

6.2.3 Goniometrický tvar komplexních čísel II

Předpoklady: 6202

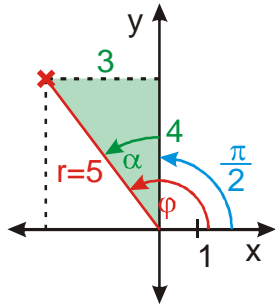
Př. 1: Zapiš v goniometrickém tvaru komplexní čísla:

a) $z_1 = -3 + 4i$

b) $z_2 = -12 - 5i$

a) $z_1 = -3 + 4i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

1. pomocí obrázku



Zelený trojúhelník: $\sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52'$

$$\varphi = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + 36^\circ 52' = 126^\circ 52'$$

$$z = -3 + 4i = 5(\cos 126^\circ 52' + i \sin 126^\circ 52')$$

2. pomocí rovnic

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{4}{5}$$

\Rightarrow hledáme úhel pro který platí: $\cos \varphi = -\frac{3}{5}$,

$\sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow$ nejedná se o žádnou

z tabulkových hodnot \Rightarrow určíme pomocí kalkulačky s přesností na minuty

$$\cos \varphi = -\frac{3}{5} \Rightarrow \varphi = 126^\circ 52'$$

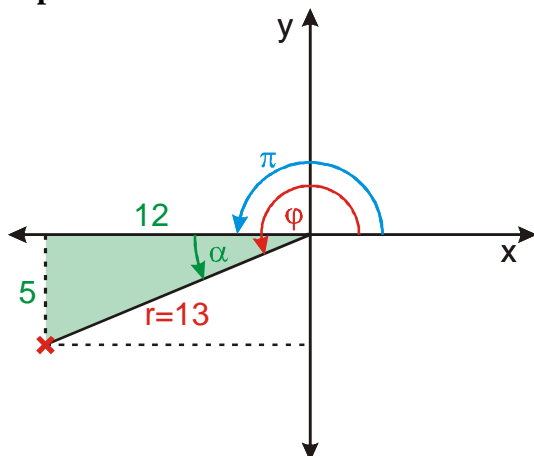
$$\sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi = 53^\circ 8' \text{ nebo}$$

$$\varphi = 180^\circ - 53^\circ 8' = 126^\circ 52'$$

$$z = -3 + 4i = 5(\cos 126^\circ 52' + i \sin 126^\circ 52')$$

b) $z_2 = -12 - 5i \Rightarrow r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = 13$

1. pomocí obrázku



Zelený trojúhelník: $\sin \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha = 22^\circ 37'$

$$\varphi = 180^\circ + \alpha = 180^\circ + 22^\circ 37' = 202^\circ 37'$$

$$z_2 = -12 - 5i = 13(\cos 202^\circ 37' + i \sin 202^\circ 37')$$

2. pomocí rovnic

$$\cos \varphi = \frac{a}{r} = -\frac{12}{13}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{r} = -\frac{5}{13}$$

\Rightarrow hledáme úhel pro který platí:

$\cos \varphi = -\frac{12}{13}$, $\sin \varphi = -\frac{5}{13} \Rightarrow$ nejedná se o

žádnou z tabulkových hodnot \Rightarrow určíme pomocí kalkulačky s přesností na minuty

$$\cos \varphi = -\frac{12}{13} \Rightarrow \varphi = 157^\circ 23' \text{ nebo}$$

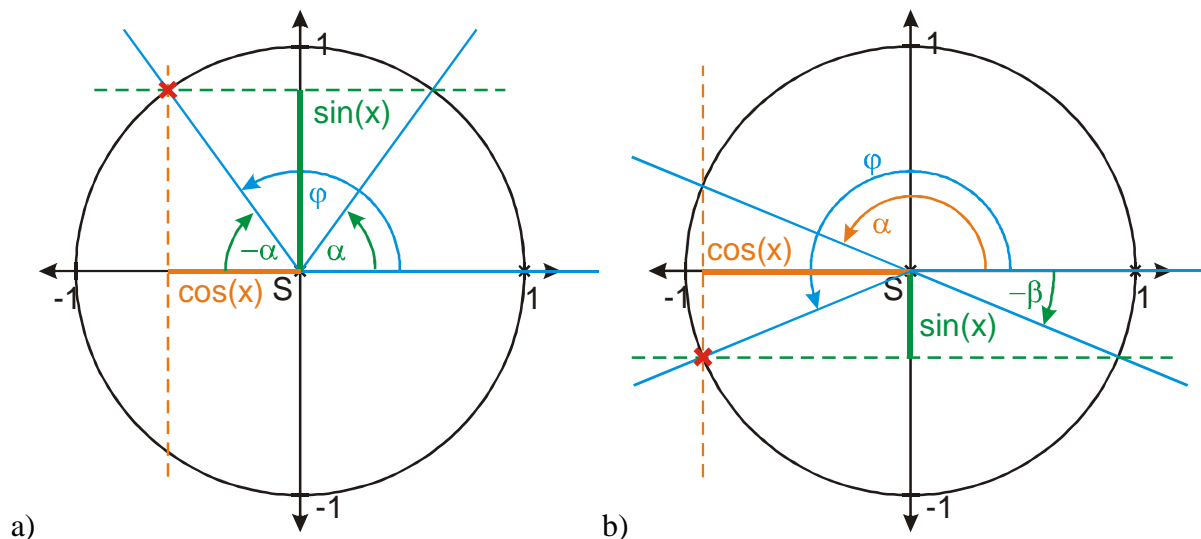
$$\varphi = 360^\circ - 157^\circ 23' = 202^\circ 37'$$

$$\sin \varphi = -\frac{5}{13} \Rightarrow \varphi = -22^\circ 37' \text{ nebo}$$

$$\varphi = 180^\circ + 22^\circ 37' = 202^\circ 37'$$

$$z_2 = -12 - 5i = 13(\cos 202^\circ 37' + i \sin 202^\circ 37')$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu se rychle ukáže, jaký přehled o hodnotách goniometrických funkcí studenti mají. Pokud převádějí pomocí rovnic, jejich kalkulačky jim přímo očekávanou odpověď nedají, protože hodnoty úhlů udávají pouze pro interval $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ u \cos^{-1} a $\langle -90^\circ; 90^\circ \rangle$ u \sin^{-1} . Většinou pomohou následující obrázky jednotkových kružnic:



Př. 2: Zapiš v goniometrickém tvaru komplexní číslo $\frac{10-2i}{3+2i}$.

Číslo není v algebraickém tvaru \Rightarrow nejdřív ho musíme převést.

$$\frac{10-2i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{30-20i-6i+4i^2}{9+4} = \frac{26-26i}{13} = 2-2i.$$

Předvádíme stejně jako dosud:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$z = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\Rightarrow \text{hledáme úhel pro který platí: } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{7}{4}\pi$$

$$\frac{10-2i}{3+2i} = 2-2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

Př. 3: Rozhodni, zda je číslo $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ zapsáno v goniometrickém tvaru. Pokud ne, zapiš jej v něm.

Na první pohled se zdá, že číslo $z = \cos \frac{\pi}{3} - i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ je goniometrickém tvaru, ale před imaginární částí by nemělo být mínus (goniometrický tvar $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$) \Rightarrow snažíme se jej odstranit.

Použijeme: $\sin(-x) = -\sin x$.

$$z = \cos \frac{\pi}{3} - i \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

Uvnitř obou goniometrických funkcí musí být stejný úhel \Rightarrow použijeme: $\cos x = \cos(-x)$:

$$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right). \text{ To už je goniometrický tvar.}$$

Kvůli periodicitě funkcí \sin a \cos s periodou 2π , můžeme napsat úhel v základní velikosti:

$$z = \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos \frac{5}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{5}{3}\pi$$

Př. 4: Zapiš v goniometrickém tvaru číslo $z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.

Na první pohled se zdá, že číslo $z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$ je téměř v goniometrickém tvaru, ale překáží nám tam jednička \Rightarrow najdeme si reálnou a imaginární část a budeme postupovat

klasicky: reálná část: $1 + \cos \frac{\pi}{3}$, imaginární část: $\sin \frac{\pi}{3}$.

Absolutní hodnota:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$$

$$\text{Převědeme pomocí rovnic: } z = \sqrt{3} \left(\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} + i \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

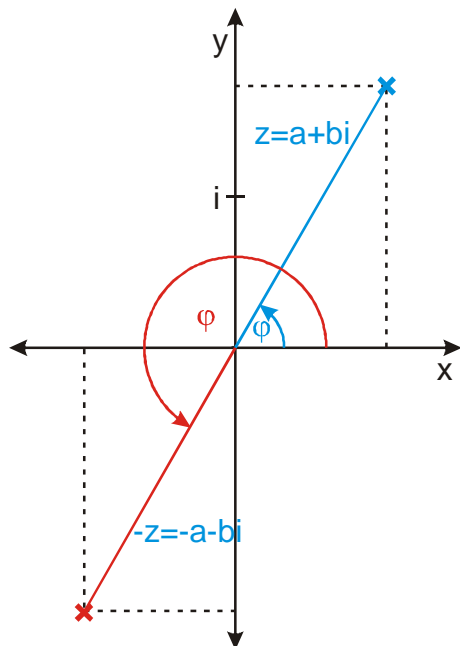
\Rightarrow hledáme úhel pro který platí: $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$.

$$z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Př. 5: Je dána komplexní jednotka $z = \cos x + i \sin x$. Zapiš v goniometrickém tvaru číslo $-z$.

Vypočteme si algebraický tvar a uvidíme: $-z = -(\cos x + i \sin x) = -\cos x - i \sin x$.

Nakreslíme si obrázek.



Z obrázku je vidět, že obrazy obou komplexních čísel jsou středově souměrné (nebo otočené o 180°) \Rightarrow obě čísla se liší pouze v argumentech. Pro argumenty platí: $\varphi_{-z} = \varphi_z + \pi \Rightarrow -z = -(\cos x + i \sin x) = -\cos x - i \sin x = \cos(x + \pi) + i \sin(x + \pi)$.

Př. 6: Je dáno komplexní číslo $z = 2 - 3i$. Najdi přesnou hodnotu komplexního čísla w v algebraickém tvaru, které bude mít dvojnásobnou absolutní hodnotu a dvojnásobný argument.

Zkusíme zapsat číslo $z = 2 - 3i$ v goniometrickém tvaru: $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$$z = 2 - 3i = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}}i \right) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}; \sin \varphi = -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ - nejde o tabulkové hodnoty}$$

\Rightarrow nemůžeme přesně určit argument a tedy ani jeho dvojnásobek

Pro algebraický tvar nepotřebujeme znát hodnotu φ , stačí znát hodnotu $\cos 2\varphi$ a $\sin 2\varphi$.

Tyto hodnoty určíme pomocí vzorců pro goniometrické funkce

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)^2 - \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} \right)^2 = \frac{4}{13} - \frac{9}{13} = -\frac{5}{13}$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi = 2 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = -\frac{12}{13}$$

$$w = 2|z|(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = 2\sqrt{13} \left[-\frac{5}{13} + i \left(-\frac{12}{13} \right) \right] = -\frac{10\sqrt{13}}{13} - i \frac{24\sqrt{13}}{13}$$

Př. 7: Petáková:

strana 137/cvičení 31 z_2, z_3

strana 137/cvičení 34 d) a)

strana 137/cvičení 37 a) b)

strana 137/cvičení 39

Shrnutí: