5.2.11 Vzdálenost roviny a přímky

Předpoklady: 5210

Př. 1: Rozhodni, kdy má smysl uvažovat o vzdálenosti přímky od roviny, a navrhni definici této vzdálenosti.

Uvažovat o vzdálenosti přímky a roviny můžeme pouze v případě, že přímka je s rovinou rovnoběžná. Ve všech ostatních případech se přímka s rovinou protíná.

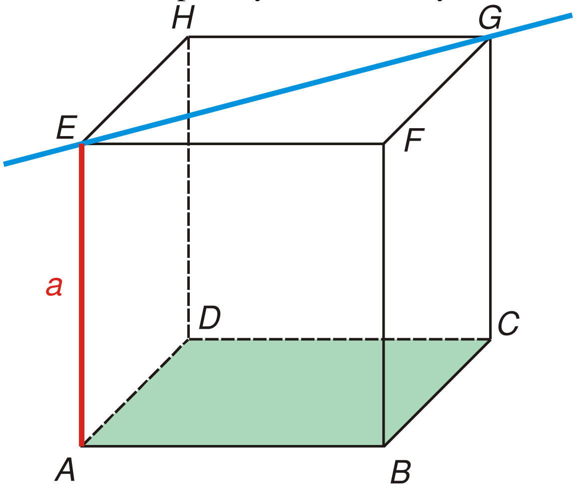
Za vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné považujeme vzdálenost libovolného bodu přímky od této roviny.

Př. 2: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost:

a) přímky EG od roviny ABC, b) přímky EH od roviny ADS_{BF},

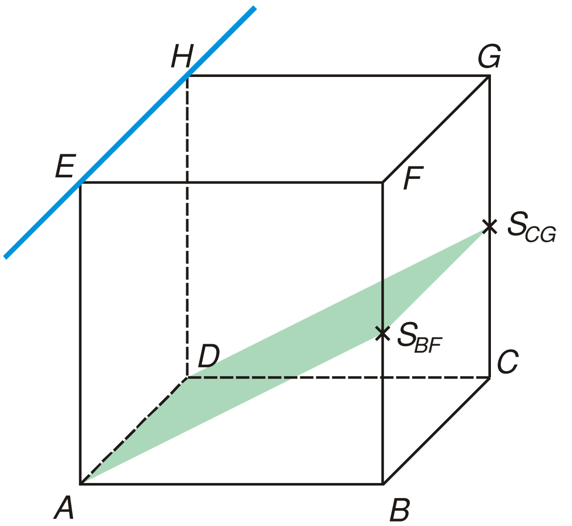
c) přímky GH od roviny ABS_{CG}.

a) vzdálenost přímky EG od roviny ABC

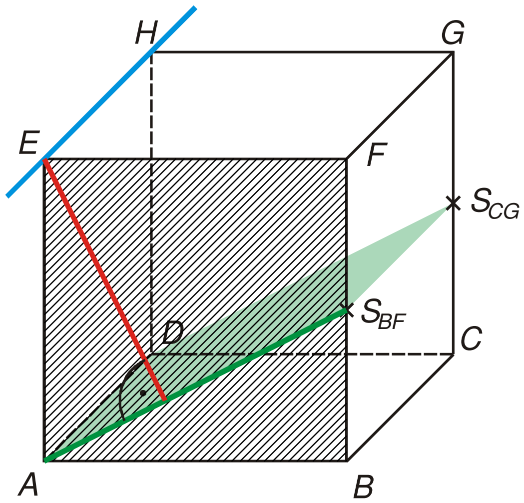


Přímka EG je rovnoběžná s rovinou ABC. Zvolíme na přímce EG libovolný bod, například bod E. Jeho kolmým průmětem do roviny ABC je bod A. Vzdálenost přímky EG od roviny ABC je tedy rovna délce hrany EA, která je dlouhá 4 cm.

b) vzdálenost přímky EH od roviny ADS_{BF}



Přímka EH je rovnoběžná s rovinou ADS_{BF}

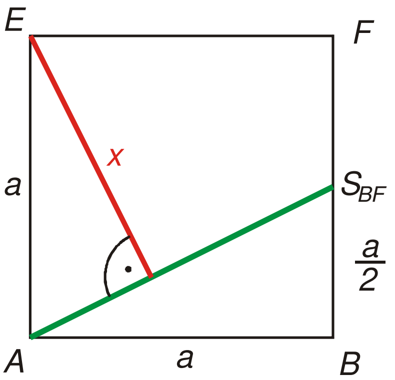


Rovina ADS_{BF} je kolmá k přední stěně ABE

(je rovnoběžná s přímkou AD) $\Rightarrow$ můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ADS_{BF} určit vzdálenost přímky od roviny.

$\Rightarrow$ kolmice na rovinu ADS_{BF} může ležet v přední stěně.
Zvolíme na přímce EH bod E a hledáme jeho vzdálenost od přímky AS_{BF}.

Nakreslíme si čtverec $ABFE$:



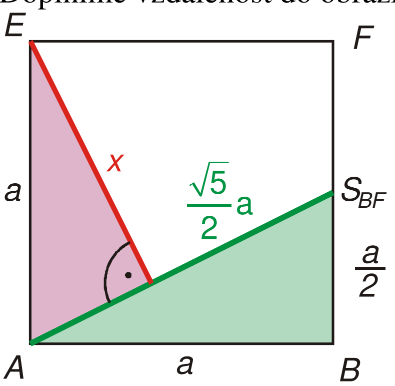
Musíme určit délku úsečky AS_{BF}, například z trojúhelníku ABS_{BF}.

$$|AS_{BF}|^2 = |AB|^2 + |BS_{BF}|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AS_{BF}|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Doplníme vzdálenost do obrázku.



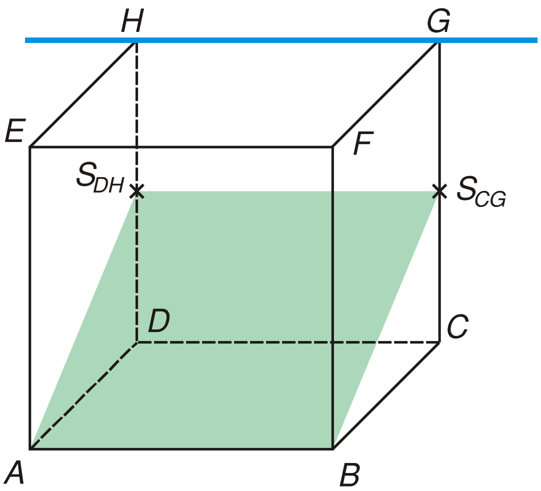
Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}$$

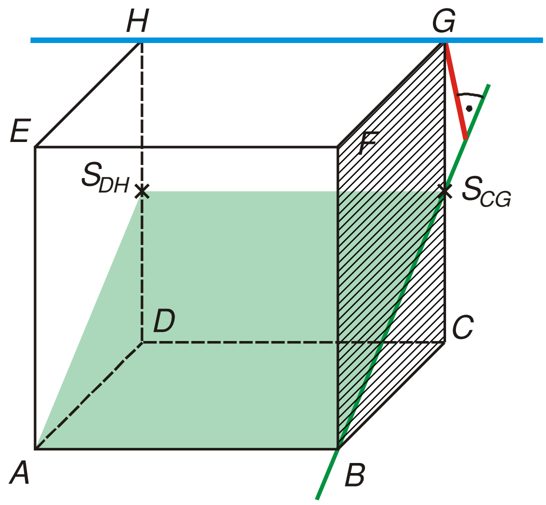
$$x = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}a$$

Dosadíme: $x = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 4\,\text{cm} = 3{,}58\,\text{cm}$.

c) vzdálenost přímky GH od roviny ABS_{CG}



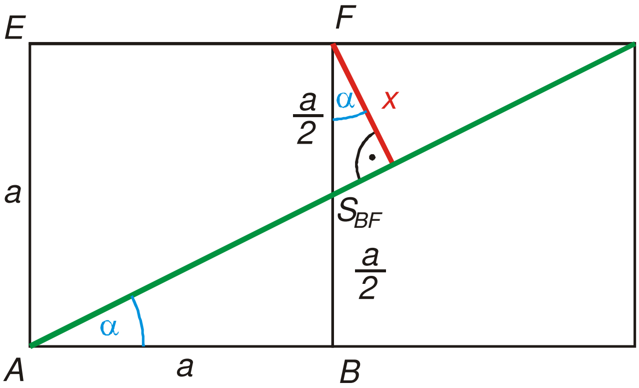
Přímka GH je rovnoběžná s rovinou ABS_{CG} (je rovnoběžná s přímkou AB) $\Rightarrow$ můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ABS_{CG} určit vzdálenost přímky od roviny.



Rovina ABS_{CG} je kolmá k pravé boční stěně BCG $\Rightarrow$ kolmice na rovinu ABS_{CG} může ležet v pravé boční stěně.
Zvolíme na přímce GH bod G a hledáme jeho

vzdálenost od přímky BS_{CG}.

Pata kolmice z bodu G na přímku BS_{CG} leží mimo pravou boční stěnu $\Rightarrow$ kromě čtverce $BCGF$ i jeden další shodný „sousední“ čtverec.



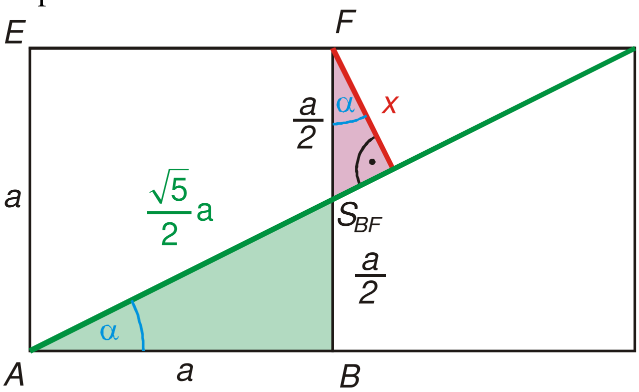
Musíme určit délku úsečky AS_{BF}, například z trojúhelníku ABS_{BF}.

$$|AS_{BF}|^2 = |AB|^2 + |BS_{BF}|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|AS_{BF}|^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$$

$$|AS_{BF}| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Doplníme vzdálenost do obrázku.



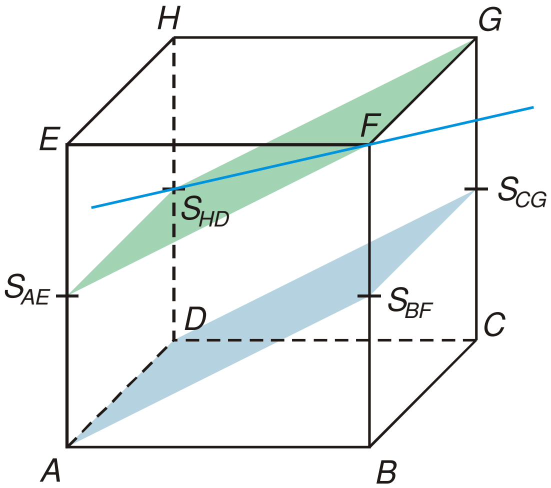
Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}$$

$$x = \frac{a}{2}\frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}a = \frac{4}{\sqrt{5}}\text{cm} = 1{,}79\,\text{cm}$$

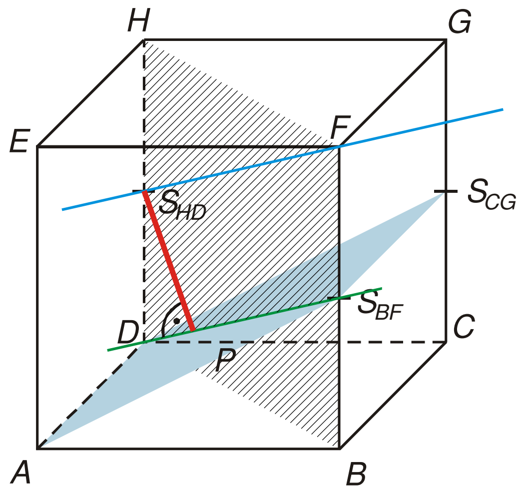
Pedagogická poznámka: Nejbystřejší studenti si u bodu c) všimnou, že hledaná vzdálenost je polovinou vzdálenosti z bodu b). Používám bod c) k synchronizaci třídy (jakmile pomalejší část dokončí bod b), jdeme dál).

Př. 3: Najdi chybu v uvedeném řešení následujícího příkladu.
Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímky $S_{HD}F$ od roviny ADS_{BF}.



Přímka $S_{HD}F$ je rovnoběžná s rovinou ADS_{BF} (leží v rovině FGS_{HD}, která je s rovinou ADS_{BF} rovnoběžná) $\Rightarrow$ můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny ADS_{BF} určit vzdálenost přímky od roviny.

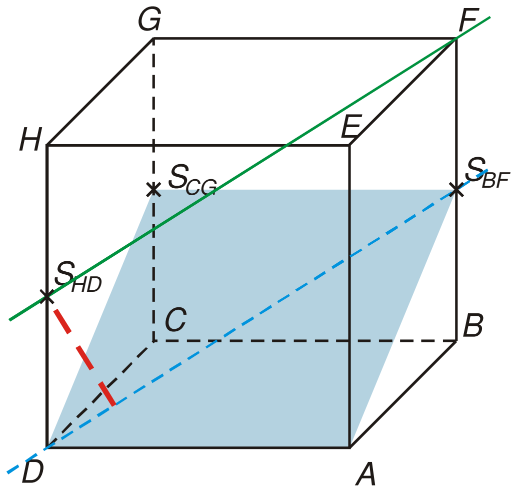
Kolmým průmětem přímky $S_{HD}F$ do roviny ADS_{BF} je přímka DS_{BF}. Obě tyto přímky leží v rovině BDH (rovina kolmá k rovině ADS_{BF}). Na přímce $S_{HD}F$ si můžeme zvolit libovolný bod a určit v rovině BDH jeho průmět do roviny ADS_{BF}. Zvolíme například bod S_{HD}.



Nesprávná jsou všechna tvrzení o kolmosti:

- kolmým průmětem přímky $S_{HD}F$ do roviny ADS_{BF} není přímka DS_{BF} (správně určený kolmý průmět neprochází žádným vrcholem krychle),
- rovina BDH není kolmá k rovině ADS_{BF} (k rovině ADS_{BF} jsou kolmé například roviny ABE nebo CDG).

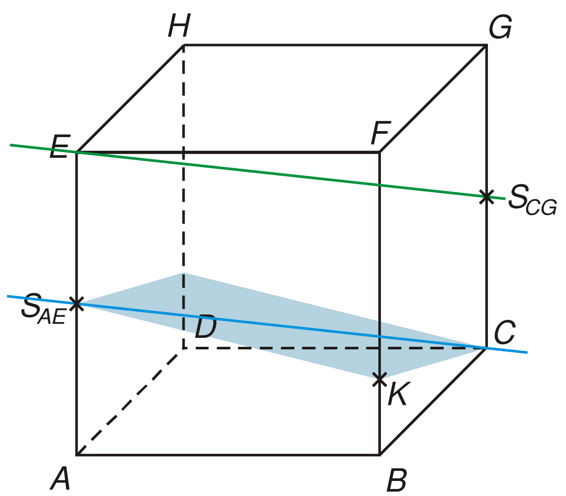
Jedním ze směrů roviny ADS_{BF} je směr přímky AD $\Rightarrow$ směr kolmý k rovině ADS_{BF} musí být kolmý k této přímce a nemůže z bodu S_{HD} směřovat do vnitřku krychle.



Správně sestrojený kolmý průmět bodu S_{HD} do roviny ADS_{BF} leží ve stěně CDG a řešení příkladu je pak shodné s příkladem 2 b).

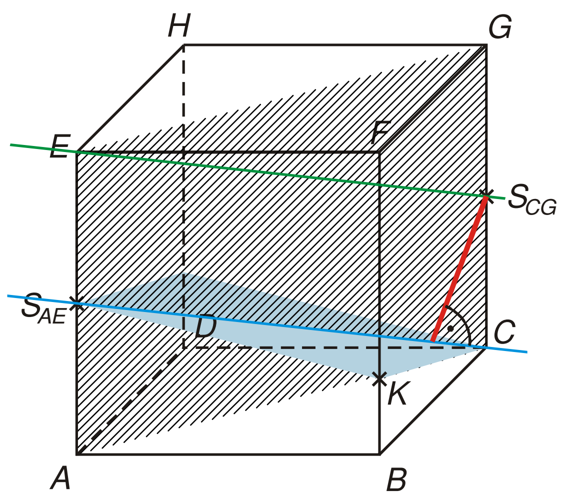
Pedagogická poznámka: Všem učitelům doporučuji v podobných situacích vyřešit příklad analyticky a zkontrolovat tak správnost stereometrického výsledku.

Př. 4: Je dána standardní krychle $ABCDEFGH$, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímky ES_{CG} od roviny CKS_{AE}, kde $K \in BF; |FK| = 3|BK|$.

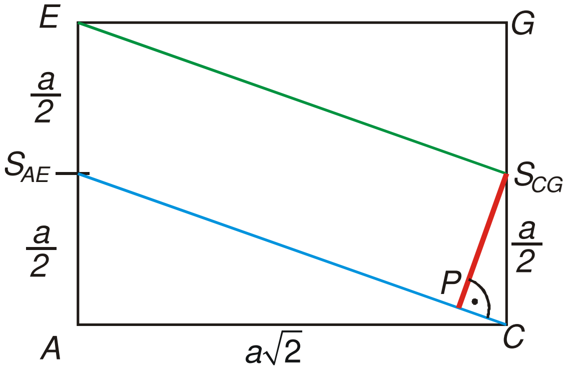


Přímka ES_{CG} je rovnoběžná s rovinou CKS_{AE} (je rovnoběžná s přímkou CS_{AE}) $\Rightarrow$ můžeme na ní zvolit libovolný bod a pomocí jeho kolmého průmětu do roviny CKS_{AE} určit vzdálenost přímky od roviny.

Kolmým průmětem přímky ES_{CG} do roviny CKS_{AE} je přímka CS_{AE}. Obě tyto přímky leží v rovině ACG (rovina kolmá k rovině CKS_{AE}). Na přímce ES_{CG} si můžeme zvolit libovolný bod a určit v rovině ACG jeho průmět do roviny CKS_{AE}. Zvolíme například bod S_{CG}.



Nakreslíme si obdélník $ACGE$:



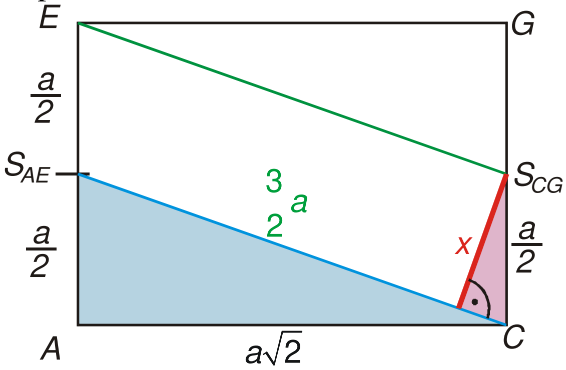
Musíme určit délku úsečky CS_{AE}, například z trojúhelníku ACS_{AE}.

$$|CS_{AE}|^2 = |AC|^2 + |AS_{AE}|^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|CS_{AE}|^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4}a^2$$

$$|CS_{AE}| = \frac{3}{2}a$$

Doplníme vzdálenost do obrázku.



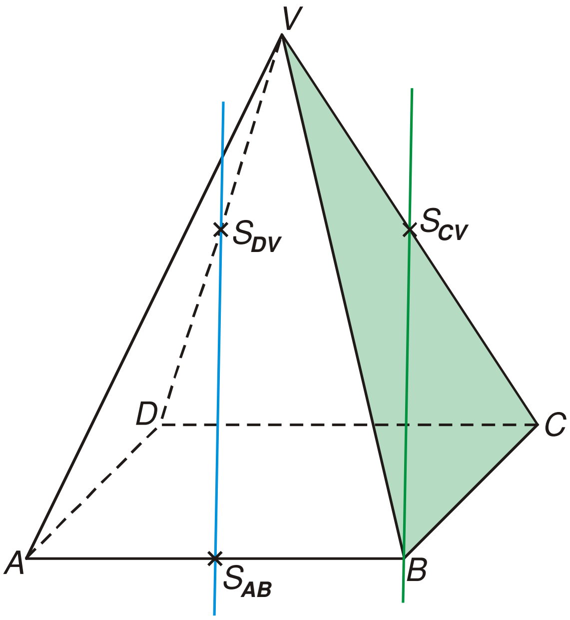
Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{\text{delší odvěsna}}{\text{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3}{2}a}$$

$$x = \frac{2a\sqrt{2}}{3a}\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Dosadíme: $x = a\frac{\sqrt{2}}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{cm} = 1{,}89\,\text{cm}$

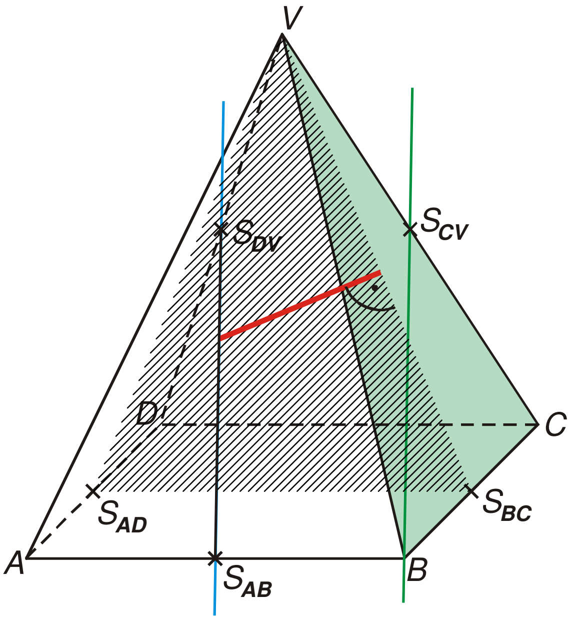
Př. 5: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = a = 5\,\text{cm}$, $|SV| = v = 6\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímky $S_{AB}S_{DV}$ od roviny BCV.



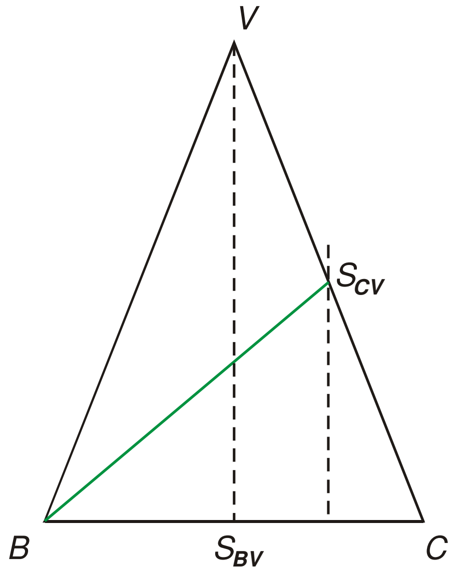
Přímka $S_{AB}S_{DV}$ je rovnoběžná s přímkou BS_{CV} (jde o protější strany rovnoběžníka $S_{AB}BS_{CV}S_{DV}$) $\Rightarrow$ přímka $S_{AB}S_{DV}$ je rovnoběžná s rovinou BCV.
Hledáme rovinu kolmou k rovině BCV (v ní sestrojíme průmět libovolného bodu přímky $S_{AB}S_{DV}$ do roviny BCV).

Nejsnadněji kreslitelnou rovinou kolmou k rovině BCV je rovina $S_{BC}S_{AD}V$

Rovina BCV dělí úsečku BS_{CV} v poměru 2:1.

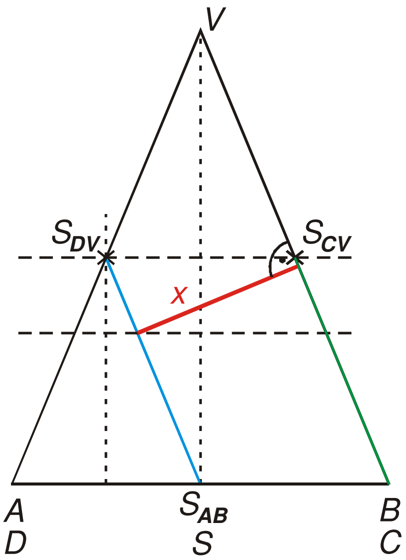


Hledáme průsečík úsečky $S_{AB}S_{DV}$ s rovinou *BCV*.



Ve stejném poměru dělí rovina *BCV* i úsečku $S_{AB}S_{DV}$.

Nakreslíme si trojúhelník $S_{AD}S_{BC}V$ jako kolmý průmět celého jehlanu.



Vodorovná vzdálenost mezi úsečkou $S_{AB}S_{DV}$ a úsečkou BS_{CV} je stále $\frac{a}{2}$.

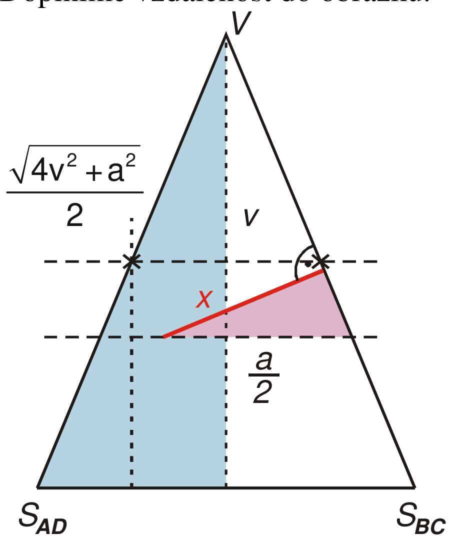
Musíme určit délku úsečky $S_{AD}V$, například z trojúhelníku $S_{AD}SV$.

$$|VS_{AD}|^2 = |SV|^2 + |S_{AD}S|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|VS_{AD}|^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 + a^2}{4}$$

$$|VS_{AD}| = \frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}$$

Doplníme vzdálenost do obrázku.



Můžeme využít podobnosti vyznačených trojúhelníků.

$$\frac{\textit{delší odvěsna}}{\textit{přepona}} = \frac{\textit{delší odvěsna}}{\textit{přepona}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{v}{\frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}}$$

$$x = \frac{2v}{\sqrt{4v^2 + a^2}} \frac{a}{2} = \frac{av}{\sqrt{4v^2 + a^2}}$$

Dosadíme: $x = \frac{av}{\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{5 \cdot 6}{\sqrt{4 \cdot 6^2 + 5^2}} \text{cm} = 2{,}31\text{cm}$

Př. 6: Petáková:
strana 93/cvičení 28 b)

Shrnutí: Vzdálenost přímky od roviny s ní rovnoběžné se rovná vzdálenosti libovolného bodu této přímky od roviny.