

6.1.2 Operace s komplexními čísly

Předpoklady: 6101

Komplexním číslem nazýváme výraz ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla a i je číslo, pro něž platí $i^2 = -1$.

V komplexním čísle $a + bi$ se nazývá:

číslo a reálná část

číslo b imaginární část

číslo i imaginární jednotka.

Množinu komplexních čísel značíme C (\mathbb{C}), komplexní číslo většinou z .

Zápis komplexního čísla z ve tvaru $a + bi$ nazýváme **algebraický tvar komplexního čísla**.

Př. 1: Jaký je vztah mezi množinami komplexních a reálných čísel?

Zdá se, že platí: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, že reálná čísla jsou komplexní čísla s nulovou imaginární částí $a + 0i = a$.

Není to ale jisté, dokud nebudeme mít zavedené operace a nezkontrolujeme, zda fungují stejně jako u reálných čísel. Náš odhad je však správný.

Máme číslo $z = a + bi$. Pokud platí, že:

- $b \neq 0$, říkáme číslu z **číslo imaginární**,
- $b \neq 0$ a $a = 0$, říkáme číslu z **číslo ryze imaginární**,
- $b = 0$, říkáme číslu z **číslo reálné**.

Př. 2: Z následujících čísel, vyber čísla komplexní a rozděl je do skupin: $3i$, $1 + i\sqrt{2}$, $3 - 2i$, $\pi + \sqrt{2}$, $2 + i - j + k$, $-1 + 2i$, $3 - \sqrt{2}$, $i - \sqrt{3}$, 0 , $\frac{1}{3}i$.

Komplexní čísla: $3i$, $1 + i\sqrt{2}$, $3 - 2i$, $\pi + \sqrt{2}$, $-1 + 2i$, $3 - \sqrt{2}$, $i - \sqrt{3}$, 0 , $\frac{1}{3}i$.

Reálná čísla: $\pi + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$, 0 .

Imaginární čísla: $3i$, $1 + i\sqrt{2}$, $3 - 2i$, $-1 + 2i$, $i - \sqrt{3}$, $\frac{1}{3}i$.

Ryze imaginární čísla: $3i$, $\frac{1}{3}i$.

Komplexní čísla jsme sice zavedli, ale samotná čísla bez operací nám k ničemu nejsou \Rightarrow musíme se s nimi naučit počítat.

Fakticky už jsme ale začali s komplexními čísly počítat, když jsme je dosazovali do rovnic a pracovali jsme s nimi jako s dvojčleny \Rightarrow zkusíme pokračovat v této cestě.

Pedagogická poznámka: Většina studentů příliš nerozumí, co si mají představit, když říkáme, že operace zavedeme. Početní operace, které znají u reálných čísel,

nechápu jako zavedené, ale dané realitou okolo nich. Snažím se jim opakovat, že stejně jako jsme si číslo i vymysleli, můžeme si vymyslet i způsob, jakým ho budeme používat. Jediným omezením je pouze to, aby operace byly bezesporné. Zároveň ale budeme chtít, aby měly vlastnosti, které ulehčují počítání (komutativnost, asociativnost, distributivnost).

Pedagogická poznámka: Následujících několik příkladů nepromítám, jenom je zadávám od tabule. Počítač použijeme až na příklad 7.

Př. 3: Rozhodni, jaké podmínky musí být splněny, aby se dvě komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ rovnala.

Komplexní čísla mají dvě části, pokud se mají rovnat, musí být obě části stejné \Rightarrow dvě komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ se rovnají právě tehdy, když platí $a = c$, $b = d$.

Př. 4: Sečti komplexní čísla $z_1 = 2 + 3i$ a $z_2 = 1 + 2i$ a na základě výpočtu definuj součet dvou komplexních čísel $a + bi$ a $c + di$.

S komplexními čísly zacházíme jako s dvojčleny \Rightarrow

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + 2i) = 2 + 3i + 1 + 2i = 2 + 1 + 3i + 2i = 3 + 5i$$

Pro libovolná komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ platí:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Jak s odčítáním? Odčítání = přičítání opačného čísla \Rightarrow

Opačné číslo k číslu $z = a + bi$ je číslo $-z = -a - bi$.

\Rightarrow

Rozdíl $z_1 - z_2$ komplexních čísel z_1, z_2 je součet čísla z_1 a čísla opačného k číslu z_2 \Rightarrow

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \quad (\text{pořád stejné jako u dvojčlenů})$$

Př. 5: Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 2 - 3i$ a $z_2 = -2 - 3i$. Urči:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_2 - z_1$

d) $-z_1 - z_2$

a) $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-2 - 3i) = 2 - 3i - 2 - 3i = -6i$

b) $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (-2 - 3i) = 2 - 3i + 2 + 3i = 4$

c) $z_2 - z_1 = (-2 - 3i) - (2 - 3i) = -2 - 3i - 2 + 3i = -4$

d) $-z_1 - z_2 = -(2 - 3i) - (-2 - 3i) = -2 + 3i + 2 + 3i = 6i$

Pedagogická poznámka: Je dobré se zeptat studentů, jestli neexistuje nějaký důvod pro podobnost výsledků. Schopnost všimnout si, že jde o dvojice opačných výrazů, umožňuje při výpočtech postupovat rychleji a hlavně pravidelně kontrolovat jeho správnost.

Př. 6: Vynásob komplexní čísla $z_1 = 2 + 3i$ a $z_2 = 1 + 2i$ a na základě výpočtu definuj součin dvou komplexních čísel $a + bi$ a $c + di$.

S komplexními čísly zacházíme jako s dvojčleny \Rightarrow

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 + 2i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2i + 3i \cdot 1 + 3i \cdot 2i = 2 + 4i + 3i + 6i^2 = 2 + 7i - 6 = -4 + 7i$$

Pro libovolná komplexní čísla $a + bi$ a $c + di$ platí:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$$

Poznámka: Lepší než si pamatovat vztah pro násobení je pamatovat si, že násobíme stejně jako dvojčleny a vždy, když dostaneme i^2 , použijeme vztah $i^2 = -1$.

Pedagogická poznámka: Předchozí poznámka je důležitá. Pokud ji neřeknete určitě se objeví takoví, kteří se budou snažit zapamatovat si vzorec a pak ho (samozřejmě většinou špatně) uplatňovat při výpočtech.

S dělením ještě chvíli počkáme.

Př. 7: Zapiš v algebraickém tvaru:

a) $2 + 3i + 4 - 2i$ b) $(2 + 3i)(4 - i)$ c) $(1 - 2i)(-3 + 2i)$
d) $(2 - 3i)(2 + 3i)$ e) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{2})$

Algebraický tvar: $a + bi \Rightarrow$ musíme upravit výrazy do jednoduššího tvaru.

a) $2 + 3i + 4 - 2i = 6 + i$

b) $(2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i - 3(-1) = 11 + 10i$

c) $(1 - 2i)(-3 + 2i) = -3 + 2i + 6i - 4i^2 = -3 + 4 + 8i = 1 + 8i$

d) $(2 - 3i)(2 + 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 + 0i = 13$

e) $(\sqrt{2} + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{3} + i\sqrt{2}\sqrt{2} + i\sqrt{3}\sqrt{3} + i^2\sqrt{3}\sqrt{2} = \sqrt{6} + 2i + 3i - \sqrt{6} = 5i$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti nepochopí, co znamená zadání předchozího příkladu. Je dobré jim bez otálení vysvětlit, že musí příklady vypočítat, aby získali tvar $a + bi$.

Př. 8: Urči součin komplexního čísla $a + bi$ a nuly.

$$(a + bi)0 = 0 \cdot a + 0 \cdot bi = 0 \Rightarrow \text{součin nuly a libovolného komplexního čísla je roven nule.}$$

Výpočty s reálnými čísly usnadňuje, když mají další vlastnosti ulehčující výpočty. Sčítání a násobení reálných čísel je:

- komutativní (nezáleží na pořadí)
- asociativní (nezáleží na uzávorkování)
- distributivní (můžeme roznásobovat závorky)

Pokud chceme počítat s komplexními čísly, stejně jako s reálnými dosud, musíme se přesvědčit, že mají tyhle vlastnosti také.

Př. 9: Dokaž, že součin komplexních čísel $a + bi$ a $c + di$ je komutativní.

Součin je komutativní, když nezáleží na pořadí.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(c + di)(a + bi) = ca + cbi + dai + dbi^2 = (ca - db) + (cb + da)i = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Díky vlastnostem reálných čísel můžeme oba výrazy upravit do stejného tvaru \Rightarrow násobení komplexních čísel je komutativní.

Podobně můžeme dokázat i ostatní vlastnosti \Rightarrow

Sčítání a násobení komplexních čísel je:

- **komutativní (nezáleží na pořadí)**
- **asociativní (nezáleží na uzávkování)**
- **distributivní (můžeme roznásobovat závorky)**

\Rightarrow s komplexními čísly můžeme počítat stejně jako s reálnými.

Dodatek: Předchozí vlastnosti jsou velmi důležité. Komplexní čísla i přes to, že jsou pouze vymyšlená, mají velké využití v praxi (například jedno z pojetí kvantové mechaniky vyžaduje přímo funkce komplexních čísel) a důvodem je částečně právě to, že umožňují snadné počítání.

Existují ještě obecnější množiny čísel, například čísla hyperkomplexní

$Z = a + bi + cj + dk$, jejichž využití je podstatně méně časté právě kvůli tomu, že se u nich nepodařilo zavést základní operace tak, aby uvedené vlastnosti měly.

Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich.

Př. 10: (BONUS) Věta „Je-li součin dvou komplexních čísel roven nule, je rovno nule alespoň jedno z nich“ zní samozřejmě, ale vzhledem k tomu, že násobení komplexních čísel je složitější než násobení reálných čísel, je potřeba ji dokázat. Pokus se o to.

Komplexní čísla si označíme $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, abychom snadněji rozlišili, která reálná čísla patří ke kterému komplexnímu.

Použijeme vzorec pro násobení:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i = 0 + 0i$$

\Rightarrow Platí: $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$ a zároveň $a_1b_2 + b_1a_2 = 0$ (získali jsme soustavu rovnic).

$$a_1a_2 - b_1b_2 = 0 \quad / \cdot a_2 \qquad a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \quad / \cdot b_2$$

$$a_1a_2^2 - a_2b_1b_2 = 0 \qquad a_1b_2^2 + b_1a_2b_2 = 0$$

Rovnice sečteme:

$$a_1a_2^2 - a_2b_1b_2 = 0$$

$$a_1b_2^2 + a_2b_1b_2 = 0$$

$$a_1a_2^2 + a_1b_2^2 = 0$$

$a_1(a_2^2 + b_2^2) = 0 \Rightarrow$ rovnice v součinném tvaru, alespoň jedno z čísel v součinu musí být nula.

Dvě možnosti:

a) Platí $a_2^2 + b_2^2 = 0$

\Rightarrow součet druhých mocnin reálných čísel se rovná nule, jen když jsou obě rovny nule.

$\Rightarrow a_2 = b_2 = 0 \Rightarrow$ komplexní číslo $z_2 = 0$.

b) platí $a_1 = 0$

Dosadíme $a_1 = 0$ do rovnic ze začátku:

$a_1 a_2 - b_1 b_2 = 0 - b_1 b_2 = 0 \Rightarrow b_1 b_2 = 0$

$a_1 b_2 + b_1 a_2 = 0 + b_1 a_2 = 0 \Rightarrow b_1 a_2 = 0$

Najednou tedy platí: $b_1 b_2 = b_1 a_2 = 0$. Pokud,

není druhé číslo $z_2 = a_2 + ib_2$ rovno nule, musí platit $b_1 = 0$.

Platí tedy: $a_1 = b_1 = 0 \Rightarrow$ komplexní číslo

$z_1 = 0$.

Př. 11: Spočti:

a) $3(-1+i)(1-i) - i(2-3i)$

b) $i(2-i)(3+i)(-1-i) - (2+i)(3-i)(3+2i)$

c) $i(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} - i\sqrt{2})$

a)

$3(-1+i)(1-i) - i(2-3i) = 3(-1+i+i-i^2) - 2i + 3i^2 = 3[-1+2i-(-1)] - 2i + 3(-1) =$

$3(2i) - 2i - 3 = -3 + 4i$

b)

$i(2-i)(3+i)(-1-i) - (2+i)(3-i)(3+2i) =$

$= (2i - i^2)(-3 - 3i - i - i^2) - (6 - 2i + 3i - i^2)(3 + 2i) = (2i + 1)(-2 - 4i) - (7 + i)(3 + 2i) =$

$= (-4i - 8i^2 - 2 - 4i) - (21 + 14i + 3i + 2i^2) = (6 - 8i) - (19 + 17i) = 6 - 8i - 19 - 17i =$

$= -13 - 25i$

c)

$i(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} - i\sqrt{2}) =$

$i(\sqrt{6} + i\sqrt{6} + 2i + 2i^2) + \sqrt{6} + i\sqrt{2} + i^2\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2i =$

$= i(\sqrt{6} + i\sqrt{6} + 2i - 2) + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2i = i\sqrt{6} + i^2\sqrt{6} + 2i^2 - 2i + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2i =$

$= i\sqrt{6} - \sqrt{6} - 2 - 2i + 2\sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2i = \sqrt{6} - 2 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6} - 4)$

Př. 12: Petáková:

strana 134/cvičení 1 c) d)

Shrnutí: Komplexní čísla sčítáme a násobíme jako dvojčleny.