5.2.12 Vzdálenosti přímek

Předpoklady: 5211

Př. 1: Rozhodni, kdy má smysl uvažovat o vzdálenosti dvou přímek a navrhni definici této vzdálenosti.

Vzdálenost přímek má smysl, když přímky nemají společné body $\Rightarrow$ tedy pokud jsou buď rovnoběžné nebo mimoběžné.

Vzdálenost rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky.

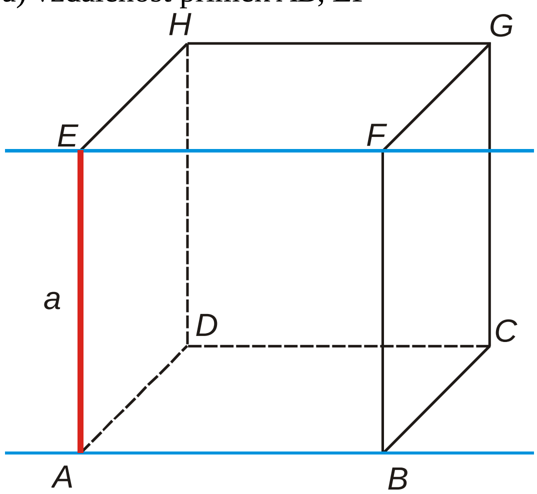
U mimoběžných přímek je situace složitější. Volíme různé dvojice bodů na přímkách $\Rightarrow$ získáme různé vzdálenosti $\Rightarrow$ hledáme takovou dvojici bodů, aby vzdálenost byla nejmenší (jako u všech ostatních definic) $\Rightarrow$ body, které použijeme, leží na přímce, která je k oběma mimoběžkám kolmá (a zase ta kolmost).

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek *p*, *q* je délka úsečky *PQ*, kde body *P*, *Q* jsou popořadě průsečíky mimoběžek *p*, *q* s jejich kolmou příčkou.

Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenosti přímek.

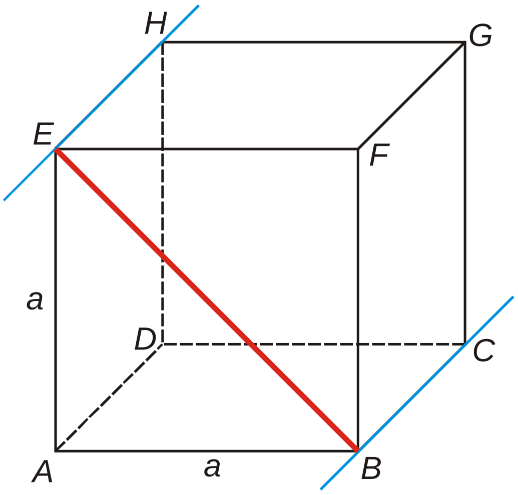
a) *AB*, *EF* b) *BC*, *EH* c) *BF*, *EH* d) *AH*, *BF*

a) vzdálenost přímek *AB*, *EF*



Přímky *AB* a *EF* jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ zvolíme libovolný bod přímky *EF* například bod *E*. Přímkou kolmou na přímku *AB* a procházející bodem *E* je přímka *AE* $\Rightarrow$ patou této kolmice je bod *A* $\Rightarrow$ vzdálenost bodu *E* od přímky *AB* je rovna $a = 4\,\text{cm}$. Tato vzdálenost je také vzdáleností přímek *AB* a *EF*.

b) vzdálenost přímek *BC*, *EH*



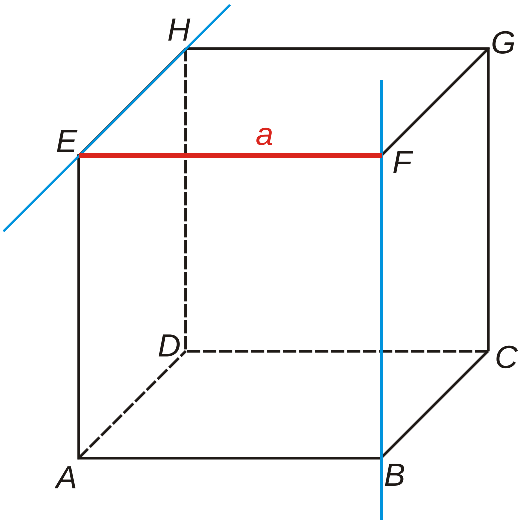
Přímky BC a EH jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ zvolíme bod E. Přímkou kolmou na přímku BC a procházející bodem E je přímka EB $\Rightarrow$ patou této kolmice je bod B $\Rightarrow$ vzdálenost bodu E od přímky BC se rovná délce úsečky BC.
Z pravoúhlého trojúhelníku ABE:

$$|BE|^2 = |AB|^2 + |AE|^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$|BE| = a\sqrt{2}$$

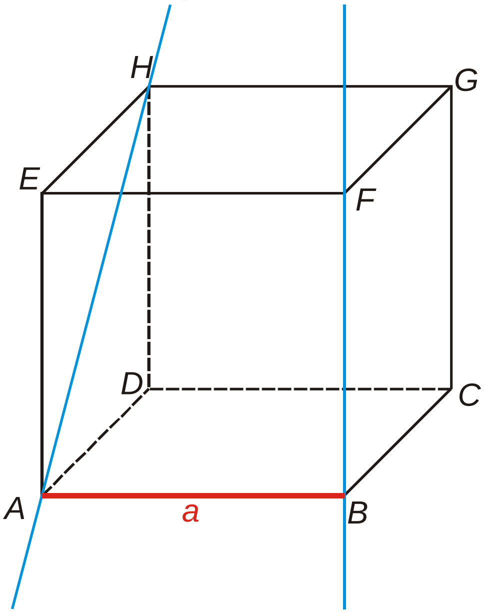
Dosadíme: $|BE| = a\sqrt{2} = 4\cdot\sqrt{2} = 5{,}66\,\text{cm}$

c) vzdálenost přímek BF, EH



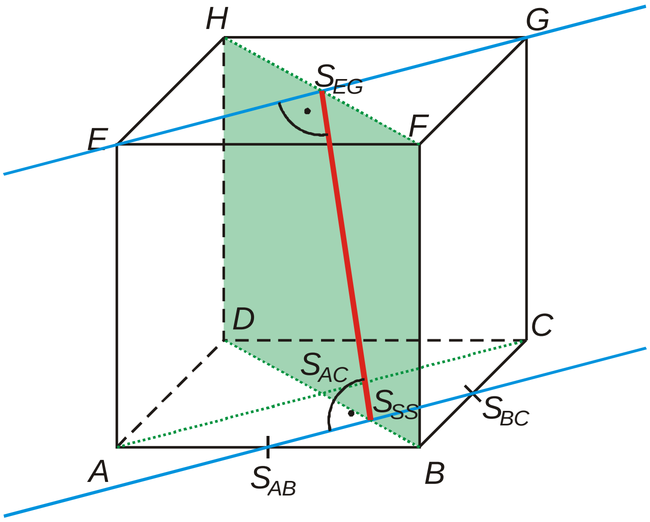
Přímky BF a EH jsou mimoběžné $\Rightarrow$ hledáme jejich příčku, která bude na obě kolmá $\Rightarrow$ najdeme úsečku EF, její délka je a $\Rightarrow$ vzdálenost přímek BF, EH je $a = 4\,\text{cm}$.

d) vzdálenost přímek AH, BF



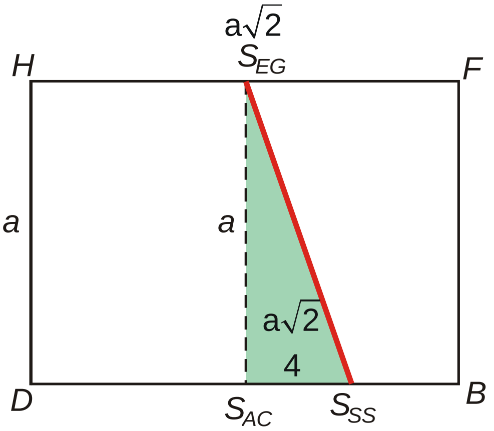
Přímky BF a AH jsou mimoběžné $\Rightarrow$ hledáme přímku, která je k oběma kolmá, takovou přímkou je přímka AB, vzdálenost přímek BF a AH se rovná délce úsečky AB a tedy 4 cm.

Př. 3: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímek $EG,\ S_{AB}S_{BC}$.



Přímky $EG,\ S_{AB}S_{BC}$ jsou navzájem rovnoběžné (body E, G, S_{AB}, S_{BC} tvoří vrcholy rovnoramenného lichoběžníka)
$\Rightarrow$ hledáme vzdálenost libovolného bodu přímky *EG* od přímky $S_{AB}S_{BC}$ (nebo naopak).
Zvolíme například bod S_{EG}, patou kolmice na přímku $S_{AB}S_{BC}$, je bod S_{SS} (úsečka $S_{EG}S_{SS}$ je osou i výškou lichoběžníka). Její délku bychom mohli určit z lichoběžníka $S_{AB}S_{BC}GE$, jinou možností je nakreslit si obdélník *BFHD*, ve kterém oba body leží a vypočítat ji z něj.

Nakreslíme obdélník *BFHD*:



Úsečka $S_{EG}S_{SS}$ je přeponou pravoúhlého trojúhelníku $S_{EG}S_{SS}S_{AC}$. Strana $S_{SS}S_{AC}$ je čtvrtinou úhlopříčky podstavy, její délka je tedy $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

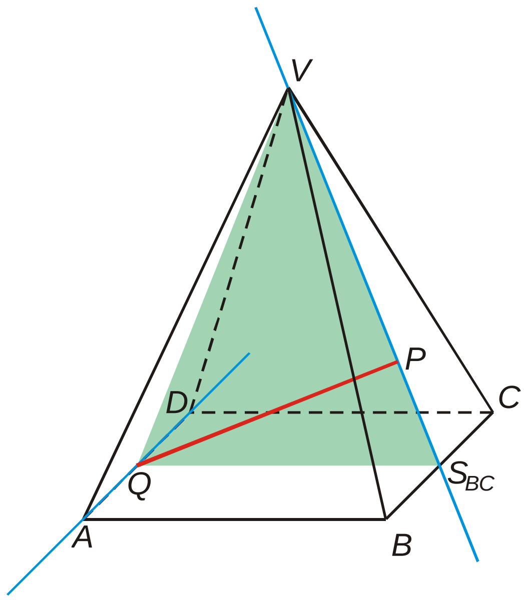
$$|S_{SS}S_{EG}|^2 = |S_{EG}S_{AC}|^2 + |S_{AC}S_{SS}|^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$|S_{SS}S_{EG}|^2 = a^2 + \frac{2a^2}{16} = a^2 + \frac{a^2}{8} = \frac{9a^2}{8}$$

$$|S_{SS}S_{EG}| = \frac{3}{\sqrt{8}}a = \frac{3}{2\sqrt{2}}a$$

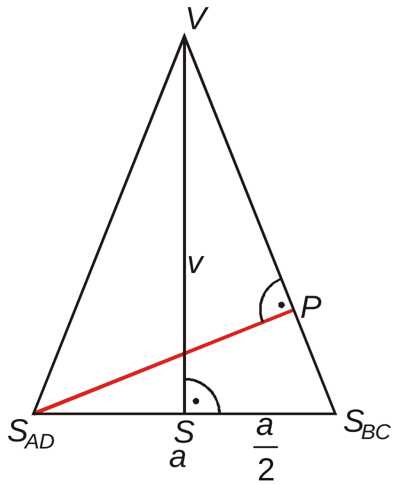
Dosadíme: $|S_{SS}S_{EG}| = \frac{3}{2\sqrt{2}}a = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot 4 = 4{,}24\,\text{cm}$.

Př. 4: Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, $|AB| = a = 4\,\text{cm}$, $|SV| = v = 5\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímek *AD* a $S_{BC}V$.



Hledáme kolmou příčku přímek AD a $S_{BC}V$. Tato příčka určitě leží v rovině $S_{BC}S_{AD}V$ (tato rovina je kolmá na přímku AD a zároveň obsahuje přímku $S_{BC}V$).

Nakreslíme si trojúhelník $S_{BC}S_{AD}V$.



Délku strany $S_{BC}V$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $SS_{BC}V$:

$$|S_{BC}V|^2 = |SV|^2 + |SS_{BC}|^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{BC}V|^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{4v^2 + a^2}{4}$$

$$|S_{BC}V| = \sqrt{\frac{4v^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}$$

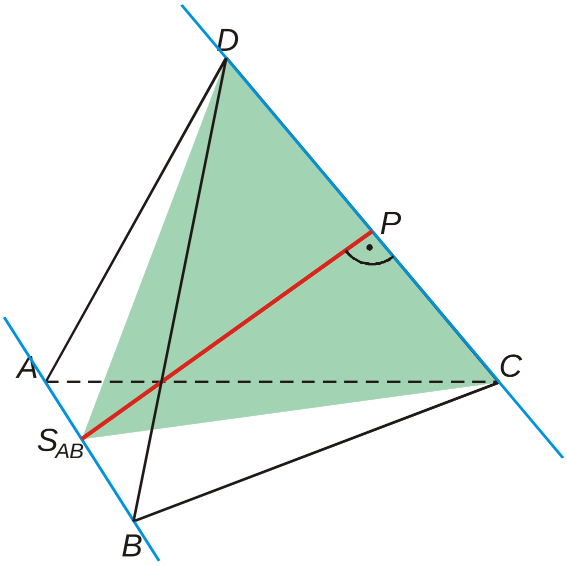
K výpočtu délky úsečky $S_{AD}P$ využijeme vzorec pro obsah trojúhelníku $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow$ $a \cdot v_a = b \cdot v_b$. Dosadíme délky stran a výšek v trojúhelníku $SS_{BC}V$:

$$|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV| = |S_{BC}V| \cdot |PS_{AD}|$$

$$|PS_{AD}| = \frac{|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV|}{|S_{BC}V|} = \frac{a \cdot v}{\frac{\sqrt{4v^2 + a^2}}{2}} = \frac{2a \cdot v}{\sqrt{4v^2 + a^2}}$$

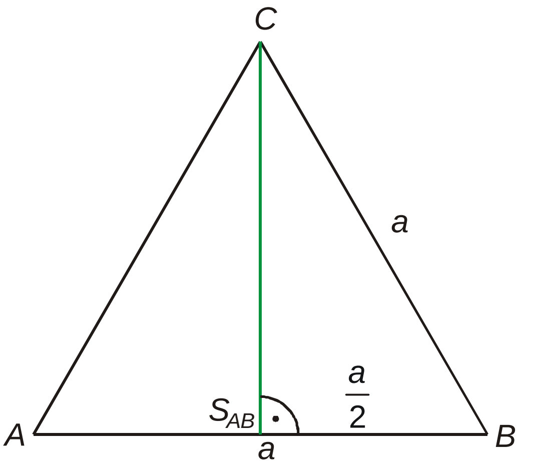
Dosazení: $|PS_{AD}| = \frac{2a \cdot v}{\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4 \cdot 5^2 + 4^2}}\,\text{cm} = 3{,}71\,\text{cm}$

Př. 5: Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, $|AB| = a = 6\,\text{cm}$. Urči vzdálenost přímek AB a CD.



Hledáme kolmou příčku přímek AB a CD. Tato příčka určitě leží v rovině $S_{AB}CD$ (tato rovina je kolmá na přímku AB a zároveň obsahuje přímku CD).

Trojúhelník $S_{AB}CD$ je rovnoramenný, určíme si délku strany $S_{AB}C$ z trojúhelníku ABC.



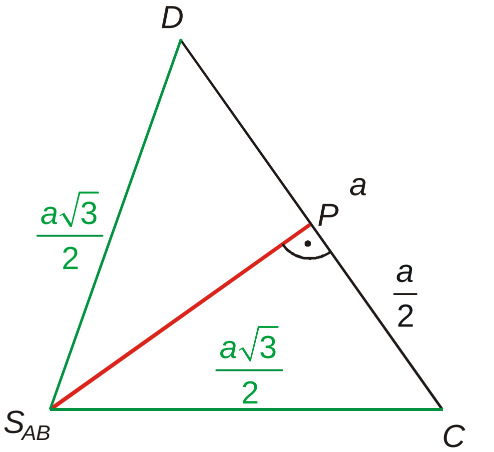
Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|S_{AB}C| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Doplníme velikosti stran do trojúhelníka $S_{AB}CD$.



Délku výšky $S_{AB}P$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}CP$:

$$|S_{AB}P|^2 = |S_{AB}C|^2 - |CP|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}P|^2 = \frac{3a}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$|S_{AB}P| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Dosazení: $|S_{AB}P| = \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 4{,}24\,\text{cm}$

Př. 6: Petáková:
strana 93/cvičení 22 b) c)
strana 93/cvičení 23 b) c)

Shrnutí: U rovnoběžných a různoběžných přímek postupujeme stejně jako u rovin. Vzdálenost mimoběžek určíme jako délku nejkratší (k oběma přímkám kolmé) příčky.