

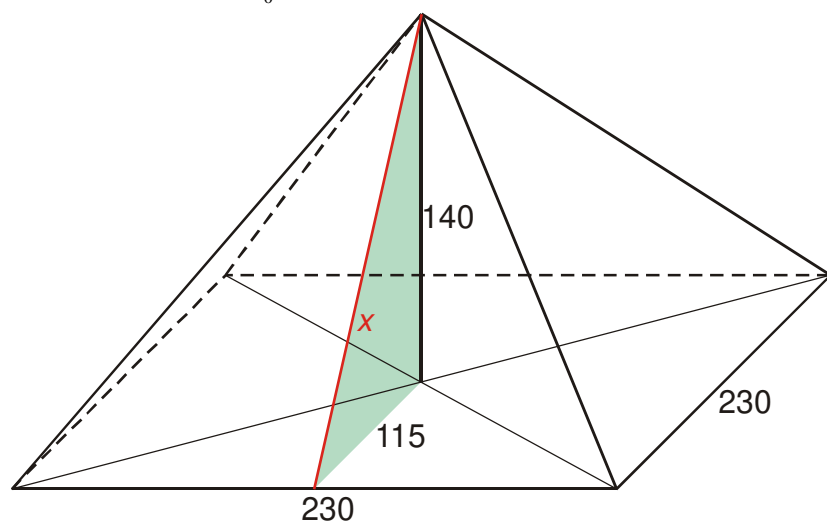
5.4.3 Objemy a povrchy mnohostěů II

Předpoklady: 5402

Př. 1: Cheopsova pyramida má tvar pravidelného čtyřbokého jehlanu o základně 230 m a výšce 140 m. Kolik kamenných kvádrů o objemu $1,05 \text{ m}^3$ bylo potřeba na její stavbu? Kolik mramorových desek o ploše $0,5 \text{ m}^2$ by bylo potřeba na její vnější obložení?

$$\text{Objem: } V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} a^2 v = \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 140 \text{ m}^3 = 2470000 \text{ m}^3.$$

$$\text{Počet kvádrů: } n = \frac{V}{V_0} = \frac{2470000}{1,05} = 2350000.$$



Pro výpočet povrchu musíme určit výšku bočních stěn, použijeme vyznačený pravouhlý trojúhelník.

$$x^2 = 115^2 + 140^2 \text{ m}^2$$

$$x = 181 \text{ m}$$

$$\text{Plocha bočních stěn: } S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{a \cdot x}{2} = 2ax = 2 \cdot 230 \cdot 181 \text{ m}^2 = 83260 \text{ m}^2.$$

$$\text{Počet desek: } n = \frac{S}{S_0} = \frac{83260}{0,5} = 166520.$$

Na stavbu Cheopsovy pyramidy bylo potřeba 2350000 kamenných kvádrů, na vnější obložení 166520 mramorových desek.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je obkládání pyramidy i zespodu. Stačí se žáků zeptat, jak by pyramidu obložili.

Př. 2: Betonový podstavec dočasné dopravní značky má tvar komolého jehlanu se čtvercovými podstavami o stranách 20 cm a 15 cm. Urči hmotnost podstavce, jestliže má hustotu $2400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a výšku 10 cm.

$$\text{Objem podstavce: } V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

$$\text{Dosadíme: } S_1 = a^2, S_2 = b^2$$

$$V = \frac{v}{3} (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) = \frac{v}{3} (a^2 + \sqrt{a^2 b^2} + b^2) = \frac{v}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

$$V = \frac{v}{3} (a^2 + ab + b^2) = \frac{0,1}{3} (0,2^2 + 0,2 \cdot 0,15 + 0,15^2) \text{ m}^3 = 0,00308 \text{ m}^3$$

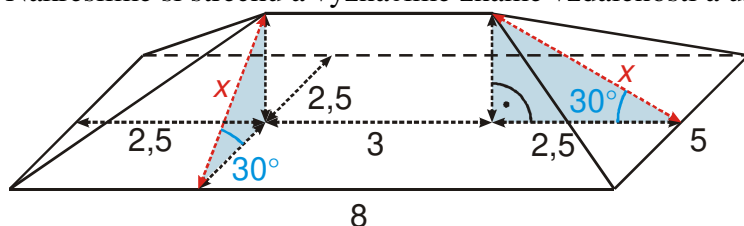
$$m = V \rho = 0,00308 \cdot 2400 \text{ kg} = 7,4 \text{ kg}$$

Podstavec dopravní značky má hmotnost 7,4 kg,

Př. 3: Pro přístřešek na automobil je nutné pokrýt valbovou střechu (viz. obrázek) s obdélníkovým průřezem 8 m x 5 m. Všechny střešní plochy mají stejný sklon 30° . Urči cenu a hmotnost střechy. 1 m^2 střechy stojí 270 Kč a váží 43 kg.



Střecha se skládá ze čtyř ploch: dvou shodných lichoběžníků a dvou shodných trojúhelníků. Nakreslíme si střechu a vyznačíme známé vzdálenosti a úhly.



Pro výpočet obsahu obou ploch musíme znát vyznačenou vzdálenost x .

$$\cos 30^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5}{\cos 30^\circ}. \quad (x = 2,89 \text{ m})$$

$$\text{Lichoběžníková plocha: } S_1 = \frac{(a+c)v}{2} = \frac{(8+3)}{2} \cdot \frac{2,5}{\cos 30^\circ} \text{ m}^2 = 15,9 \text{ m}^2.$$

$$\text{Trojúhelníková plocha: } S_2 = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2,5}{\cos 30^\circ} \text{ m}^2 = 7,2 \text{ m}^2.$$

$$\text{Plocha střechy: } S = 2S_1 + 2S_2 = 2 \cdot 15,9 + 2 \cdot 7,2 \text{ m}^2 = 46,2 \text{ m}^2.$$

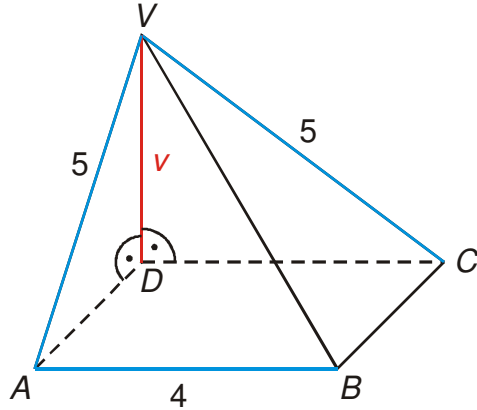
$$\text{Cena střechy: } 46,2 \cdot 270 \text{ Kč} = 12474 \text{ Kč}$$

$$\text{Hmotnost střechy: } 46,2 \cdot 43 \text{ kg} = 1997 \text{ kg}$$

Pedagogická poznámka: Hlavním problémem je nakreslení obrázku, je třeba ho provést před třídou na tabuli.

Př. 4: Kosý jehlan se čtvercovou podstavou o délce hrany $a = 4$ má jednu z bočních hran kolmou k podstavě. Délka dvou bočních hran o stejné délce je $b = 5$. Urči objem a obsah jehlanu.

I pro kosý jehlan platí vzorec $V = \frac{1}{3} S_p v$.



Výšku jehlanu můžeme určit z pravoúhlého trojúhelníku CDV (ADV):

$$b^2 = a^2 + v^2 \Rightarrow v = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\text{Objem jehlanu: } V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} a^2 v = \frac{1}{3} 4^2 3 = 16.$$

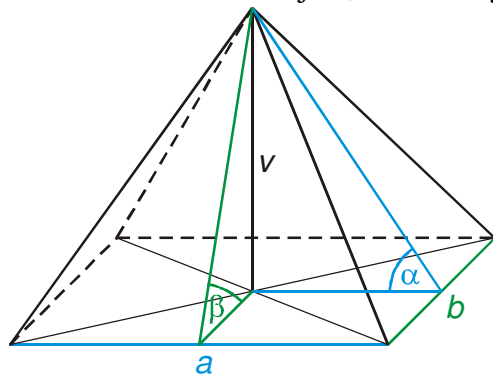
Povrch jehlanu:

- podstava: $S_p = a^2 = 4^2 = 16$,
- shodné pravoúhlé trojúhelníky CDV (ADV): $S_1 = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$,
- shodné pravoúhlé trojúhelníky ABV (BCV): $S_2 = \frac{ab}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$.

$$P = S_p + 2S_1 + 2S_2 = 16 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 48$$

Př. 5: Jehlan s obdélníkovou podstavou má výšku 15 cm. Jeho boční stěny svírají s podstavou úhly $\alpha = 56^\circ 19'$ a $\beta = 61^\circ 56'$. Urči jeho objem.

Pokud chceme určit objem, musíme vypočítat délky stran.



Z obrázku je zřejmé, že pro každou stranu najdeme příslušný pravoúhlý trojúhelník.

$$\text{Modrý trojúhelník: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{\frac{a}{2}} = \frac{2v}{a} \Rightarrow a = \frac{2v}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \cdot 15}{\operatorname{tg}(56^\circ 19')} \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

Zelený trojúhelník: $\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{\frac{b}{2}} = \frac{2v}{b} \Rightarrow b = \frac{2v}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot 15}{\operatorname{tg}(61^\circ 56')} \text{ cm} = 16 \text{ cm}.$

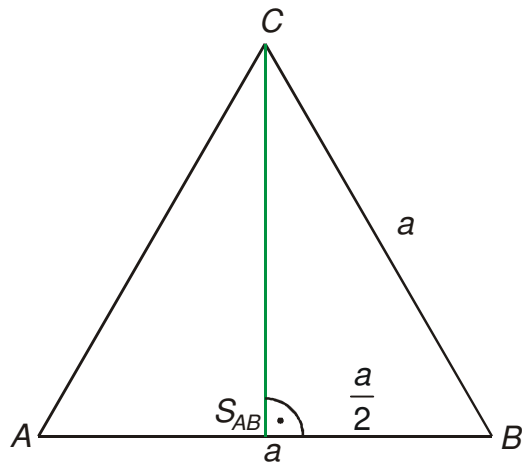
Objem jehlanu: $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} abv = \frac{1}{3} 20 \cdot 16 \cdot 15 \text{ cm}^3 = 1600 \text{ cm}^3.$

Zadaný jehlan má objem $1600 \text{ cm}^3.$

Př. 6: Odvod' vzorec pro výpočet objemu a povrchu pravidelného čtyřstěnu.

Pravidelný čtyřstěn: všechny stěny rovnostranné trojúhelníky.

Obsah trojúhelníku: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow$ musíme určit výšku.



Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

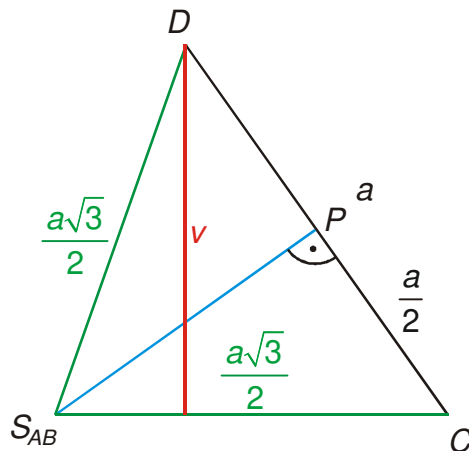
$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}.$$

Obsah podstavy: $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Povrch čtyřstěnu: $P = 4S = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$

Čtyřstěn je jehlanem $\Rightarrow V = S_p v \Rightarrow$ určujeme výšku jehlanu, například pomocí trojúhelníku $CDS_{AB}.$



Délku výšky $S_{AB}P$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}CP$:

$$|S_{AB}P|^2 = |S_{AB}C|^2 - |CP|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}P|^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$|S_{AB}P| = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Nyní použijeme vzorec pro obsah trojúhelníka.

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

Konkrétně: $|S_{AB}C| \cdot v = |CD||S_{AB}P| \Rightarrow v = \frac{|CD||S_{AB}P|}{|S_{AB}C|} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a}{a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Objem čtyřstěnu: $V = \frac{1}{3} S_p v = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Př. 7: Petáková:

strana 96, cvičení 54

strana 96, cvičení 60

strana 96, cvičení 61

strana 97, cvičení 63

Shrnutí: