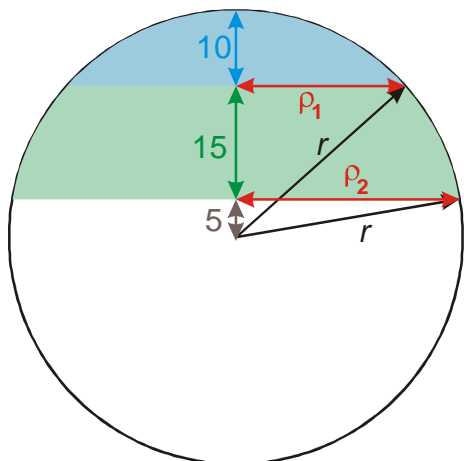


5.4.7 Objemy a povrchy rotačních těles II

Předpoklady: 050406

Př. 1: V legendárním filmu Kill Bill Volume One, při známé scéně v Domě modrých listů, kde Nevěsta (Beatrix Kiddo) rozseká 127 členů Šílené Osmaosmdesátky včetně osobních strážců O-Ren Ishii, porazí hlavní hrdinka také meloun kulového tvaru, který rozsekne dvěma vodorovnými seký svého meče od Hattori Hanza (zřejmý odkaz na způsob, kterým později zabije O-Ren Ishii). Vypočti, jaký objem melounu odsekne a podle svého známého výroku: „Můžete odejít, ale vaše údy tu nechte, náleží mě.“ si i odnese domů, pokud měl meloun průměr 60 cm a první sek šel 10 cm pod jeho špičkou, druhý pak o 15 cm níže.

Dva seký oddělí z melounu dvě části – kulovou úseč a kulovou vrstvu. Nakreslíme obrázek melounu.



Potřebujeme vypočítat poloměry ρ_1 a ρ_2 . Oba poloměry je možné vypočíst z odpovídajícího pravoúhlého trojúhelníku na obrázku:

$$\rho_1: \rho_1^2 = r^2 - 20^2 = 30^2 - 20^2 = 500 \Rightarrow \rho_1 = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

$$\rho_2: \rho_2^2 = r^2 - 5^2 = 30^2 - 5^2 = 875 \Rightarrow \rho_2 = \sqrt{875} = 5\sqrt{35}$$

Můžeme dosadit do vzorců:

$$\text{Kulová úseč: } V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \frac{\pi \cdot 10}{6} \left[3(10\sqrt{5})^2 + 10^2 \right] \text{ cm}^3 = 8377 \text{ cm}^3 = 8,4 \text{ dm}^3$$

Kulová vrstva:

$$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2) = \frac{\pi \cdot 15}{6} \left[3(10\sqrt{5})^2 + 3(5\sqrt{35})^2 + 15^2 \right] \text{ cm}^3 = 34165 \text{ cm}^3 \doteq 34,1 \text{ dm}^3$$

Beatrix Kiddo si odnese domů celkem 42,5 litru melounu.

Př. 2: Plastový pivní kelímek má tvar komolého kužele o poloměrech podstav 4 cm a 5 cm a výšce 8 cm. Urči jeho skutečný objem, pokud je zcela zaplněný.

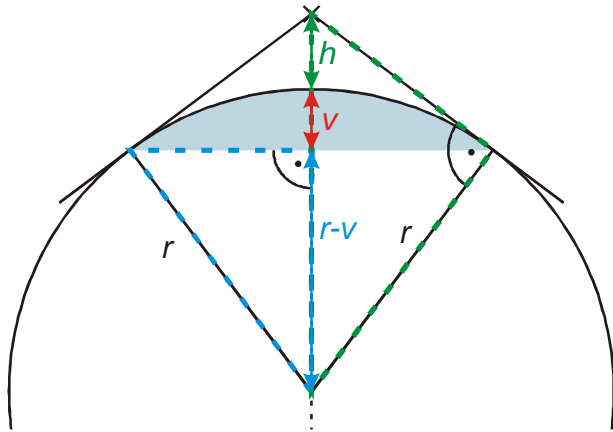
$$\text{Vzorec pro objem komolého rotačního kužele: } V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

$$\text{Dosadíme: } V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3}(5^2 + 5 \cdot 4 + 4^2) \text{ cm}^3 = 511 \text{ cm}^3$$

Zcela zaplněný plastový pivní kelímek má objem 511 cm^3 .

Př. 3: Jaká část zemského povrchu je vidět z orbitální stanice ISS ve výšce 360 km nad povrchem Země?

Nakreslíme obrázek situace.



Viditelná část zemského povrchu tvoří vrchlík \Rightarrow potřebujeme určit jeho výšku.

Na obrázku jsou vyznačeny dva podobné pravoúhlé trojúhelníky, z jejich podobnosti platí:

$$\frac{r-v}{r} = \frac{r}{r+h}$$

$$r-v = \frac{r^2}{r+h}$$

$$v = r - \frac{r^2}{r+h}$$

$$\text{Dosadíme: } v = r - \frac{r^2}{r+h} = 6378 - \frac{6378^2}{6378+360} \text{ km} = 341 \text{ km}.$$

$$\text{Povrch vrchlíku: } S = 2\pi r v = 2\pi \cdot 6378 \cdot 341 \text{ km}^2 = 13700000 \text{ km}^2.$$

$$\text{Celková plocha Země: } S = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6378^2 \text{ km}^2 = 511000000 \text{ km}^2.$$

$$100\% \quad \dots \quad 511000000$$

$$x\% \quad \dots \quad 13700000$$

$$\frac{x}{13700000} = \frac{100}{511000000}$$

$$x = 13700000 \cdot \frac{100}{511000000} = 2,68$$

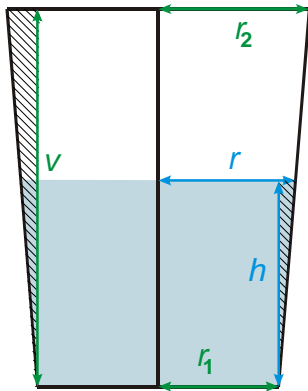
Z orbitální stanice ISS je vidět plocha 13700000 km^2 , což je 2,68% zemského povrchu.

Př. 4: Plastový pivní kelímek má tvar komolého kužele o poloměrech podstav 4 cm a 5 cm a výšce 8 cm. V kelímku zbývá 0,25 l piva. Jak vysoko dosahuje hladina piva?

Hladina vystoupá do výšky h , vodní hladina pak bude mít poloměr r .

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

Ve vzorci jsou dvě neznámé \Rightarrow musíme najít jejich vzájemný vztah a jednu vyjádřit pomocí druhé.



Z obrázku je vidět, že díky podobnosti trojúhelníků

$$\text{platí: } \frac{r_2 - r_1}{v} = \frac{r - r_1}{h}.$$

$$h \frac{r_2 - r_1}{v} + r_1 = r$$

Je zřejmé, že budeme muset dosazovat do neupraveného vzorce \Rightarrow dosadíme i do vztahu pro

$$r \text{ a zjednodušíme si rovnici: } r = h \frac{r_2 - r_1}{v} + r_1 = h \frac{5 - 4}{8} + 4 = \frac{h}{8} + 4$$

Nyní dosadíme do vzorce pro objem, za objem dosazujeme 250 cm^3 :

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r + r^2)$$

$$250 = \frac{\pi h}{3} \left[4^2 + 4 \left(\frac{h}{8} + 4 \right) + \left(\frac{h}{8} + 4 \right)^2 \right]$$

$$250 = \frac{\pi h}{3} \left[16 + \frac{h}{2} + 16 + \frac{h^2}{64} + 2 \frac{h}{8} 4 + 16 \right]$$

$$250 = \frac{\pi h}{3} \left[48 + \frac{3h}{2} + \frac{h^2}{64} \right]$$

$$48000 = 3072\pi h + 96\pi h^2 + \pi h^3$$

$$\pi h^3 + 96\pi h^2 + 3072\pi h - 48000 = 0$$

Kubická rovnice, nemáme žádný vzorec (i když existuje), necháme výpočet na kalkulačce nebo matematickém programu, získáme pouze jeden reálný kořen: $x_1 = 4,354238103 \text{ cm}$.

Platí tedy: $h = 4,354238103 \text{ cm}$.

Můžeme dopočítat i poloměr hladiny piva:

$$r = \frac{h}{8} + 4 = \frac{4,354238103}{8} + 4 \text{ cm} = 4,544279763 \text{ cm}$$

A provést kontrolu: $V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r + r^2)$.

$$V = \frac{\pi \cdot 4,354238103}{3} (4^2 + 4 \cdot 4,544279763 + 4,544279763^2) \text{ cm}^3 = 250 \text{ cm}^3$$

Pokud je v kelímku 0,25 l piva, hladina vystoupá do výšky 4,35 cm.

Př. 5: Petáková:

strana 97, cvičení 67 a) b)

strana 98, cvičení 81

strana 98, cvičení 88

Shrnutí: