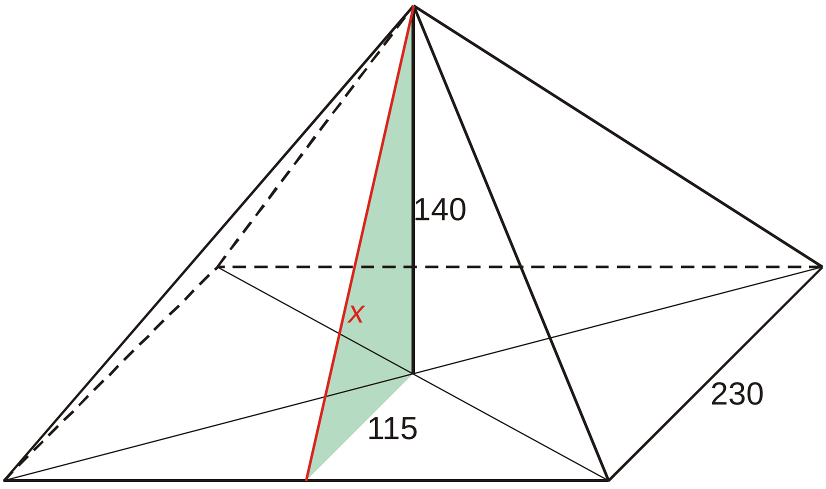
5.4.3 Objemy a povrchy mnohostěnů II

Předpoklady: 5402

Př. 1: Cheopsova pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně 230 m a výšce 140 m. Kolik kamenných kvádrů o objemu $1,05\,\text{m}^3$ bylo potřeba na její stavbu? Kolik mramorových desek o ploše $0,5\,\text{m}^2$ by bylo potřeba na její vnější obložení.

Objem: $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}a^2 v = \frac{1}{3}\cdot 230^2 \cdot 140\,\text{m}^3 = 2470000\,\text{m}^3$.

Počet kvádrů: $n = \frac{V}{V_0} = \frac{2470000}{1,05} = 2350000$.



Pro výpočet povrchu musíme určit výšku bočních stěn, použijeme vyznačený pravoúhlý trojúhelník.

$x^2 = 115^2 + 140^2\,\text{m}^2$

$x = 181\,\text{m}$

Plocha bočních stěn: $S = 4S_1 = 4\cdot\frac{a\cdot x}{2} = 2ax = 2\cdot 230\cdot 181\,\text{m}^2 = 83260\,\text{m}^2$.

Počet desek: $n = \frac{S}{S_0} = \frac{83260}{0,5} = 166520$.

Na stavbu Cheopsovy pyramidy bylo potřeba 2350000 kamenných kvádrů, na vnější obložení 166520 mramorových desek. .

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je obkládání pyramidy i ze spodu. Stačí se žáků zeptat, jak by pyramidu obložili.

Př. 2: Betonový podstavec dočasné dopravní značky má tvar komolého jehlanu se čtvercovými podstavami o stranách 20 cm a 15 cm. Urči hmotnost podstavce, jestliže má hustotu $2400\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ a výšku 10 cm.

Objem podstavce: $V=\frac{v}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$.

Dosadíme: $S_1=a^2$, $S_2=b^2$

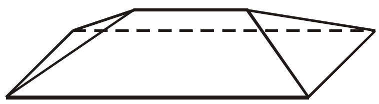
$$V=\frac{v}{3}\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)=\frac{v}{3}\left(a^2+\sqrt{a^2b^2}+b^2\right)=\frac{v}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$V=\frac{v}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)=\frac{0,1}{3}\left(0,2^2+0,2\cdot 0,15+0,15^2\right)\mathrm{m}^3=0,00308\,\mathrm{m}^3$$

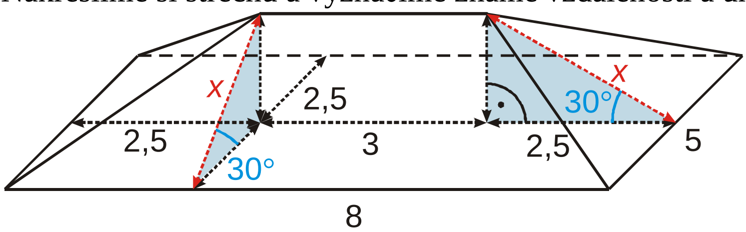
$$m=V\rho=0,00308\cdot 2400\,\mathrm{kg}=7,4\,\mathrm{kg}$$

Podstavec dopravní značky má hmotnost 7,4 kg,

Př. 3: Pro přístřešek na automobil je nutné pokrýt valbovou střechu (viz. obrázek) s obdélníkovým průřezem 8 m x 5 m. Všechny střešní plochy mají stejný sklon $30°$. Urči cenu a hmotnost střechy. $1\,\mathrm{m}^2$ střechy stojí 270 Kč a váží 43 kg.



Střecha se skládá ze čtyř ploch: dvou shodných lichoběžníků a dvou shodných trojúhelníků. Nakreslíme si střechu a vyznačíme známé vzdálenosti a úhly.



Pro výpočet obsahu obou ploch musíme znát vyznačenou vzdálenost *x*.

$$\cos 30°=\frac{2,5}{x}\ \Rightarrow\ x=\frac{2,5}{\cos 30°}.\qquad (x=2,89\,\mathrm{m})$$

Lichoběžníková plocha: $S_1=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{(8+3)}{2}\cdot\frac{2,5}{\cos 30°}\mathrm{m}^2=15,9\,\mathrm{m}^2$.

Trojúhelníková plocha: $S_1=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2,5}{\cos 30°}\mathrm{m}^2=7,2\,\mathrm{m}^2$.

Plocha střechy: $S=2S_1+2S_2=2\cdot 15,9+2\cdot 7,2\,\mathrm{m}^2=46,2\,\mathrm{m}^2$.

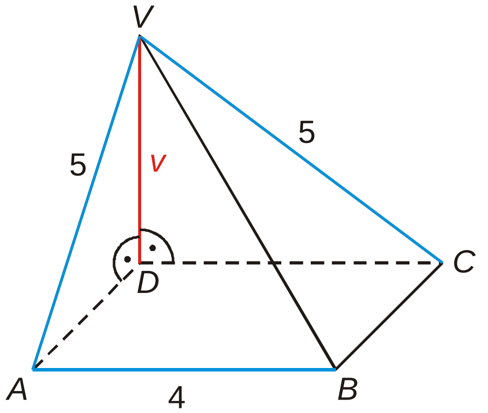
Cena střechy: $46,2\cdot 270\,\mathrm{Kč}=12\,474\,\mathrm{Kč}$

Hmotnost střechy: $46,2\cdot 43\,\mathrm{kg}=1997\,\mathrm{kg}$

Pedagogická poznámka: Hlavním problémem je nakreslení obrázku, je třeba ho provést před třídou na tabuli.

Př. 4: Kosý jehlan se čtvercovou podstavou o délce hrany $a = 4$ jednu z bočních hran kolmou k podstavě. Délka dvou bočních hran o stejné délce je $b = 5$. Urči objem a obsah jehlanu.

I pro kosý jehlan platí vzorec $V = \frac{1}{3} S_p v$.



Výšku jehlanu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku *CDV* (*ADV*):

$b^2 = a^2 + v^2 \Rightarrow v = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} a^2 v = \frac{1}{3} 4^2 3 = 16$.

Povrch jehlanu:

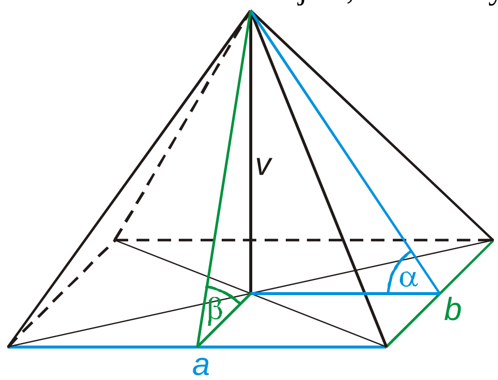
- podstava: $S_p = a^2 = 4^2 = 16$,
- shodné pravoúhlé trojúhelníky *CDV* (*ADV*): $S_1 = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$,

  shodné pravoúhlé trojúhelníky *ABV* (*BCV*): $S_2 = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

$P = S_p + 2S_1 + 2S_2 = 16 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 48$

Př. 5: Jehlan s obdélníkovou podstavou má výšku $15\,\text{cm}$. Jeho boční stěny svírají s podstavou úhly $\alpha = 56°19'$ a $\beta = 61°56'$. Urči jeho objem.

Pokud chceme určit objem, musíme vypočíst délky stran.



Z obrázku je zřejmé, že pro každou stranu najdeme patřičný pravoúhlý trojúhelník.

Modrý trojúhelník: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{2v}{a} \Rightarrow a = \frac{2v}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 \cdot 15}{\operatorname{tg}(56°19')}\,\text{cm} = 20\,\text{cm}$.

Zelený trojúhelník: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v}{\frac{b}{2}} = \dfrac{2v}{b} \Rightarrow b = \dfrac{2v}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{2\cdot 15}{\operatorname{tg}(61°56')}\,\text{cm} = 16\,\text{cm}$.

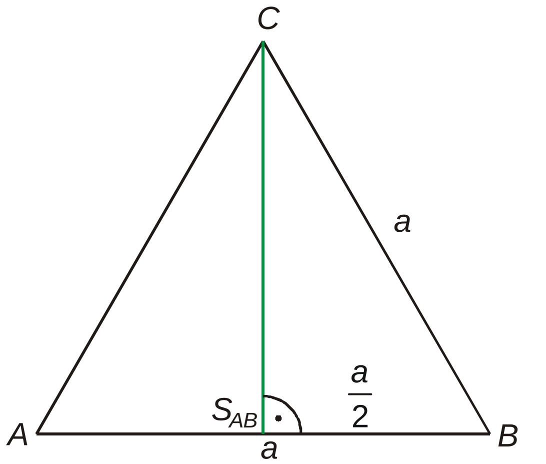
Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}abv = \frac{1}{3}20\cdot 16\cdot 15\,\text{cm}^3 = 1600\,\text{cm}^3$.

Zadaný jehlan má objem $1600\,\text{cm}^3$.

Př. 6: Odvoď vzorec pro výpočet objemu a povrchu pravidelného čtyřstěnu.

Pravidelný čtyřstěn: všechny stěny rovnostranné trojúhelníky.

Obsah trojúhelníku: $S = \dfrac{a\cdot v_a}{2} \Rightarrow$ musíme určit výšku.



Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

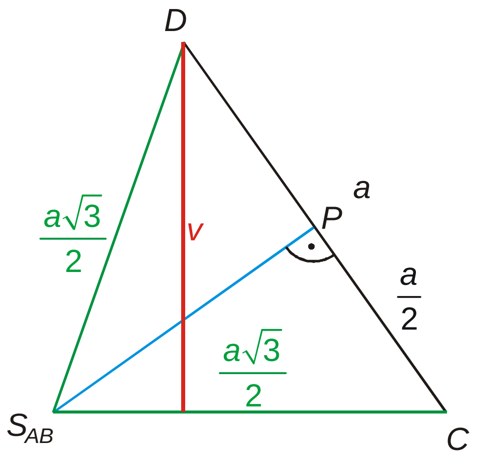
$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Obsah podstavy: $S = \dfrac{a\cdot v_a}{2} = \dfrac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Povrch čtyřstěnu: $P = 4S = 4\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Čtyřstěn je jehlanem $\Rightarrow$ $V = S_p v$ $\Rightarrow$ určujeme výšku jehlanu, například pomocí trojúhelníku CDS_{AB}.



Délku výšky $S_{AB}P$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}CP$:

$$|S_{AB}P|^2 = |S_{AB}C|^2 - |CP|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}P|^2 = \frac{3a}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$|S_{AB}P| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Nyní použijeme vzorec pro obsah trojúhelníka.

$S = \dfrac{a\cdot v_a}{2} = \dfrac{b\cdot v_b}{2} \Rightarrow a\cdot v_a = b\cdot v_b$

Konkrétně: $\left|S_{AB}C\right| \cdot v = \left|CD\right|\left|S_{AB}P\right| \Rightarrow v = \frac{\left|CD\right|\left|S_{AB}P\right|}{\left|S_{AB}C\right|} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a}{a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Objem čtyřstěnu: $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Př. 7: Petáková:
strana 96, cvičení 54
strana 96, cvičení 60
strana 96, cvičení 61
strana 97, cvičení 63

Shrnutí: