5.4.6 Objemy a povrchy rotačních těles I

Předpoklady: 050405

Pedagogická poznámka: Stejně jako u mnohostěnů i u rotačních těles se vzorce pro objemy a obsahy se neodvozují, žáci mohou využívat tabulky a cílem hodin je, aby se s nimi naučili pracovat (není to samozřejmé a správné použití vzorce už vyžaduje určitou míru orientace).

Pedagogická poznámka: U většiny příkladů jsou udávány v závorkách i hodnoty mezivýsledků kvůli snazší kontrole u studentů, kteří obecné odvozování nezvládají.

Všechny následující příklady řeš s pomocí tabulek. Pokud se setkáš s novým (neznámým) vzorcem, zapiš si jej a nakresli si obrázek daného tělesa (uživatelé internetové učebnice najdou vzorce v předchozí hodině).

Př. 1: Vodojem kulového tvaru je naplněn z jedné poloviny svého objemu a obsahuje $15\,\mathrm{m}^3$ vody. Urči jeho poloměr. Jaký je povrch vodojemu? Kolik bude stát jeho natření barvou, jestliže 4,5 kg barvy o vydatnosti $6\,\mathrm{m}^2$ /1 kg stojí 780 Kč.

Objem vodojemu $V = 2\cdot 15\,\mathrm{m}^3 = 30\,\mathrm{m}^3$.

Z objemu vypočteme *r*: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 30}{4\pi}}\,\mathrm{m} = 1{,}93\,\mathrm{m}$.

Povrch vodojemu: $S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)^2 = \sqrt[3]{4^3\pi^3\frac{3^2V^2}{4^2\pi^2}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}\,\sqrt[3]{36\pi\cdot 30^2}\,\mathrm{m}^2 = 46{,}7\,\mathrm{m}^2$.

Přímá úměrnost: 1 kg … $6\,\mathrm{m}^2$

x kg … $46{,}7\,\mathrm{m}^2$

$\frac{x}{46{,}7} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{46{,}7}{6} = 7{,}8\,\mathrm{kg}$

$\Rightarrow$ Na natření vodojemu budeme potřebovat 2 plechovky barvy za 1560 Kč.

4,5 kg barvy stojí 780 Kč $\Rightarrow$ 1 kg barvy stojí $\frac{780}{4{,}5} = 173\,\text{Kč}$

Cena za 7,8 kg barvy: $x = 173\cdot 7{,}8 = 1349\,\text{Kč}$

Vodojem má poloměr 1,93m, jeho povrch je $46{,}7\,\mathrm{m}^2$, barva na jeho natření bude stát 1560 Kč (1349 Kč pokud počítáme cenu spotřebované barvy).

Pedagogická poznámka: Největší problémy mají žáci s rozšifrováním věty 4,5 kg barvy o vydatnosti $6\,\mathrm{m}^2$ /1 kg stojí 780 Kč.

Př. 2: Urči objem zahradního sudu na vodu o průměru 70 cm a výšce 120 cm. Jakou průměrnou tloušťku má ocelový plech, ze kterého je vyroben, pokud prázdný sud váží 30 kg.

Hustota oceli: $7800\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Sud = válec bez horní podstavy.

Poloměr podstavy $r = \frac{d}{2} = 35\,\mathrm{cm} = 0{,}35\,\mathrm{m}$.

$V = \pi r^2 v = \pi \cdot 0{,}35^2 \cdot 1{,}2\,\mathrm{m}^3 = 0{,}46\,\mathrm{m}^3$

Tloušťka plechu $\Rightarrow$ objem plechu (zjistíme z hmotnosti sudu) získáme jako součin povrchu sudu (podstavu počítáme pouze jednou) a tloušťky plechu.

$V_p = \frac{m}{\rho}$ $\qquad (3{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3)$

$S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + 2\pi r v = \pi r\left(r + 2v\right)$ $\qquad (3{,}02\,\mathrm{m}^2)$

Tloušťka plechu: $V_p = S \cdot d \Rightarrow d = \frac{V_p}{S}$.

$$d = \frac{V_p}{S} = \frac{\frac{m}{\rho}}{\pi r\left(r+2v\right)} = \frac{m}{\rho \pi r\left(r+2v\right)}$$

Dosadíme: $d = \frac{m}{\rho\pi r\left(r+2v\right)} = \frac{12}{7800 \cdot \pi \cdot 0{,}35\left(0{,}35 + 2 \cdot 1{,}2\right)}\,\mathrm{m} = 1{,}27 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \doteq 1{,}3\,\mathrm{mm}$.

Zahradní sud má objem $0{,}46\,\mathrm{m}^3$. Je vyroben z plechu o tloušťce 1,3 mm.

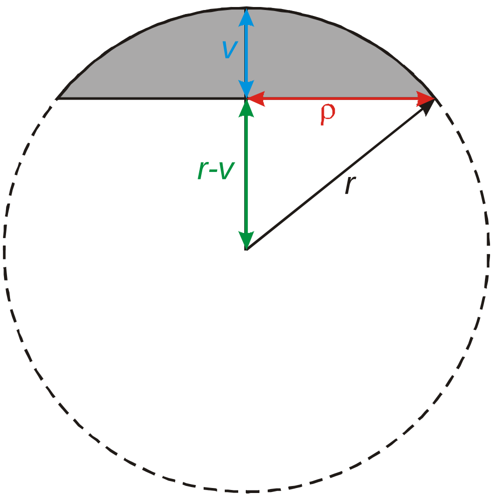
Pedagogická poznámka: Na nápad s vypočtením tloušťky plechu a objemu plechu a povrchu válce většina studentů nepřijde. Téměř jistě se pak najde někdo, kdo pomotá objem válce s objemem plechu.p

Př. 3: Jeden z artefaktů zdobících prostranství před strakonickou školou Dukelská má tvar kulové úseče vyseknuté z koule o poloměru 80 cm. Úseč má výšku 30 cm. Spočti její objem a povrch jejího vrchlíku.

Z tabulek vidíme, že povrch vrchlíku můžeme určit ze zadaných hodnot:

$S = 2\pi r v = 2\pi \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3\,\mathrm{m}^2 = 1{,}51\,\mathrm{m}^2$

Pro výpočet objemu úseče musíme zjistit její poloměr.



Z obrázku je zřejmé, že platí: $r^2 = (r-v)^2 + \rho^2$.

$\rho^2 = r^2 - (r-v)^2 = r^2 - (r^2 - 2rv + v^2) = 2rv - v^2 = v(2r-v)$

$\rho = \sqrt{v(2r-v)}$ ($\rho = 0{,}62\,\mathrm{m}$)

Dosadíme do vzorce pro objem:

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi v}{6}\left[3(2rv - v^2) + v^2\right] = \frac{\pi v}{6}\left[6rv - 3v^2 + v^2\right] = \frac{\pi v}{6}(6rv - 2v^2) =$$

$$= \frac{2\pi v^2}{6}(3r - v) = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$$

Dosadíme: $V = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v) = \frac{\pi \cdot 0{,}3^2}{3}(3 \cdot 0{,}8 - 0{,}3)\,\mathrm{m}^3 = 0{,}20\,\mathrm{m}^3$.

Pedagogická poznámka: Prvním problémem je interpretace proměnné ρ ve vzorci z tabulek. Žáky, kteří si neví rady, nejdříve nutím nakreslit obrázek.

Př. 4: Maminka připravuje pro svého potomka kornout na bonbony. Kornout má mít tvar kužele o výšce 50 cm a poloměru podstavy 10 cm. Jakou plochu papíru bude maminka potřebovat? Jaký tvar musí na čtvrtku nakreslit, aby po slepení získal přesně tvar kornoutu? Jaký objem bude kornout mít?

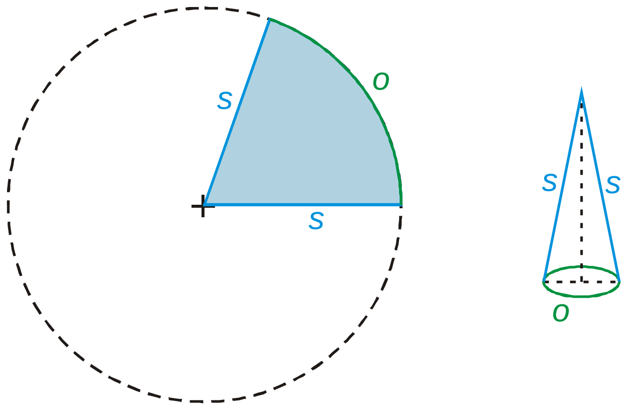
Kornout nemá čepici $\Rightarrow$ počítáme pouze plochu pláště.

$S_{pl} = \pi r s$

Strana kužele: $s^2 = r^2 + v^2 \Rightarrow s = \sqrt{r^2 + v^2}$

$S_{pl} = \pi r s = \pi r \sqrt{r^2 + v^2} = \pi \cdot 10\sqrt{10^2 + 50^2}\,\mathrm{cm}^2 = 1600\,\mathrm{cm}^2$

Tvar, který maminka vystřihne musí mít tvar kruhové výseče s poloměrem s a úhlem α.



$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{10^2 + 50^2} = 51\,\text{cm}$

Velikost úhlu α určíme z přímé úměry: $\dfrac{\textit{obvod výseče}}{\textit{obvod celé kružnice}} = \dfrac{\alpha}{360°}$

Obvod výseče je stejný jako obvod podstavy kužele.

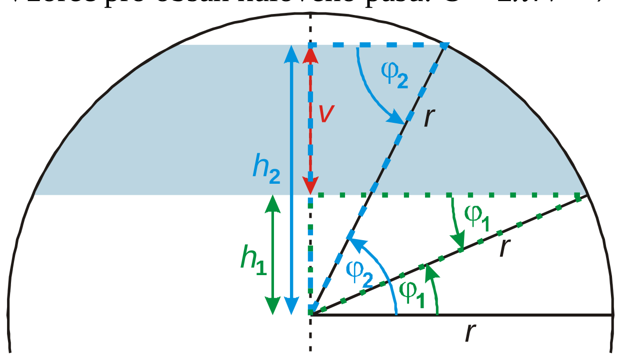
$\alpha = 360° \dfrac{\textit{obvod výseče}}{\textit{obvod celé kružnice}} = 360° \dfrac{2\pi r}{2\pi s} = 360° \dfrac{r}{s} = 360° \dfrac{10}{51} = 70°35'$

Objem kornoutu: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 50\,\text{cm}^3 = 5236\,\text{cm}^3$.

Pedagogická poznámka: Minimálně velikost úhlu je třeba spočítat u tabule.

Př. 5: Země má poloměr přibližně 6378 km. Urči plochu zemského povrchu ležícího v mírném pásmu (mezi obratníkem $\varphi_1 = 23°27'$ a polárním kruhem $\varphi_2 = 66°33'$). Kolik procent zemského povrchu mírný pás tvoří?

Vzorec pro obsah kulového pásu: $S = 2\pi r v \Rightarrow$ musíme určit výšku pásu.



Z obrázku je vidět, že platí: $v = h_2 - h_1$

Obě výšky spočítáme z vyznačených pravoúhlých trojúhelníků

$\sin\varphi_1 = \dfrac{h_1}{r} \Rightarrow h_1 = r\sin\varphi_1$ ($h_1 = 2538\,\text{km}$)

$\sin\varphi_2 = \dfrac{h_2}{r} \Rightarrow h_2 = r\sin\varphi_2$ ($h_2 = 5851\,\text{km}$)

$v = h_2 - h_1 = r\sin\varphi_2 - r\sin\varphi_1 = r(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$

$S = 2\pi r v = 2\pi r r(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) = 2\pi r^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) =$

$= 2\pi \cdot 6378^2 (\sin 63°33' - \sin 23°27')\,\text{km}^2 = 133000000\,\text{km}^2$

Celková plocha mírného pásu $2 \cdot 133000000\,\text{km}^2 = 266000000\,\text{km}^2$

Celková plocha Země: $S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6378^2\ \text{km}^2 = 511000000\,\text{km}^2$

Přímá úměrnost:

100% … 511000000

x% … 260000000

$$\frac{x}{266000000} = \frac{100}{511000000}$$

$$x = 266000000\frac{100}{511000000} = 52$$

Př. 6: Petáková:
strana 97, cvičení 64
strana 97, cvičení 74
strana 97, cvičení 78

Shrnutí: