6.2.4 Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Předpoklady: 6203

Pedagogická poznámka: Tato hodina vyžaduje spíše jeden a půl vyučovací hodiny

Máme dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru: $z_1 = a + bi$ $\qquad z_2 = c + di$

Spočítáme jejich součin: $z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$

Jak to bude součin vypadat v goniometrickém tvaru?

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 \cdot r_2\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right] =$$

$$= r_1 \cdot r_2\left[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\right]$$

Vzpomínka na goniometrii:

$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

$\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

$$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$$

Pro součin dvou libovolných komplexních čísel z_1 a z_2 v goniometrickém tvaru platí vzorec:
$z_1z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]$.

Př. 1: Urči v goniometrickém tvaru součin $z_1.z_2$ čísel $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ a $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$. Výsledek převeď i do algebraického tvaru.

$$z_1z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi\right)\right] =$$

$$= 6(\cos\pi + i\sin\pi) = 6(-1+0) = -6$$

Př. 2: Urči v goniometrické tvaru součin $z_1.z_2$ čísel:

a) $z_1 = 0,5\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ a $z_2 = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

b) $z_1 = \sqrt{6}\left(\cos 310° + i\sin 310°\right)$ a $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 140° + i\sin 140°\right)$

a)

$$z_1z_2 = 0,5\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\cdot 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) =$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{15}{6}\pi + i\sin\frac{15}{6}\pi\right) =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5}{2}\pi + i\sin\frac{5}{2}\pi\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

b)

$$z_1z_2 = \sqrt{6}\left(\cos 310° + i\sin 310°\right)\cdot\sqrt{2}\left(\cos 140° + i\sin 140°\right) =$$

$$= 2\sqrt{3}\left[\cos\left(310° + 140°\right) + i\sin\left(310° + 140°\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{3}\left(\cos 450° + i\sin 450°\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos 90° + i\sin 90°\right)$$

Př. 3: Převeď čísla $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ a $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ na algebraický tvar a v algebraickém tvaru je vynásob. Srovnej výsledek s výsledkem příkladu 1.

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3 + 3i$$

$$z_1z_2 = (1+i)(-3+3i) = -3 + 3i - 3i + 3i^2 = -6$$

Stejný výsledek jako u příkladu 1.

Př. 4: Zobecni vzorec pro součin v goniometrickém tvaru pro větší počet činitelů (komplexní čísla $z_1; z_2; ...; z_n$). Odvoď vzorec pro podíl v goniometrickém tvaru.

Řešení viz. následující výklad.

Vzorec pro součin v goniometrickém tvaru je možné zobecnit pro větší počet činitelů:

Pro všechna komplexní čísla $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$, $\ldots, z_n = r_n\left(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n\right)$ platí:

$$z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\right)\right]$$

Pedagogická poznámka: Odvození vzorce pro násobení nechávám většinou na studentech. Vzorec pro podíl pak promítám z počítače, aby vybyl čas na počítání příkladů.

Jak je to s dělením?

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $\qquad$ $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 - i\cdot\sin\varphi_1)}{(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)} = \frac{r_1\left[(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\cdot(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)\right]}{r_2\left(\cos^2\varphi_2 - i^2\cdot\sin^2\varphi_2\right)}$$

$$= \frac{r_1\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 i + \sin\varphi_1\cos\varphi_2 i - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 i^2\right]}{r_2\left(\cos^2\varphi_2 + \cdot\sin^2\varphi_2\right)} =$$

$$= \frac{r_1\left[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right]}{r_2\cdot 1}$$

Opět použijeme goniometrii:

$\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Pro podíl dvou libovolných komplexních čísel z_1 a z_2 v goniometrickém tvaru platí vzorec: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$

Př. 5: Urči v goniometrickém tvaru podíl $\frac{z_1}{z_2}$ čísel $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ a $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Výsledek převeď i do algebraického tvaru.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0 + i) = 3i$$

Př. 6: Urči v goniometrickém tvaru podíl $\frac{z_1}{z_2}$ čísel:

a) $z_1 = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$ a $z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

b) $z_1 = \sqrt{6}\left(\cos 310° + i\sin 310°\right)$ a $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos 140° + i\sin 140°\right)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)} = \frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{11}{6}\pi\right)\right] =$$

$$= 2\left[\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}\left(\cos 310° + i\sin 310°\right)}{\sqrt{2}\left(\cos 140° + i\sin 140°\right)} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(310° - 140°\right) + i\sin\left(310° - 140°\right)\right] =$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos 170° + i\sin 170°\right)$$

Př. 7: Převeď čísla $z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ a $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ na algebraický tvar a v algebraickém tvaru je vyděl. Výsledek srovnej s výsledkem příkladu 5.

$$z_1 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = 3\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3 + 3i$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-3+3i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-3+3i+3i-3i^2}{1+1} = \frac{6i}{2} = 3i$$

Stejný výsledek jako u příkladu 5.

Př. 8: Vyjádři v goniometrickém tvaru $\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}$.

Číslo není v goniometrickém tvaru, je ve jmenovateli zlomku $\Rightarrow$ převedeme čitatel do goniometrického tvaru a použijeme vzorec pro dělení v goniometrickém tvaru:

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1\left(\cos 0 + i\sin 0\right)}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = 1\left[\cos\left(0 - \varphi\right) + i\sin\left(0 - \varphi\right)\right] = \cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)$$

Dobré na zapamatování: $\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)$

Př. 9: Urči součin komplexních čísel: $z_1 = \dfrac{1}{\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi}$, $z_2 = \dfrac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi}$,

$z_3 = \dfrac{1}{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}$.

Nemůžeme použít vzorec pro součin v goniometrickém tvaru, čísla v něm nejsou zadaná $\Rightarrow$ převedeme na goniometrický tvar pomocí předchozího vzorce.

$$z_1 = \frac{1}{\cos\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi} = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi} = \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi} = \cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$$

$$z_1z_2z_3 = \left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] =$$

$$= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi - \frac{3}{4}\pi - \frac{5}{6}\pi\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) =$$

$$= \cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi$$

Př. 10: Zapiš v goniometrickém tvaru číslo:

$$z = \left(\cos\varphi - i\sin\varphi + \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)\cdot\left(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi\right)$$

Nejdřív si upravíme závorku:

$$\left(\cos\varphi - i\sin\varphi + \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right) = \left[\frac{\left(\cos\varphi - i\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) + 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right] =$$

$$= \left(\frac{\cos^2\varphi + i\cos\varphi\sin\varphi - i\cos\varphi\sin\varphi - i^2\sin^2\varphi + 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right) = \left(\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1}{\cos\varphi + i\sin\varphi}\right)$$

$$= \frac{2}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = 2\left[\cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)\right]$$

Dosadíme:

$$z=\left(\cos\varphi-i\sin\varphi+\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}\right)\cdot\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right)=$$
$$=2\left[\cos\left(-\varphi\right)+i\sin\left(-\varphi\right)\right]\cdot\left(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi\right)=2\left[\cos\left(2\varphi-\varphi\right)+i\sin\left(2\varphi-\varphi\right)\right]=$$
$$=2\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$$

Př. 11: Vyjádři v goniometrickém tvaru:

a) $\dfrac{\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi}{2i}$ b) $(1+i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

c) $\dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3}-i}$

a) $\dfrac{\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi}{2i}$

Převedeme jmenovatel na goniometrický tvar: $2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$$\frac{\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi}{2i}=\frac{\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi}{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$
$$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{6}\pi+i\sin\frac{4}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

b) $(1+i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

Převedeme čitatel na goniometrický tvar: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$

$$(1+i)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi\right)\right]=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$$

c) $\dfrac{\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3}-i}$

Převedeme jmenovatel na goniometrický tvar: $\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)\Rightarrow$

$$\frac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{\sqrt{3}-i} = \frac{\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi}{2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right)} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{11}{6}\pi\right)\right] =$$

$$= 0,5\left[\cos\left(-\frac{6}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{6}{6}\pi\right)\right] = 0,5\left[\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right] = 0,5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

Shrnutí: V goniometrické tvaru můžeme komplexní čísla snadno násobit i dělit.