

5.4.1 Mnohostěny

Předpoklady:

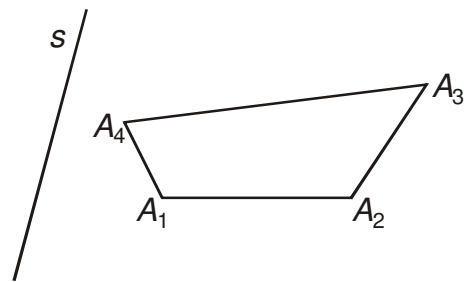
Geometrické těleso je prostorově omezený geometrický útvar, jehož hranicí je uzavřená plocha.

Hranoly

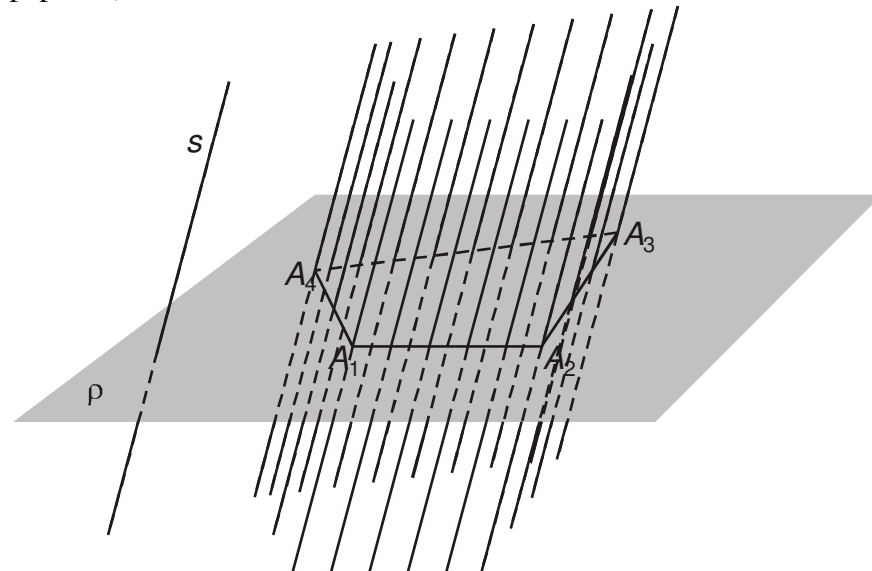
Je dán n -úhelník $A_1A_2\dots A_n$ (**řídící n -úhelník**) ležící v rovině ρ a přímka s s rovinou ρ různoběžná.

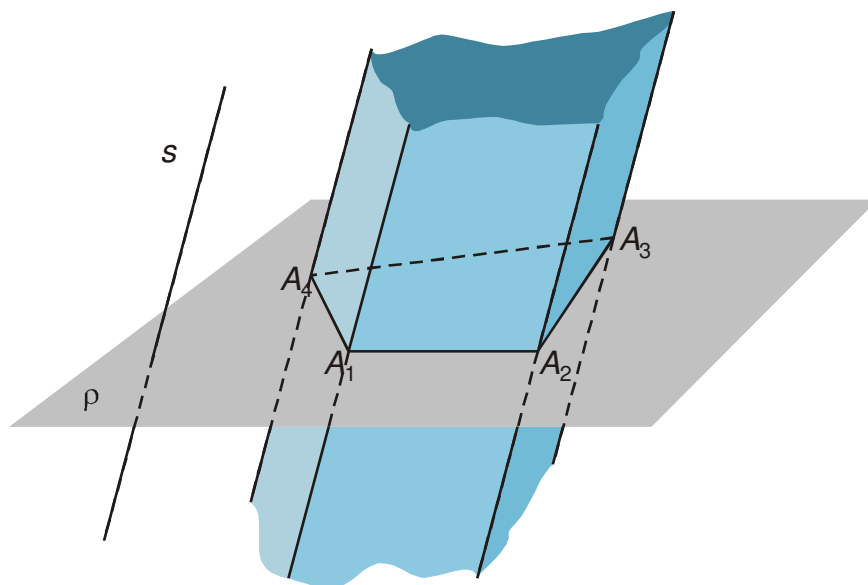
- Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících hranici mnohoúhelníka $A_1A_2\dots A_n$ se nazývá **n -boká hranolová plocha**.
- Sjednocení všech přímek rovnoběžných s přímkou s a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2\dots A_n$ se nazývá **n -boký hranolový prostor**.

Př. 1: Nakresli do sešitu libovolný čtyřúhelník. Jaký je rozdíl mezi čtyřbokou hranolovou plochou a čtyřbokým hranolovým prostorem s tímto řídícím čtyřúhelníkem? Zkus jeden z těchto útvarů namodelovat.



Hranolová plocha: každým bodem na obvodu mnohoúhelníka vedeme rovnoběžku s přímkou $s \Rightarrow$ získáme plochu jdoucí do nekonečna (můžeme ji modelovat přeloženým papírem).





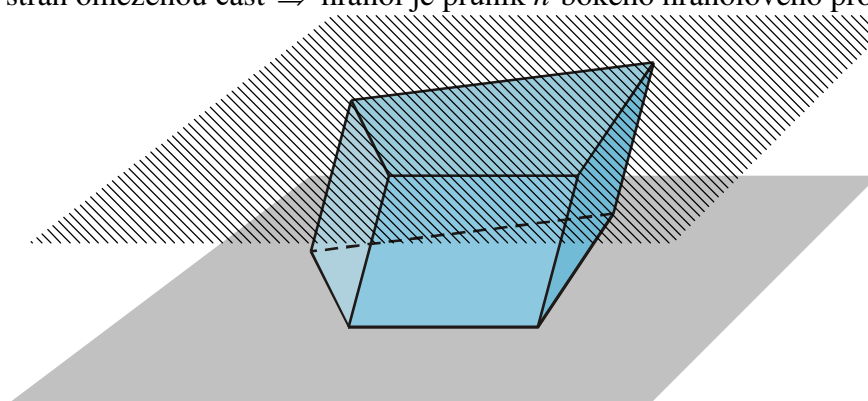
Hranolový prostor: každým bodem (i vnitřním) mnohoúhelníka vedeme rovnoběžku s přímkou $s \Rightarrow$ získáme část prostoru ohraničeného hranolovou plochou.

Pedagogická poznámka: Studenti nebývají v řešení předchozího příkladu příliš úspěšní. V takovém případě je zbytečné příliš dlouho čekat i u následujícího úkolu. S jehlanovou plochou a jehlanovým prostorem pak již problémy nebývají.

Hranolová plocha je hranicí hranolového prostoru. Každá přímka (rovina) rovnoběžná s přímkou s se nazývá směrová přímka (rovina) hranolového prostoru.

Př. 2: Navrhni, jak definovat pomocí hranolového prostoru hranol. V definici můžeš využít základní geometrické útvary, které jsme definovali v hodině 5108 Vzájemná poloha rovin.

Hranol je částí hranolového prostoru \Rightarrow potřebujeme z hranolového prostoru získat z obou stran omezenou část \Rightarrow hranol je průnik n -bokého hranolového prostoru a vrstvy.

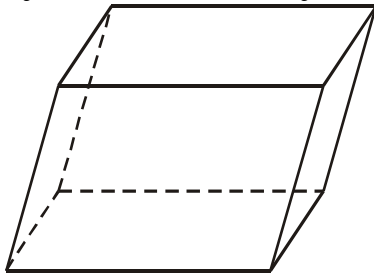


N -boký hranol je průnik n -bokého hranolového prostoru a vrstvy, jejíž hraniční roviny nejsou směrové \Rightarrow

- výška hranolu – tloušťka vrstvy,
- podstavy hranolu – průniky hraničních rovin vrstvy s hranolovým prostorem,
- boční stěny – stěny hranolu, které nejsou podstavami,
- plášť hranolu – sjednocení všech bočních stěn,

- vrcholy hranolu – vrcholy stěn hranolu,
- podstavné hrany – strany podstav hranolu,
- boční hrany – ostatní hrany,
- stěnová výška – vzdálenost hran v téže boční stěně,
- tělesové úhlopříčky – úsečky, jejichž krajní body jsou vrcholy hranolu a které neleží v téže stěně.
- Kolmý hranol: boční hrany jsou kolmé na podstavu.
- Kosý hranol: boční hrany nejsou kolmé na podstavu.
- Pravidelný n -boký hranol: podstavami jsou pravidelné n -úhelníky.

Rovnoběžnostěn: všechny tři dvojice protějších stran jsou rovnoběžné (shodné) rovnoběžníky (a můžeme je pokládat za dvojici podstav). Tělesové úhlopříčky se protínají v jediném bodě a navzájem se půlí.



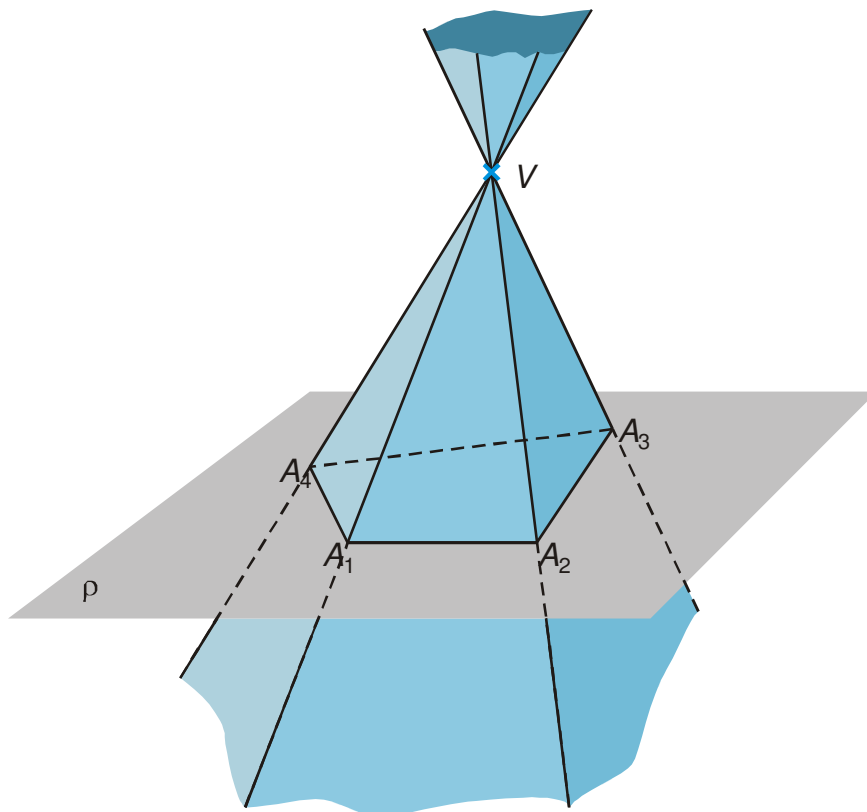
Další speciální typy hranolů:

- kvádr,
- krychle,
- klencec (rovnoběžnostěn ohraničený šesti kosočtverci).

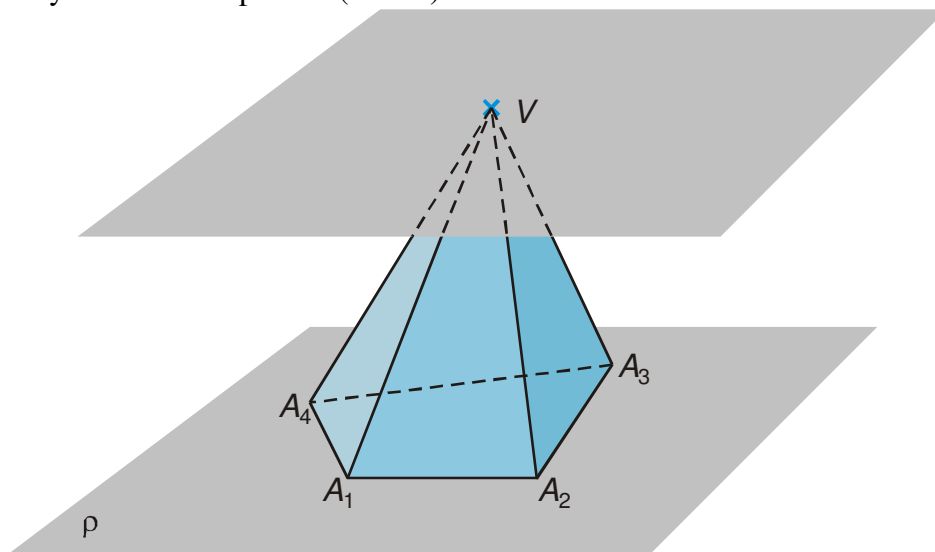
Jehlany

Je dán n -úhelník $A_1A_2\dots A_n$ (**řídící n -úhelník**) ležící v rovině ρ a bod V , který v této rovině neleží.

- Sjednocení všech přímk procházejících bodem V a protínajících hranici mnohoúhelníka $A_1A_2\dots A_n$ se nazývá **n -boká jehlanová plocha**.
- Sjednocení všech přímk procházejících bodem V a protínajících mnohoúhelník $A_1A_2\dots A_n$ se nazývá **n -boký jehlanový prostor**.



Bod V nazýváme vrchol jehlanové plochy. Každá přímka (rovina) procházející vrcholem se nazývá vrcholová přímka (rovina).



Jehlan je průnik n -bokého jehlanového prostoru a vrstvy, jejíž jedna hraniční rovina má s jehlanovým prostorem společný jediný bod – vrchol jehlanového prostoru $V \Rightarrow$

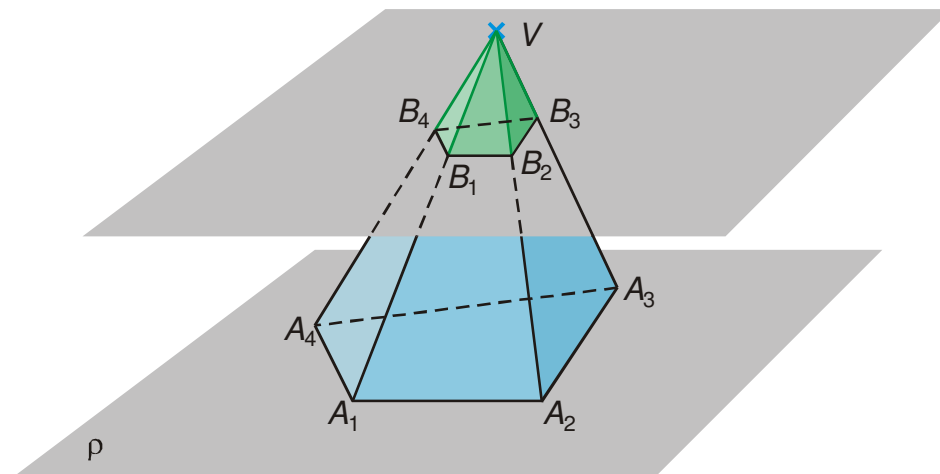
- vrchol V – hlavní vrchol jehlanu,
- výška jehlanu – tloušťka vrstvy,
- podstava jehlanu – průnik hraniční roviny vrstvy neprocházející vrcholem s jehlanovým prostorem,
- boční stěny – stěny jehlanu, které obsahují hlavní vrchol (jde o trojúhelníky),
- plášť jehlanu – sjednocení všech bočních stěn,
- podstavné hrany – strany podstav hranolu,
- boční hrany – ostatní hrany,
- stěnová výška – vzdálenost hlavního vrcholu od podstavné hrany v boční stěně.

- Pravidelný n -boký jehlan: podstavou je pravidelný n -úhelník.
- Čtyřstěn – těleso ohraničené čtyřmi trojúhelníkovými stěnami (trojboký jehlan, když jednu ze stěn zvolíme za podstavu),
 - těžnice – spojnice libovolného vrcholu s těžištěm protější stěny,
 - těžiště – společný bod všech těžnic, společný bod spojnic středů protějších stran, vzdálenost těžiště od vrcholu je rovna třem čtvrtinám délky příslušné těžnice.
- Pravidelný čtyřstěn – stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky.

Př. 3: Rozhodni, jaká tělesa získáme, když jehlan protneme rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy.

Vzniknou dvě tělesa:

- jehlan,
- komolý jehlan.



Komolý jehlan:

- dvě podstavy, kterými jsou dva navzájem podobné mnohoúhelníky,
- boční stěny jsou lichoběžníky.

Mnohostěn (n -stěn) je každé těleso, jehož hranice je sjednocením n mnohoúhelníků (stěn) takových, že strana každého z nich je zároveň stranou sousedního mnohoúhelníku a žádné dva sousední mnohoúhelníky neleží v téže rovině,

\Rightarrow

- stěny mnohostěnu – mnohoúhelníky tvořící jeho hranici,
- vrcholy mnohostěnu – vrcholy stěn,
- hrany mnohostěnu – strany stěn,
- stěnová úhlopříčka – úsečka spojující dva nesousední vrcholy v téže stěně,
- tělesová úhlopříčka – úsečka, jejíž krajní body jsou vrcholy hranolu a neleží v téže stěně.

Př. 4: Jaký je vztah mezi mnohostěny a hranoly?

Hranoly tvoří část mnohostěnu. Podobně také jehlany tvoří část mnohostěnu.

Konvexní mnohostěn:

- průnik konečného počtu poloprostorů,

- s každými dvěma body X, Y , obsahuje i celou úsečku XY .

Eulerova věta

Označíme-li s počet stěn, h počet hran, v počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak platí $s + v = h + 2$.

Př. 5: Ověř platnost Eulerovy věty pro:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| a) krychli | b) šestiboký jehlan |
| c) n -boký hranol | d) n -boký jehlan |

a) krychle stěny $s = 6$, vrcholy $v = 8$, hrany $h = 12$ $s + v = h + 2 \Rightarrow 6 + 8 = 2 + 12 \Rightarrow$ platí

b) šestiboký jehlan stěny $s = 7$, vrcholy $v = 7$, hrany $h = 12$ $s + v = h + 2 \Rightarrow 7 + 7 = 2 + 12 \Rightarrow$ platí

c) n -boký hranol

stěny $s = n + 2$, vrcholy $v = 2n$, hrany $h = n \cdot 2 + n = 3n$

$s + v = h + 2 \Rightarrow n + 2 + 2n = 2 + 3n \Rightarrow$ platí

d) n -boký jehlan

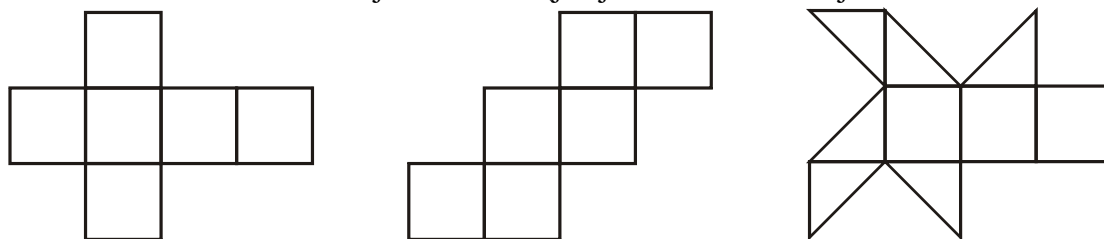
stěny $s = n + 1$, vrcholy $v = n + 1$, hrany $h = n + n = 2n$

$s + v = h + 2 \Rightarrow n + 1 + n + 1 = 2 + 2n \Rightarrow$ platí

Pedagogická poznámka: Část studentů potřebuje pomoci s bodem c kvůli používání proměnné n .

Sít' mnohostěnu – zakreslení všech stěn mnohostěnu v takovém seskupení, které vytváří jeden rovinný obrazec.

Sít' mnohostěnu není určena jednoznačně (jak je vidět na následujících ukázkách sítí krychle).



Pedagogická poznámka: Na sítě mnohostěnu je možné připravit spoustu hezkých příkladů, v této hodině jsou však nestihnutelné.

Pravidelný mnohostěn – má shodné stěny, kterými jsou pravidelné n -úhelníky a z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran. Jejich počet je překvapivě malý. Zkusíme je najít.

Jaké obrazce mohou být stěnami? Kolik stěn se může sejít u jednoho vrcholu?

Rovnostranný trojúhelník s vnitřním úhlem 60° :

- 3 stěny (dohromady $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$) \Rightarrow pravidelný **čtyřstěn** (tetraedr),
- 4 stěny (dohromady $4 \cdot 60^\circ = 240^\circ$) \Rightarrow pravidelný **osmistěn** (oktaedr),
- 5 stěn (dohromady $5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$) \Rightarrow pravidelný **dvacetistěn** (ikosaedr),
- 6 stěn (dohromady $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$) \Rightarrow tyto stěny budou ležet v rovině a nevytvoří hranici tělesa.

Rovnostranný čtyřúhelník (čtverec) s vnitřním úhlem 90° :

- 3 stěny (dohromady $3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$) \Rightarrow pravidelný **šestistěn** (hexaedr, krychle),
- 4 stěny (dohromady $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$) \Rightarrow tyto stěny budou ležet v rovině a nevytvoří hranici tělesa.

Rovnostranný pětiúhelník s vnitřním úhlem 108° :

- 3 stěny (dohromady $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$) \Rightarrow pravidelný **dvanáctistěn** (dodekaedr),
- 4 stěny (dohromady $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$) \Rightarrow tyto stěny nevytvoří hranici tělesa, součet jejich úhlů je větší než 360° .

Animace pravidelných mnohostěnů lze nalézt například na adrese

http://cs.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nsk%C3%A9_t%C4%9Bleso.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti si všimnou, že všechna nalezená tělesa (asi s výjimkou čtyřstěnu) se používají v některých hrách jako házecí kostky (klasická hrací kostka, osmistěnka, dvanáctistěnka, dvacetistěnka). Nejde o náhodu, pouze u pravidelného mnohostěnu padají stěny se stejnou pravděpodobností.

Př. 6: Které z pravidelných mnohostěnů patří mezi hranoly? Které patří mezi jehlany?

Hranoly – krychle (pravidelný kolmý čtyřboký hranol).

Jehlany – čtyřstěn (pravidelný trojboký hranol)

- hranoly
 - kolmé
 - kosé
 - rovnoběžnostěn

Př. 7: Doplně předchozí schéma o všechny následující pojmy: jehlan, pravidelný n -boký jehlan, čtyřstěn, krychle, komolý jehlan, pravidelný čtyřboký jehlan, kvádr, pravidelný čtyřstěn, klenec, konvexní mnohostěn, pravidelný mnohostěn, pravidelný osmistěn, mnohostěn, pravidelný dvacetistěn, kosý šestiboký hranol, pravidelný dvanáctistěn.

Mnohostěn

- konvexní mnohostěn
 - hranoly
 - kolmé
 - kvádr
 - *krychle*
 - kosé
 - kosý šestiboký hranol
 - rovnoběžnostěn
 - klenec
 - jehlan
 - čtyřstěn
 - *pravidelný čtyřstěn*
 - pravidelný čtyřboký jehlan

- komolý jehlan
- pravidelný mnohostěn
 - *pravidelný osmistěn*
 - *pravidelný dvanáctistěn*
 - *pravidelný dvacetistěn*

Pedagogická poznámka: Samostatné vytvoření přehledu považuji za nejužitečnější část hodiny. Zbytek si mohou studenti nastudovat i doma samostatně. Přehled by si pak sestavili (společně zkontrolovali) na začátku hodiny a zbytek by bylo možné věnovat sítím.

Shrnutí: