5.4.1 Mnohostěny

Předpoklady:

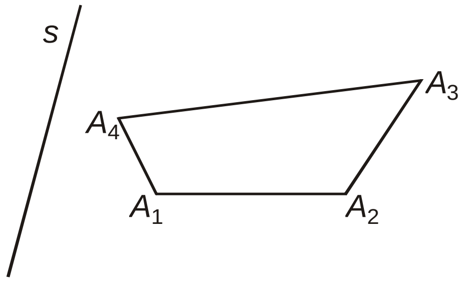
Geometrické těleso je prostorově omezený geometrický útvar, jehož hranicí je uzavřená plocha.

Hranoly

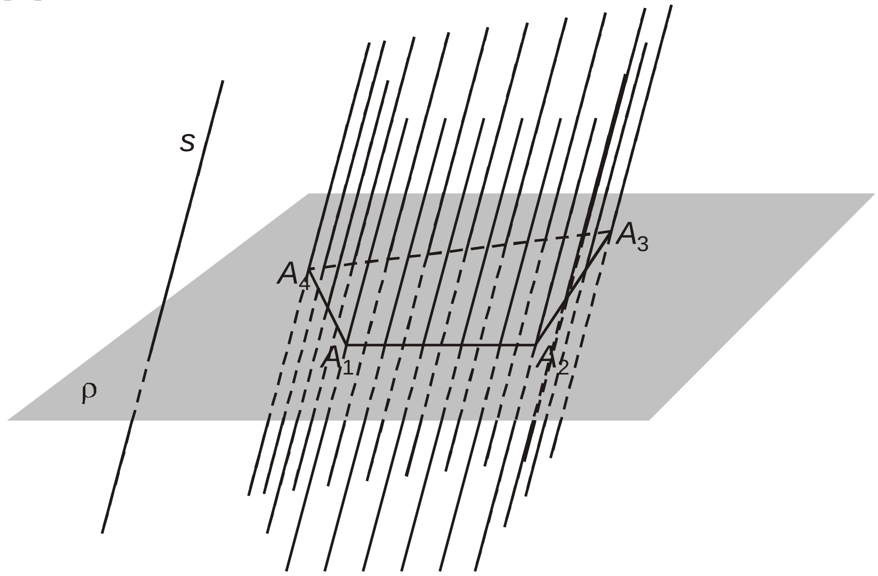
Je dán *n*-úhelník $A_1A_2...A_n$ (**řídící *n*-úhelník**) ležící v rovině ρ a přímka *s* s rovinou ρ různoběžná.

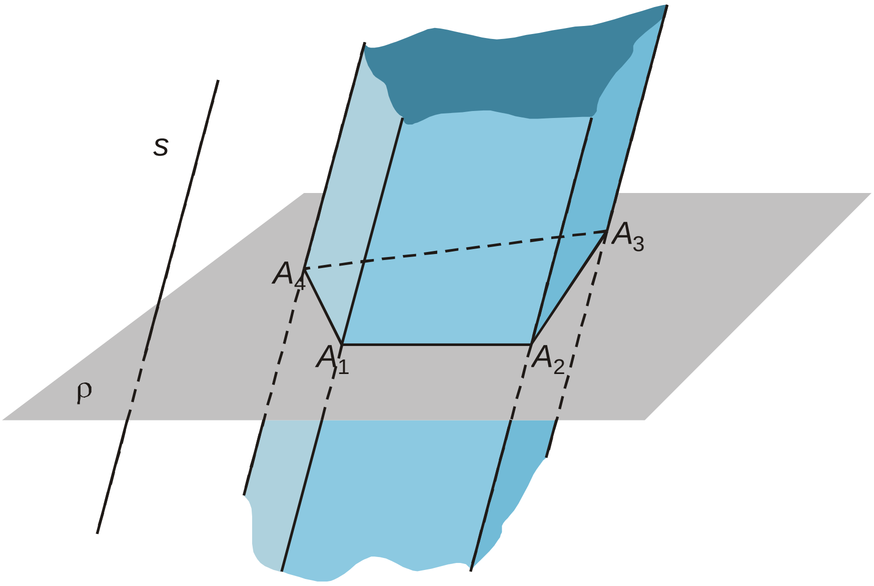
- Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou *s* a protínajících hranici mnohoúhelníka $A_1A_2...A_n$ se nazývá ***n*-boká hranolová plocha**.
- Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou *s* a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2...A_n$ se nazývá ***n*-boký hranolový prostor**.

Př. 1: Nakresli do sešitu libovolný čtyřúhelník. Jaký je rozdíl mezi čtyřbokou hranolovou plochou a čtyřbokým hranolovým prostorem s tímto řídícím čtyřúhelníkem? Zkus jeden z těchto útvarů namodelovat.



Hranolová plocha: každým bodem na obvodu mnohoúhelníka vedeme rovnoběžku s přímkou *s* $\Rightarrow$ získáme plochu jdoucí do nekonečna (můžeme ji modelovat přeloženým papírem).





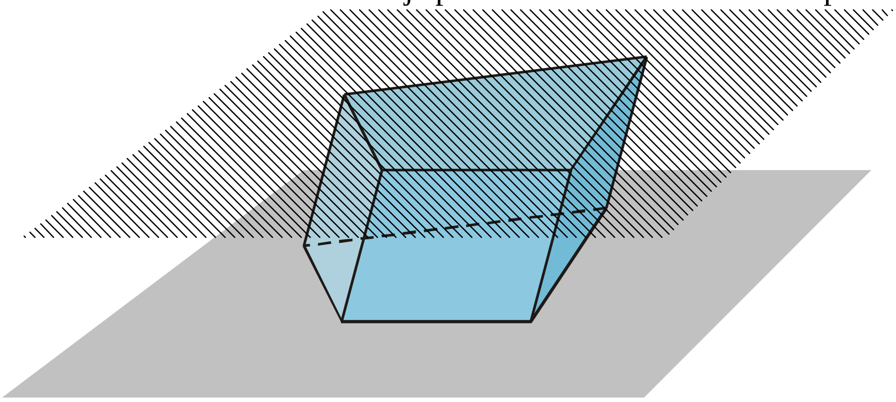
Hranolová prostor: každým bodem (i vnitřním) mnohoúhelníka vedeme rovnoběžku s přímkou s ⇒ získáme část prostoru ohraničeného hranolovou plochou.

Pedagogická poznámka: Studenti nebývají v řešení předchozího příkladu příliš úspěšní. V takovém případě, že zbytečné příliš dlouho čekat i u následujícího úkolu. S jehlanovou plochou a jehlanovým prostorem pak již problémy nebývají.

Hranolová plocha je hranicí hranolového prostoru. Každá přímka (rovina) rovnoběžná s přímkou s se nazývá směrová přímka (rovina) hranolového prostoru.

Př. 2: Navrhni, jak definovat pomocí hranolového prostoru hranol. V definici můžeš využít základní geometrické útvary, které jsme definovali v hodině 5108 Vzájemná poloha rovin.

Hranol je částí hranolového prostoru ⇒ potřebujeme z hranolového prostoru získat z obou stran omezenou část ⇒ hranol je průnik n-bokého hranolového prostoru a vrstvy.

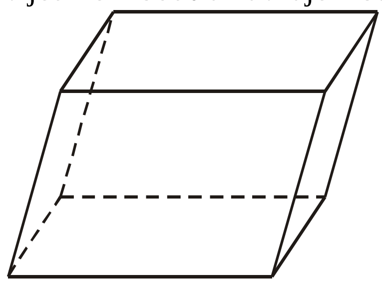


***N*-boký hranol** je **průnik *n*-bokého hranolového prostoru a vrstvy**, jejíž hraniční roviny nejsou směrové ⇒

- výška hranolu – tloušťka vrstvy,
- podstavy hranolu – průniky hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem,
- boční stěny – stěny hranolu, které nejsou podstavami,
- plášť hranolu – sjednocení všech bočních stěn,

- vrcholy hranolu – vrcholy stěn hranolu,
- podstavné hrany – strany podstav hranolu,
- boční hrany – ostatní hrany,
- stěnová výška – vzdálenost hran v téže boční stěně,
- tělesové úhlopříčky – úsečky, jejichž krajní body jsou vrcholy hranolu a které neleží v téže stěně.
- Kolmý hranol: boční hrany jsou kolmé na podstavy.
- Kosý hranol: boční hrany nejsou kolmé na podstavy.
- Pravidelný *n*-boký hranol: podstavami jsou pravidelné *n*-úhelníky.

Rovnoběžnostěn: všechny tři dvojice protějších stran jsou rovnoběžné (shodné) rovnoběžníky (a můžeme je pokládat za dvojici podstav). Tělesové úhlopříčky se protínají v jediném bodě a navzájem se půlí.

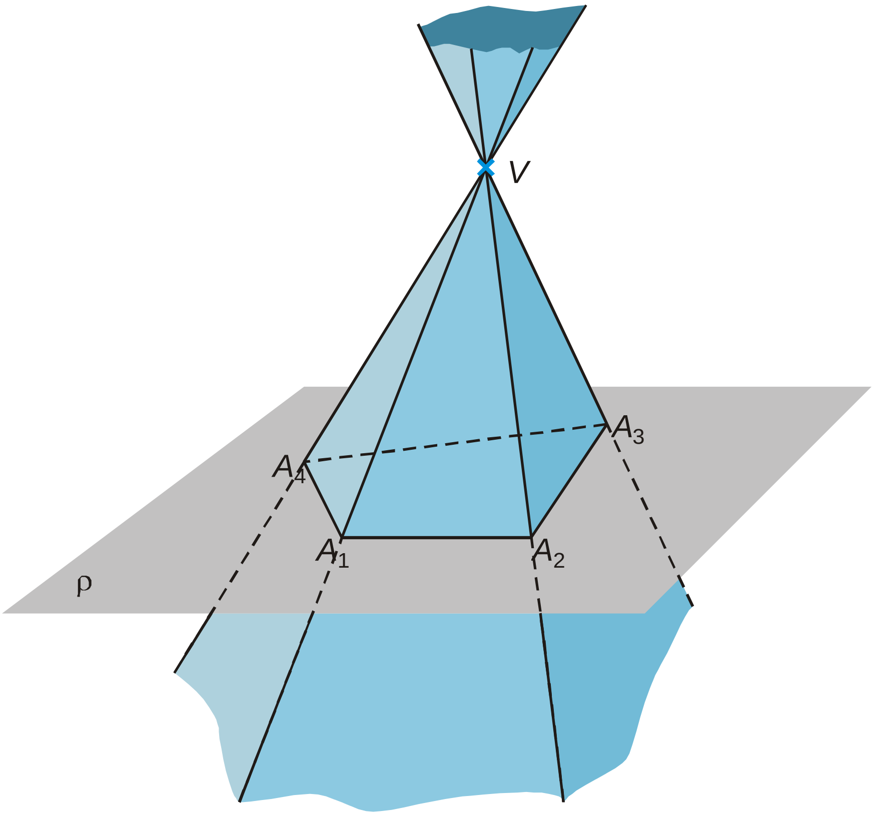


Další speciální typy hranolů:
- kvádr,
- krychle,
- klenec (rovnoběžnostěn ohraničený šesti kosočtverci).

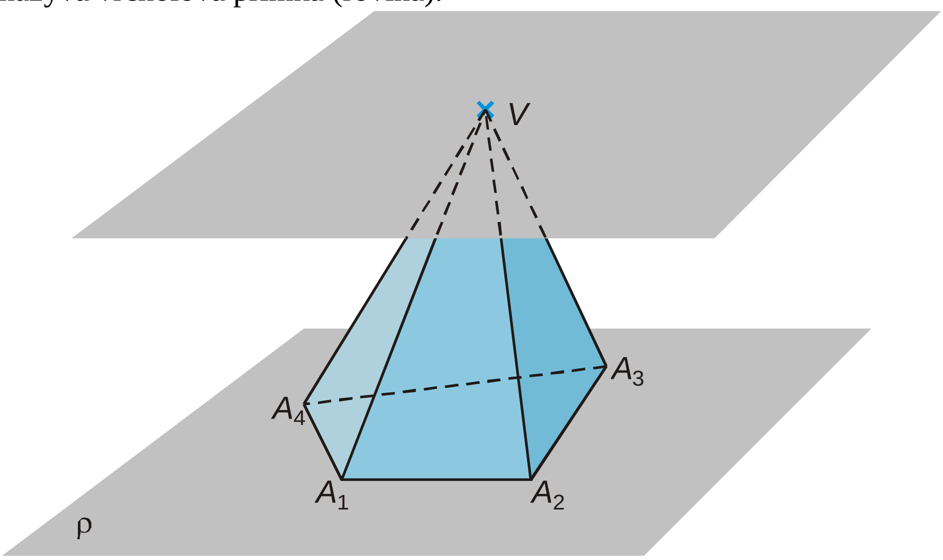
Jehlany

Je dán *n*-úhelník $A_1A_2...A_n$ (**řídící *n*-úhelník**) ležící v rovině ρ a bod *V*, který v této rovině neleží.

- Sjednocení všech přímek procházejících bodem *V* a protínajících hranici mnohoúhelníka $A_1A_2...A_n$ se nazývá ***n*-boká jehlanová plocha**.
- Sjednocení všech přímek procházejících bodem *V* a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2...A_n$ se nazývá ***n*-boký jehlanový prostor**.



Bod *V* nazýváme vrchol jehlanové plochy. Každá přímka (rovina) procházející vrcholem se nazývá vrcholová přímka (rovina).



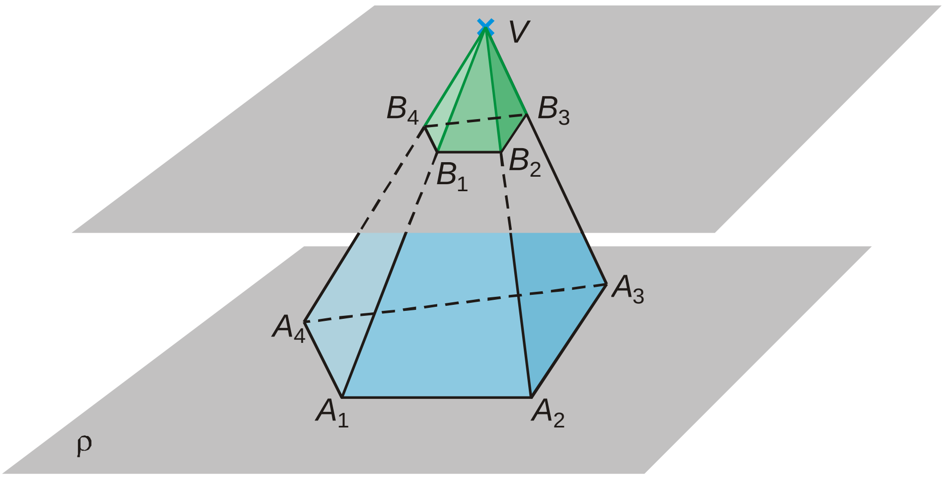
Jehlan je **průnik *n*-bokého jehlanového prostoru a vrstvy**, jejíž jedna hraniční roviny má s jehlanovým prostorem společný jediný bod – vrchol jehlanového prostoru *V* ⇒

- vrchol V – hlavní vrchol jehlanu,
- výška jehlanu – tloušťka vrstvy,
- podstava jehlanu – průnik hraniční roviny vrstvy neprocházející vrcholem s jehlanovým prostorem,
- boční stěny – stěny jehlanu, které obsahují hlavní vrchol (jde o trojúhelníky),
- plášť jehlanu – sjednocení všech bočních stěn,
- podstavné hrany – strany podstav hranolu,
- boční hrany – ostatní hrany,
- stěnová výška – vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně.

* Pravidelný *n*-boký jehlan: podstavou je pravidelný *n*-úhelník.
* Čtyřstěn – těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami (trojboký jehlan, když jednu ze stěn zvolíme za podstavu),
    * těžnice – spojnice libovolného vrcholu s těžištěm protější stěny,
    * těžiště – společný bod všech těžnic, společný bod spojnic středů protějších stran, vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna třem čtvrtinám délky příslušné těžnice.
* Pravidelný čtyřstěn – stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.

Př. 3: Rozhodni, jaká tělesa získáme, když jehlan protneme rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.

Vzniknou dvě tělesa:
* jehlan,
* komolý jehlan.



Komolý jehlan:
* dvě podstavy, kterými jsou dva navzájem podobné mnohoúhelníky,
* boční stěny jsou lichoběžníky.

Mnohostěn (***n*-stěn**) je každé těleso, jehož hranice je sjednocením ***n* mnohoúhelníků** (**stěn**) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině,

$\Rightarrow$
* stěny mnohostěnu – mnohoúhelníky tvořící jeho hranici,
* vrcholy mnohostěnu – vrcholy stěn,
* hrany mnohostěnu – strany stěn,
* stěnová úhlopříčka – úsečka spojující dva nesousední vrcholy v téže stěně,
* tělesová úhlopříčka – úsečka, jejíž krajní body jsou vrcholy hranolu a neleží v téže stěně.

Př. 4: Jaký je vztah mezi mnohostěny a hranoly?

Hranoly tvoří část mnohostěnů. Podobně také jehlany tvoří část mnohostěnů.
Konvexní mnohostěn:
* průnik konečného počtu poloprostorů,

- s každými dvěma body *X*, *Y*, obsahuje i celou úsečku *XY*.

Eulerova věta
Označíme-li *s* počet stěn, *h* počet hran, *v* počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí $s+v=h+2$.

Př. 5: Ověř platnost Eulerovy věty pro:
a) krychli
b) šestiboký jehlan
c) *n*-boký hranol
d) *n*-boký jehlan

a) krychle stěny $s=6$, vrcholy $v=8$, hrany $h=12$ $s+v=h+2 \Rightarrow 6+8=2+12 \Rightarrow$ platí

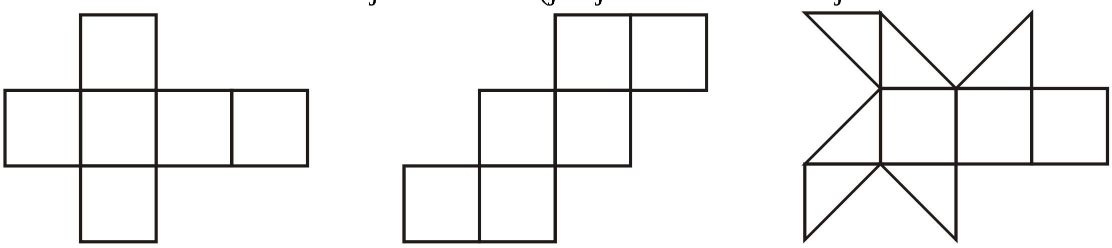
b) šestiboký jehlan stěny $s=7$, vrcholy $v=7$, hrany $h=12$ $s+v=h+2 \Rightarrow 7+7=2+12$
$\Rightarrow$ platí

c) *n*-boký hranol
stěny $s=n+2$, vrcholy $v=2n$, hrany $h=n\cdot 2+n=3n$
$s+v=h+2 \Rightarrow n+2+2n=2+3n \Rightarrow$ platí

d) *n*-boký jehlan
stěny $s=n+1$, vrcholy $v=n+1$, hrany $h=n+n=2n$
$s+v=h+2 \Rightarrow n+1+n+1=2+2n \Rightarrow$ platí

Pedagogická poznámka: Část studentů potřebuje pomoci s bodem *c* kvůli používání proměnné *n*.

Síť mnohostěnu – zakreslení všech stěn mnohostěnu v takovém seskupení, které vytváří jeden rovinný obrazec.
Síť mnohostěnu není určena jednoznačně (jak je vidět na následujících ukázkách sítí krychle).



Pedagogická poznámka: Na sítě mnohostěnů je možné připravit spoustu hezkých příkladů, v této hodině jsou však nestihnutelné.

Pravidelný mnohostěn – má shodné stěny, kterými jsou pravidelné n-úhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Jejich počet je překvapivě malý. Zkusíme je najít.

Jaké obrazce mohou být stěnami? Kolik stěn se může sejít u jednoho vrcholu?
Rovnostranný trojúhelník s vnitřním úhlem $60°$:
- 3 stěny (dohromady $3\cdot 60°=180°$) $\Rightarrow$ pravidelný **čtyřstěn** (tetraedr),
- 4 stěny (dohromady $4\cdot 60°=240°$) $\Rightarrow$ pravidelný **osmistěn** (oktaedr),
- 5 stěn (dohromady $5\cdot 60°=300°$) $\Rightarrow$ pravidelný **dvacetistěn** (ikosaedr),
- 6 stěn (dohromady $6\cdot 60°=360°$) $\Rightarrow$ tyto stěny budou ležet v rovině a nevytvoří hranici tělesa.

Rovnostranný čtyřúhelník (čtverec) s vnitřním úhlem $90°$:

- 3 stěny (dohromady $3 \cdot 90° = 270°$) $\Rightarrow$ pravidelný **šestistěn** (hexaedr, krychle),
- 4 stěny (dohromady $4 \cdot 90° = 360°$) $\Rightarrow$ tyto stěny budou ležet v rovině a nevytvoří hranici tělesa.

Rovnostranný pětiúhelník s vnitřním úhlem $108°$:

- 3 stěny (dohromady $3 \cdot 108° = 324°$) $\Rightarrow$ pravidelný **dvanáctistěn** (dodekaedr),
- 4 stěny (dohromady $4 \cdot 108° = 432°$) $\Rightarrow$ tyto stěny nevytvoří hranici tělesa, součet jejich úhlu je větší než $360°$.

Animace pravidelných mnohostěnů lze nalézt například na adrese
http://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nsk%C3%A9_t%C4%9Bleso.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti si všimnou, že všechna nalezená tělesa (asi s výjimkou čtyřstěnu) se používají v některých hrách jako házecí kostky (klasická hrací kostka, osmistěnka, dvanáctistěnka, dvacetistěnka). Nejde o náhodu, pouze u pravidelného mnohostěnu padají stěny se stejnou pravděpodobností.

Př. 6: Které z pravidelných mnohostěnů patří mezi hranoly? Které patří mezi jehlany?

Hranoly – krychle (pravidelný kolmý čtyřboký hranol).
Jehlany – čtyřstěn (pravidelný trojboký hranol)

- hranoly
    - kolmé
    - kosé
        - rovnoběžnostěn

Př. 7: Doplň předchozí schéma o všechny následující pojmy: jehlan, pravidelný *n*-boký jehlan, čtyřstěn, krychle, komolý jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, kvádr, pravidelný čtyřstěn, klenec, konvexní mnohostěn, pravidelný mnohostěn, pravidelný osmistěn, mnohostěn, pravidelný dvacetistěn, kosý šestiboký hranol, pravidelný dvanáctistěn.

Mnohostěn

- konvexní mnohostěn
    - hranoly
        - kolmé
            - kvádr
                - *krychle*
        - kosé
            - kosý šestiboký hranol
            - rovnoběžnostěn
                - klenec
    - jehlan
        - čtyřstěn
            - *pravidelný čtyřstěn*
        - pravidelný čtyřboký jehlan
    - komolý jehlan

- pravidelný mnohostěn
    - *pravidelný osmistěn*
    - *pravidelný dvanáctistěn*
    - *pravidelný dvacetistěn*

Pedagogická poznámka: Samostatné vytvoření přehledu považuji za nejužitečnější část hodiny. Zbytek si mohou studenti nastudovat i doma samostatně. Přehled si pak sestavil (společně zkontroloval) na začátku hodiny a zbytek by bylo možné věnovat sítím.

Shrnutí: