

## 5.4.5 Rotační tělesa

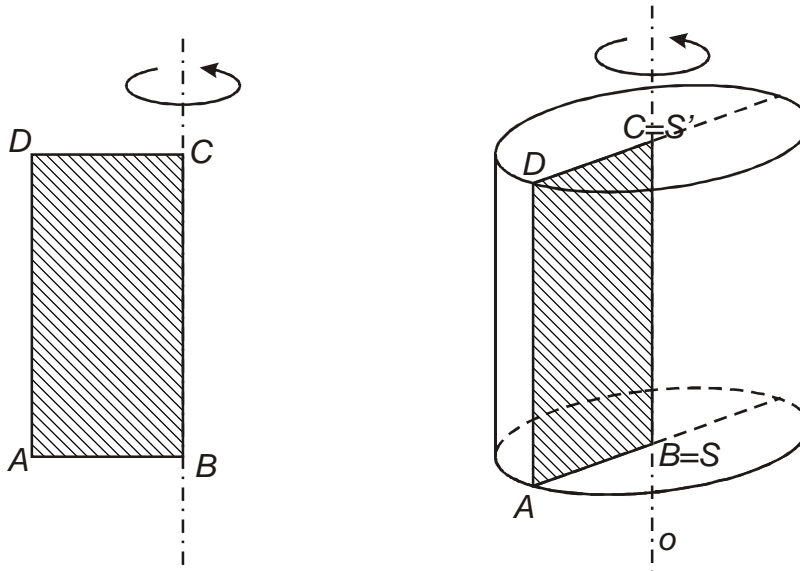
**Předpoklady:** 050402

**Pedagogická poznámka:** Tuto hodinu nechávám většinou na samostudium.

Mnohostěny: "hraná" tělesa vzniklá jako průniky poloprostorů  $\Rightarrow$  tělesa bez ostrých hran musíme vytvořit jinak.

Jedno z nejjednodušších oblých těles - **rotační válec** vznikne rotací obdélníku (případně čtverce) kolem jedné z jeho stran.

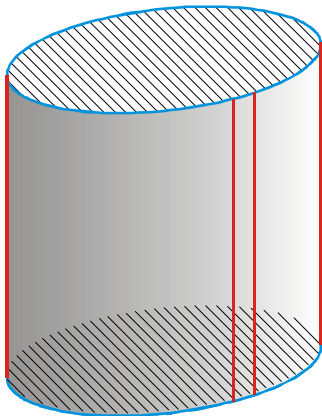
**Př. 1:** Na obrázku nakreslen obdélník  $ABCD$  a rotační válec, který vznikl jeho rotací kolem osy procházející stranou  $BC$ . Vyjádři výšku a průměr válce pomocí stran obdélníku  $ABCD$ .



Výška válce  $v = |BC|$ ,  $d = 2 \cdot |AB|$ .

- Př. 2:** Načrtni obrázek válce a v něm:  
 a) vytáhni modře podstavné hrany,  
 c) vystínuj šedě plášť,

- b) vyšrafuj obě podstavy,  
 d) červeně vytáhni alespoň čtyři strany.



Strany rotačního válce jsou jednotlivými polohami rotující strany původního obdélníku.

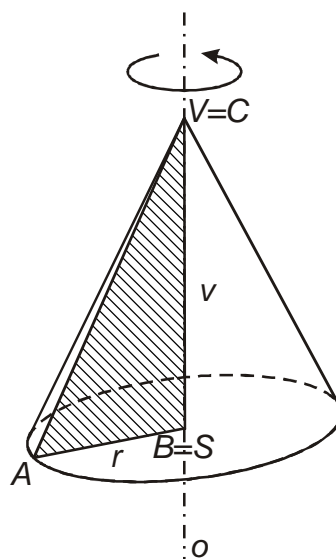
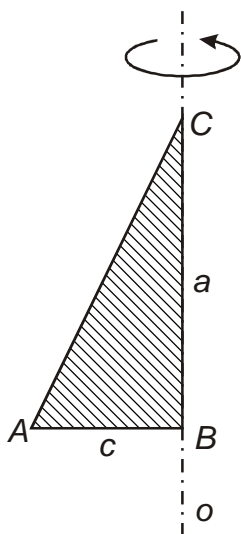
**Pedagogická poznámka:** Jediným problémem jsou strany, ale když žáky chvíli necháte, dojde jim, že mnoho jiných rozumných možností nezůstává.

- Př. 3:** Rotační válcová plocha je množinou všech bodů v prostoru, které mají od dané přímky stejnou vzdálenost různou od nuly. Jak souvisí rotační válcová plocha s rotačním válcem? Odhadni význam termínu rotační válcový prostor.

**Rotační válcová plocha** je obdobou  $n$ -boké hranolové plochy  $\Rightarrow$  vznikne z pláště rotačního válce, když jeho strany prodloužíme na přímky.

**Rotační válcový prostor** je část prostoru ohraničená rotační válcovou plochou.

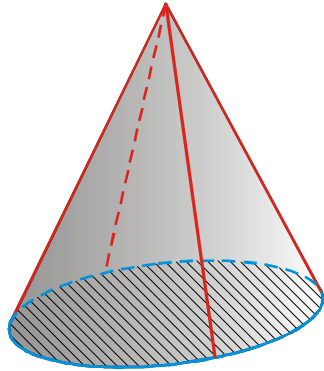
- Př. 4:** Načrtni obrázek rotačního kužele a vedle něj rovinného útvaru, jehož rotací kužel vznikne. Jak souvisí výška a průměr kužele s rozměry tohoto útvaru.



Rotační kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku okolo jedné z jeho odvěsen. V našem případě platí je průměr kužele je roven dvojnásobku délky odvěsny  $c$  a výška je rovna délce odvěsny  $a$ .

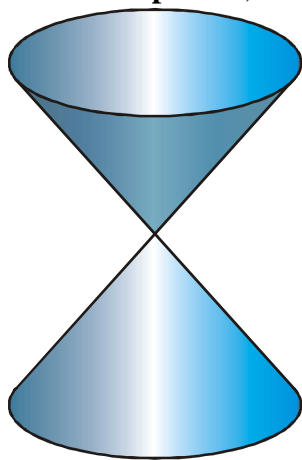
**Př. 5:** V obrázku kužele:

- a) vytáhni modře podstavou hranu,      b) vyšrafuj podstavu,  
c) vystínuj šedě plášť,                      d) červeně vytáhni alespoň čtyři strany.



Strany rotačního kužele jsou jednotlivými polohami rotující přepony (třetí strany) původního trojúhelníku.

Stejně jako u rotačního válce i u rotačního kužele můžeme prodloužením stran získat **rotační kuželovou plochu**, která ohraničuje **rotační kuželový prostor**.



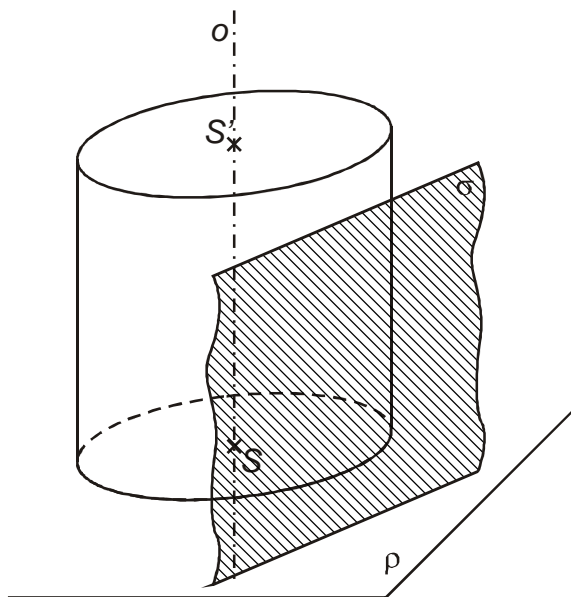
U rotačních těles se občas zabýváme vzájemnou polohou tělesa a roviny.

**Př. 6:** Kolik společných bodů může mít s rotačním válcem rovina rovnoběžná s jeho osou (směrová rovina)? Nakresli obrázky jednotlivých možností. Navrhni jejich pojmenování.

Tři možnosti.

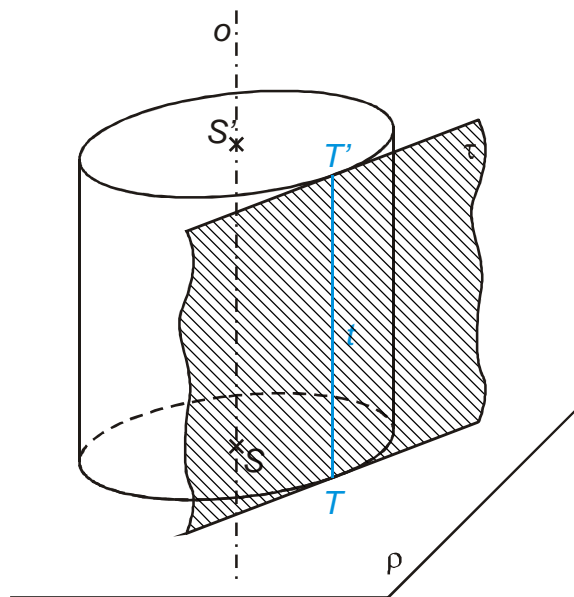
Rovina nemá s válcem žádný společný bod.

Rovina má s válcem společnou přímku.

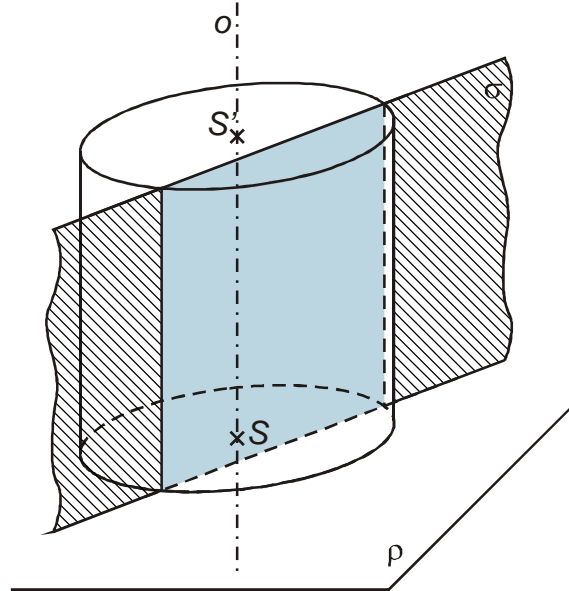


**Vnější rovina válce**

Rovina má s válcem společný obdélník (případně čtverec).



**Tečná rovina válce**



**Sečná rovina válce**

Vztah mezi rovinou a válcem velmi připomíná vztahy mezi přímkou a kružnicí.

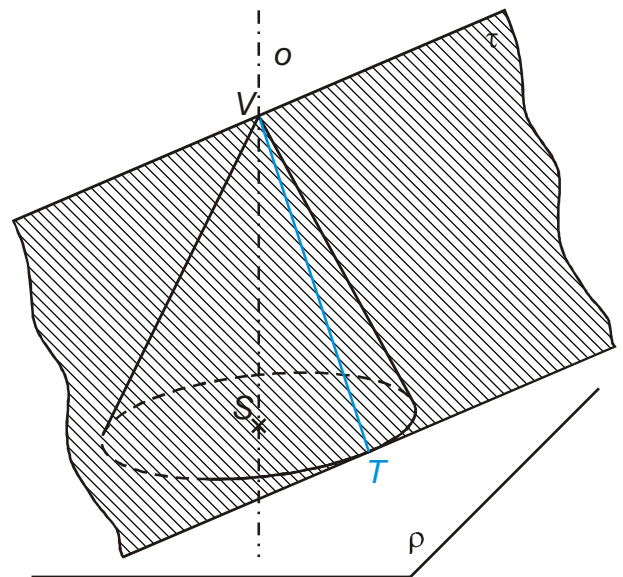
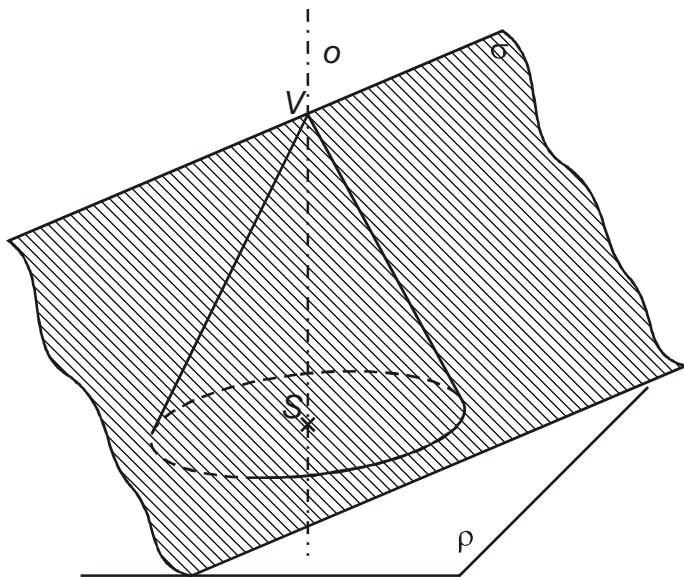
**Př. 7:** Které roviny můžeme vzhledem k rotačnímu kuželu označovat jako vrcholové?  
Kolik možností pro vzájemnou polohu kužele a kuželové plochy existuje?

**Vrcholová rovina** prochází vrcholem kuželu.

Podobně jako u válce a jeho směrové roviny existují u kužele a vrcholové roviny tři možnosti.

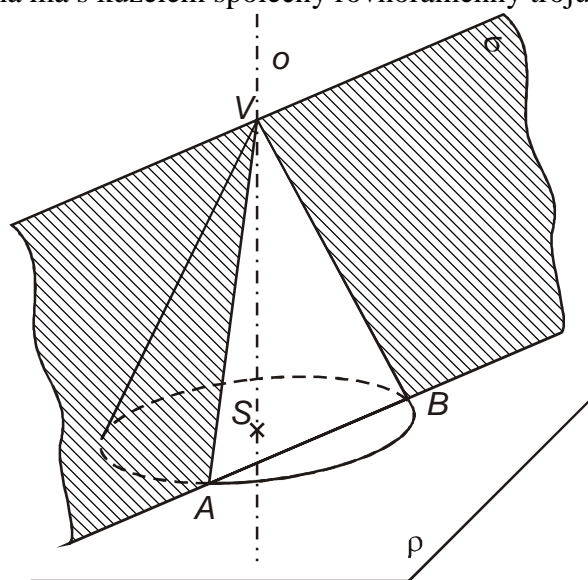
Rovina má s kuželem jeden společný bod (vrchol).

Rovina má s kuželem společnou přímku.



**Tečná rovina kuželu**

Rovina má s kuželem společný rovnoramenný trojúhelník.

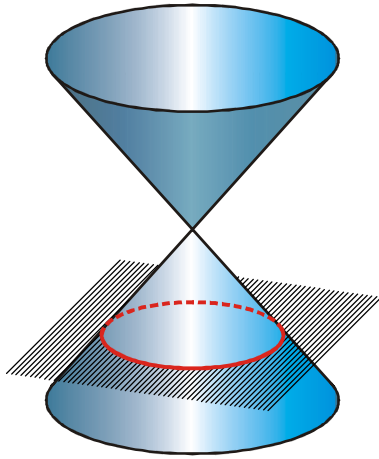


**Sečná rovina kuželu**

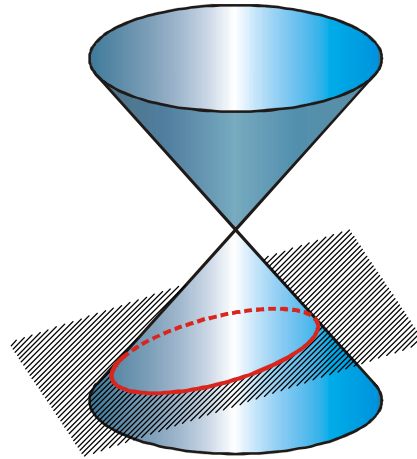
Nesměrové řezy válcové plochy a nevrcholové řezy kuželové plochy jsou v matematice velmi důležité křivky - kuželosečky.

**Kružnice**

**Elipsa** („rozšlápnutá kružnice“, „ovál“)



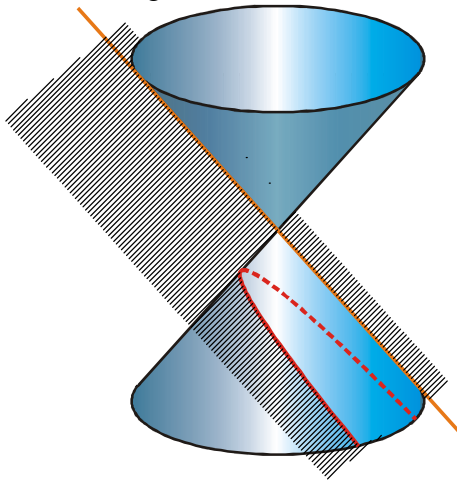
Sečná rovina je kolmá k ose kuželové plochy.



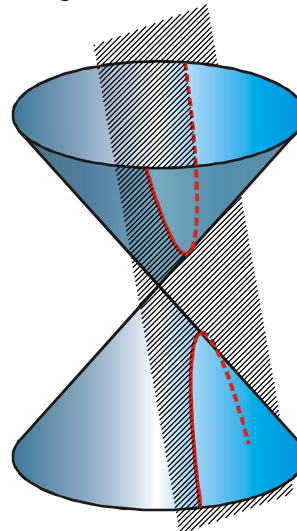
Sečná rovina není kolmá na osu, ale svírá s ní větší úhel než strana kuželové plochy.

**Parabola** (graf kvadratické funkce)

**Hyperbola** (graf lineární lomené funkce)



Sečná rovina je rovnoběžná se stranou kuželové plochy



Sečná rovina svírá s osou kuželové plochy menší úhel než strana.

**Př. 8:** Pokus se vysvětlit následující termíny: a) osový řez      b) rovnostranný válec,  
c) rovnostranný kužel.

a) osový řez - řez jdoucí osou rotačního tělesa.

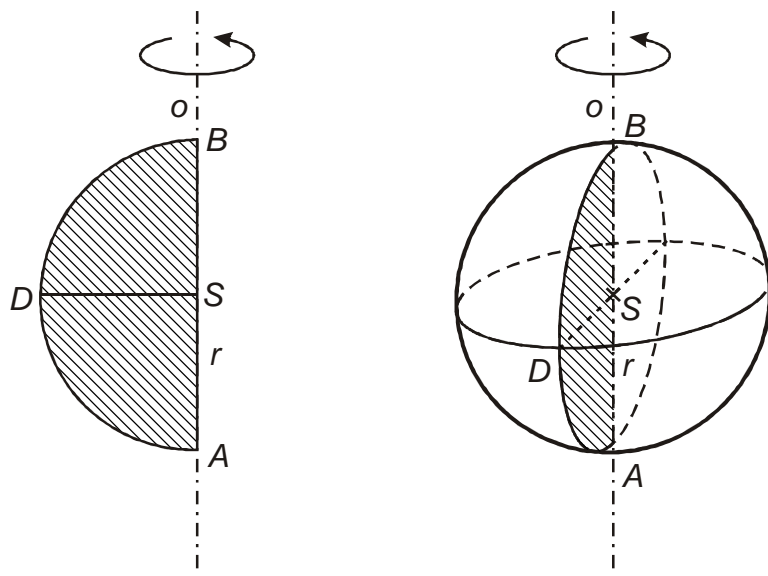
b) rovnostranný válec - válec jehož osový řez je čtverec (výška válce se rovná průměru podstavy)

c) rovnostranný kužel - kužel jehož osový řez je rovnostranný trojúhelník (strany kužele jsou rovny průměru podstavy)

**Př. 9:** Načrtni obrázek

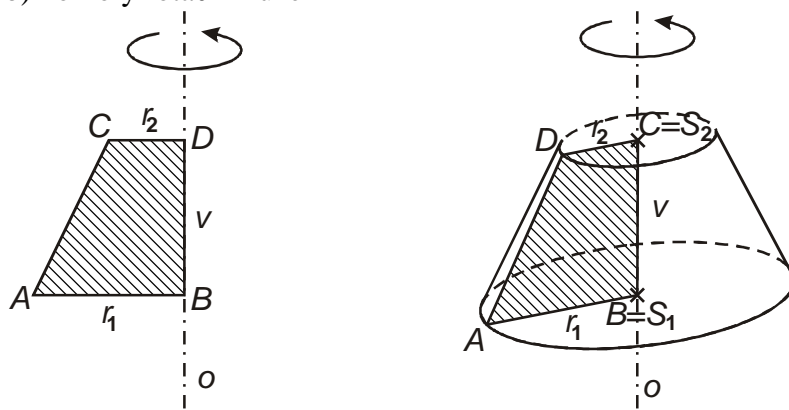
a) koule,      b) komolého rotačního kužele      c) anuloidu (torusu).  
Ke každému obrázku načrtni ještě rovinný útvar jehož rotací těleso vzniklo.

a) koule



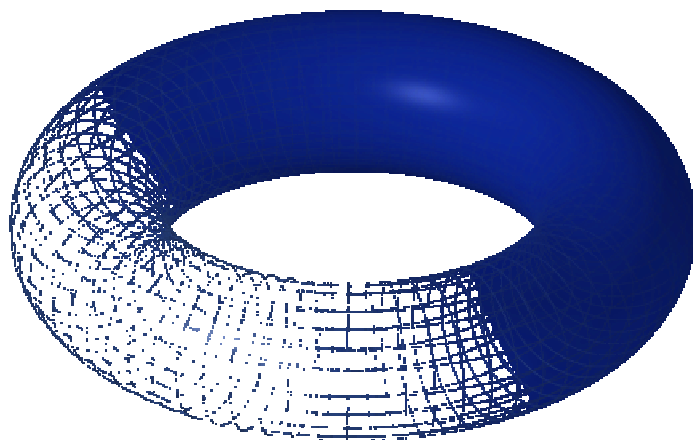
Koule vznikne rotací půlkruhu okolo osy procházející jeho průměrem. Střed půlkruhu  $S$  je středem koule a poloměr půlkruhu  $r$  je poloměrem koule.

b) komolý rotační kužel



Komolý kužel vznikne rotací pravoúhlého lichoběžníka kolem osy, která prochází jeho kratším ramenem.

c) anuloid (torus)



Anuloid vznikne rotací kruhu okolo osy, která leží v rovině kruhu a přitom ho neprotíná.

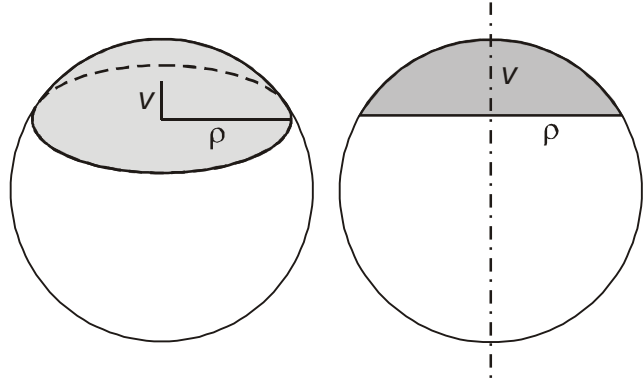
**Př. 10:** Najdi v tabulkách u vzorců pro povrchy a objemy náčrtky částí koule. Které z názvů označují povrchy, které části prostoru?

**Koule a plocha kulová**

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

Vrchlík, kulová úseč



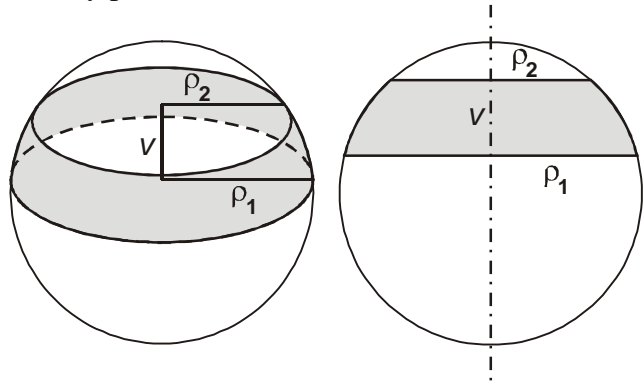
Obsah vrchlíku a kulového pásu

$$S = 2\pi r v$$

Objem kulové úseče

$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho^2 + v^2)$$

Kulový pás, kulová vrstva



Objem kulové vrstvy

$$V = \frac{\pi v}{6} (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$$

Vrchlík a kulový pás jsou povrchy (levé obrázky), kulová úseč a kulová vrstva jsou objemy.

**Pedagogická poznámka:** Tabulka je převzatá z Matematických, fyzikální a chemických tabulek pro střední školy. Interpretace není obtížná, ale vždy se najde někdo, kdo s ní má značné problémy.

**Shrnutí:** Terminologie rotačních těles má mnoho společného s terminologií mnohostěnů i se terminologií kružnic v rovině.