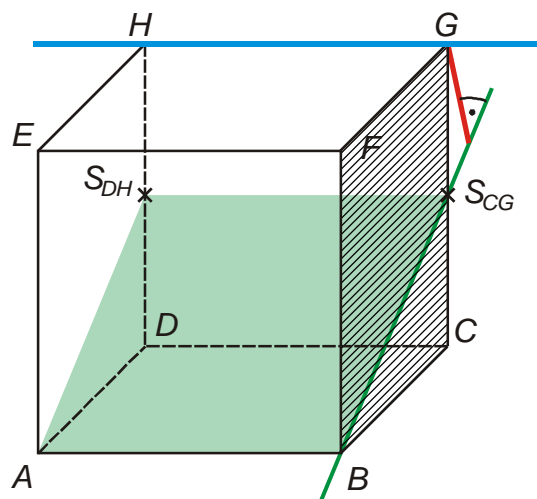
$$x = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$$

Dosadíme: $x = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 4 \text{ cm} = 3,58 \text{ cm}$.

c) vzdálenost přímky GH od roviny ABS_{CG}



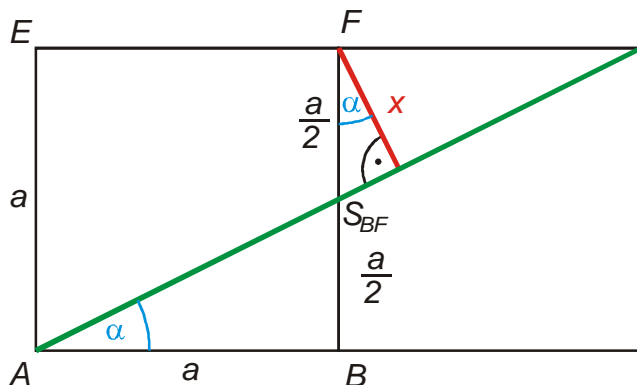
Přímka GH je rovnoběžná s rovinou ABS_{CG} (je rovnoběžná s přímkou AB) \Rightarrow můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ABS_{CG} určit vzdálenost přímky od roviny.



Rovina ABS_{CG} je kolmá k pravé boční stěně $BCG \Rightarrow$ kolmice na rovinu ABS_{CG} může ležet v pravé boční stěně. Zvolíme na přímce GH bod G a hledáme jeho

vzdálenost od přímky BS_{CG} .

Pata kolmice z bodu G na přímku BS_{CG} leží mimo pravou boční stěnu \Rightarrow kromě čtverce $BCGF$ i jeden další shodný „sousední“ čtverec.



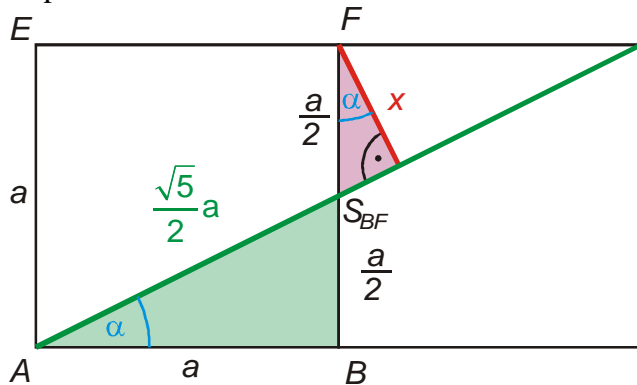
Musíme určit délku úsečky AS_{BF} , například z trojúhelníku ABS_{BF} .

$$|AS_{BF}|^2 = |AB|^2 + |BS_{BF}|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AS_{BF}|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Doplňme vzdálenost do obrázku.



Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

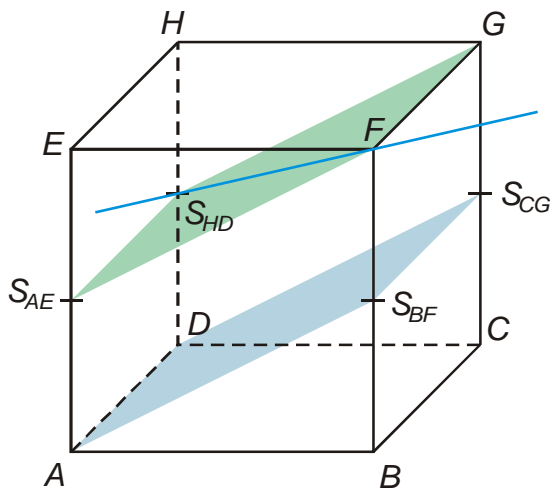
$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}a = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ cm} = 1,79 \text{ cm}$$

Pedagogická poznámka: Nejbystřejší studenti si u bodu c) všimnou, že hledaná vzdálenost je polovinou vzdálenosti z bodu b). Používám bod c) k synchronizaci třídy (jakmile pomalejší část dokončí bod b), jdeme dál).

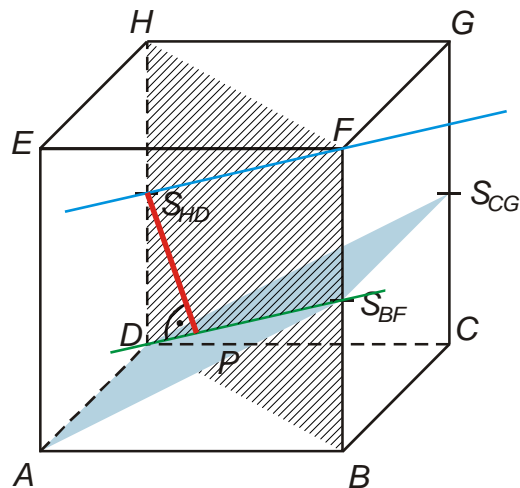
Př. 3: Najdi chybu v uvedeném řešení následujícího příkladu.

Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4\text{ cm}$. Urči vzdálenost přímky $S_{HD}F$ od roviny ADS_{BF} .



Kolmým průmětem přímky $S_{HD}F$ do roviny ADS_{BF} je přímka DS_{BF} . Obě tyto přímky leží v rovině BDH (rovina kolmá k rovině ADS_{BF}). Na přímce $S_{HD}F$ si můžeme zvolit libovolný bod a určit v rovině BDH jeho průmět do roviny ADS_{BF} . Zvolíme například bod S_{HD} .

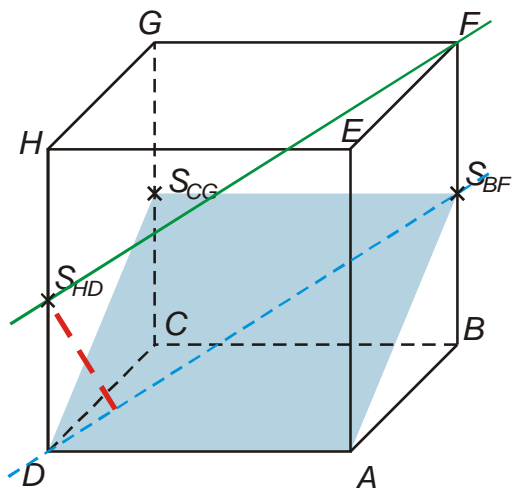
Přímka $S_{HD}F$ je rovnoběžná s rovinou ADS_{BF} (leží v rovině FGS_{HD} , která je s rovinou ADS_{BF} rovnoběžná) \Rightarrow můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ADS_{BF} určit vzdálenost přímky od roviny.



Nesprávná jsou všechna tvrzení o kolmosti:

- kolmým průmětem přímky $S_{HD}F$ do roviny ADS_{BF} není přímka DS_{BF} (správně určený kolmý průmět neprochází žádným vrcholem krychle),
- rovina BDH není kolmá k rovině ADS_{BF} (k rovině ADS_{BF} jsou kolmé například roviny ABE nebo CDG).

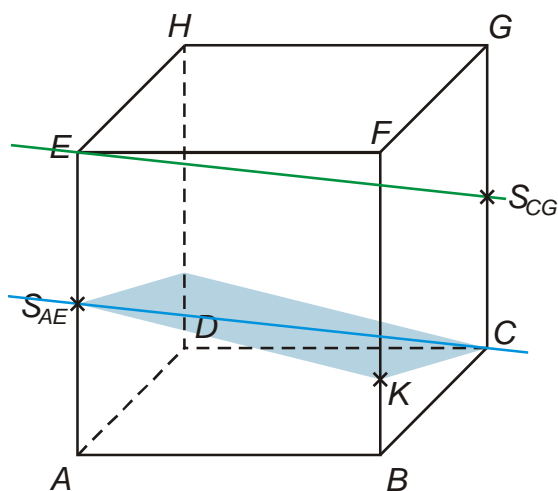
Jedním ze směrů roviny ADS_{BF} je směr přímky $AD \Rightarrow$ směr kolmý k rovině ADS_{BF} musí být kolmý k této přímce a nemůže z bodu S_{HD} směřovat do vnitřku krychle.



Správně sestrojený kolmý průmět bodu S_{HD} do roviny ADS_{BF} leží ve stěně CDG a řešení příkladu je pak shodné s příkladem 2 b).

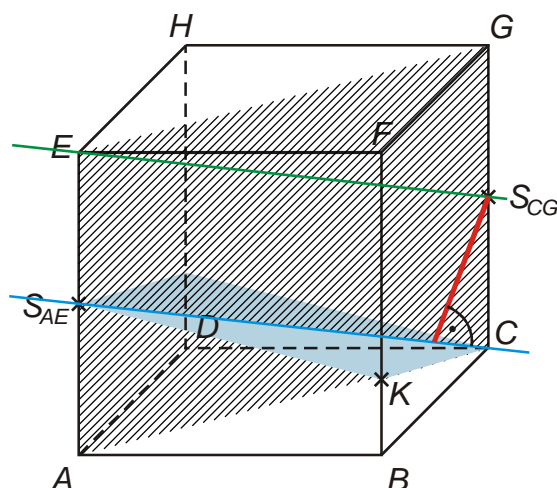
Pedagogická poznámka: Všem učitelům doporučuji v podobných situacích vyřešit příklad analyticky a zkontrolovat tak správnost stereometrického výsledku.

Př. 4: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4 \text{ cm}$. Urči vzdálenost přímky ES_{CG} od roviny CKS_{AE} , kde $K \in BF$; $|FK| = 3|BK|$.

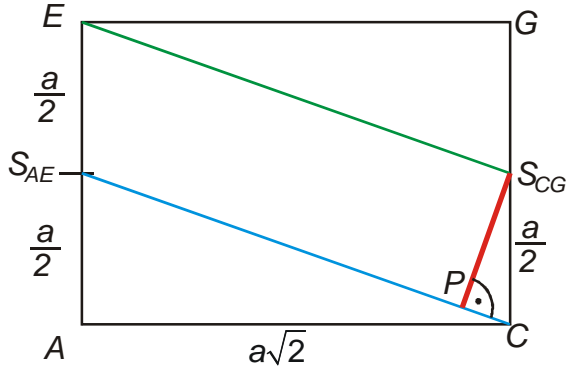


Kolmým průmětem přímky ES_{CG} do roviny CKS_{AE} je přímka CS_{AE} . Obě tyto přímky leží v rovině ACG (rovina kolmá k rovině CKS_{AE}). Na přímce ES_{CG} si můžeme zvolit libovolný bod a určit v rovině ACG jeho průmět do roviny CKS_{AE} . Zvolíme například bod S_{CG} .

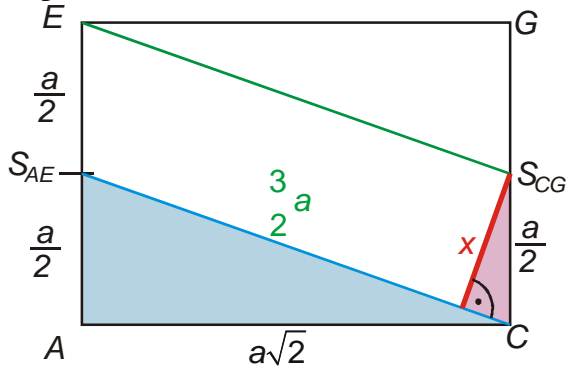
Přímka ES_{CG} je rovnoběžná s rovinou CKS_{AE} (je rovnoběžná s přímkou CS_{AE}) \Rightarrow můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny CKS_{AE} určit vzdálenost přímky od roviny.



Nakreslíme si obdélník $ACGE$:



Doplňme vzdálenost do obrázku.



Dosadíme: $x = a \frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm} = 1,89 \text{ cm}$

Musíme určit délku úsečky CS_{AE} , například z trojúhelníku ACS_{AE} .

$$|CS_{AE}|^2 = |AC|^2 + |AS_{AE}|^2 = (a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|CS_{AE}|^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}a^2$$

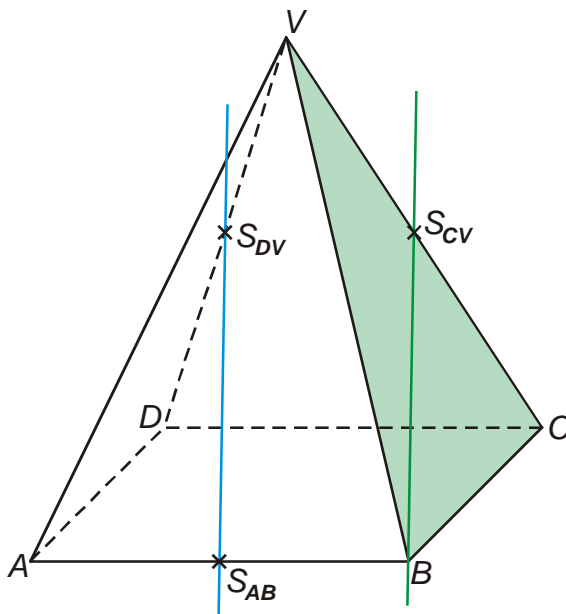
$$|CS_{AE}| = \frac{3}{2}a$$

Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3}{2}a}$$

$$x = \frac{2a\sqrt{2}}{3a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 5 \text{ cm}$, $|SV| = v = 6 \text{ cm}$. Urči vzdálenost přímky $S_{AB}S_{DV}$ od roviny BCV .

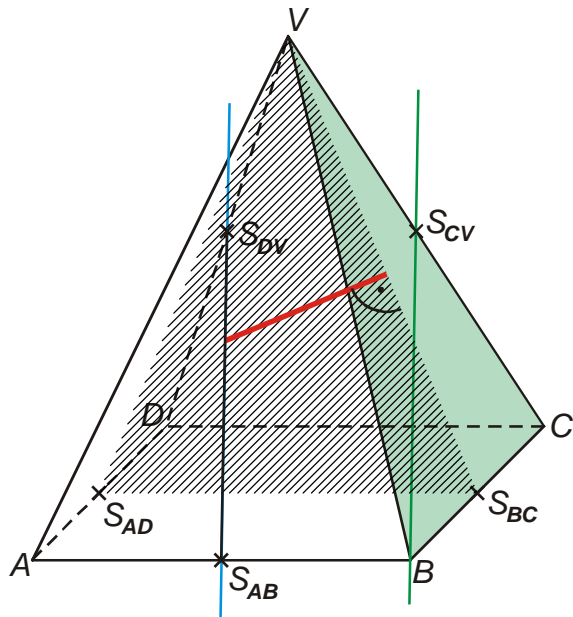


Nejsnadněji kreslitelnou rovinou kolmou k rovině BCV je rovina $S_{BC}S_{AD}V$

Přímka $S_{AB}S_{DV}$ je rovnoběžná s přímkou BS_{CV} (jde o protější strany rovnoběžníka $S_{AB}BS_{CV}S_{DV}$) \Rightarrow přímka $S_{AB}S_{DV}$ je rovnoběžná s rovinou BCV .

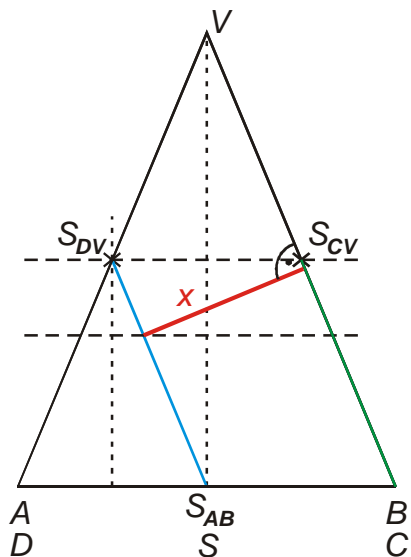
Hledáme rovinu kolmou k rovině BCV (v ní sestrojíme průmět libovolného bodu přímky $S_{AB}S_{DV}$ do roviny BCV).

Rovina BCV dělí úsečku BS_{CV} v poměru 2:1.

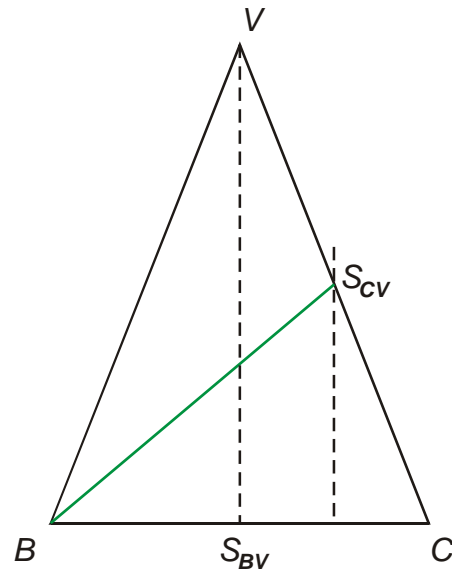
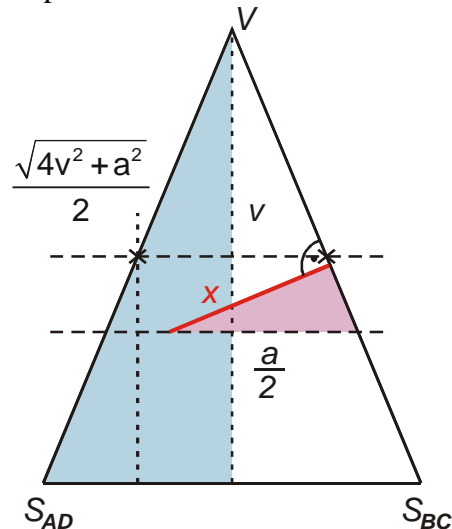


Hledáme průsečík úsečky $S_{AB}S_{DV}$ s rovinou BCV .

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$ jako kolmý průmět celého jehlanu.



Doplníme vzdálenost do obrázku.



Ve stejném poměru dělí rovina BCV i úsečku $S_{AB}S_{DV}$.

Vodorovná vzdálenost mezi úsečkou $S_{AB}S_{DV}$ a úsečkou BS_{CV} je stále $\frac{a}{2}$.

Musíme určit délku úsečky $S_{AD}V$, například z trojúhelníku $S_{AD}SV$.

$$|VS_{AD}|^2 = |SV|^2 + |S_{AD}S|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|VS_{AD}|^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 + a^2}{4}$$

$$|VS_{AD}| = \frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}$$

Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{v}{\frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}}$$

$$x = \frac{2v}{\sqrt{4v^2 + a^2}} \cdot \frac{a}{2} = \frac{av}{\sqrt{4v^2 + a^2}}$$

Dosadíme: $x = \frac{av}{\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{5 \cdot 6}{\sqrt{4 \cdot 6^2 + 5^2}} \text{ cm} = 2,31 \text{ cm}$

Př. 6: Petáková:
strana 93/cvičení 28 b)

Shrnutí: Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné se rovná vzdálenosti libovolného bodu této přímky od roviny.