

6.2.5 Moivreova věta

Předpoklady: 6204

Z minulé hodiny máme vzorec pro součin libovolného počtu čísel v goniometrickém tvaru:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) \right]$$

Můžeme ho použít i na výpočet přirozené mocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru:

$$z^n = z \cdot z \cdot \dots \cdot z = r \cdot r \cdot \dots \cdot r \left[\cos(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) + i \sin(\varphi + \varphi + \dots + \varphi) \right] = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

to už je pořádné usnadnění.

Pro každé přirozené číslo n a pro každé komplexní číslo $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

platí: $z^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

Speciálním případem jsou komplexní čísla, pro která platí $r = 1$ (komplexní jednotky), pro ně se vzorec ještě více zjednoduší: $z^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$. Tento vzorec se nazývá Moivreova věta.

Moivreova věta: Pro každé přirozené číslo n a libovolné reálné číslo φ platí:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Př. 1: Vypočti:

a) $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{15}$

b) $\left[\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8$

a)

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{15} &= \cos 15 \cdot \frac{\pi}{6} + i \sin 15 \cdot \frac{\pi}{6} = \cos \frac{15}{6} \pi + i \sin \frac{15}{6} \pi = \cos \frac{5}{2} \pi + i \sin \frac{5}{2} \pi = \\ &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\left[\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^8 = (\sqrt[4]{2})^8 \left(\cos 8 \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \frac{\pi}{4} \right) = 4 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$$

Pedagogická poznámka: Řazení následujících dvou příkladů je problematické. Logičtější je postup uvedený v učebnici. Pokud ho budete používat je nutné, aby žáci dobře počítali, jinak se výpočet mocniny $(\sqrt{3} + i)^6$ v algebraickém tvaru promění na masakr, který zabere neúměrně mnoho času. Pokud manuální výpočty nejsou silnou stránkou Vaší třídy, doporučuji nejdříve zadat příklad 3 s pokynem, aby používali goniometrický tvar a teprve poté se vrátit k příkladu 2 (s těmi, kteří

rychle spočítají příklad 3). Převedení na goniometrický tvar je považováno za samozřejmost.

Př. 2: Vypočti $(\sqrt{3} + i)^6$. Poté číslo převed' do goniometrického tvaru, umocni ho v něm a výsledek převed' zpátky do algebraického tvaru. Porovnej oba způsoby výpočtu.

algebraicky:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^6 &= \left[(\sqrt{3} + i)^2 \right]^3 = (3 + i2\sqrt{3} + i^2)^3 = (2 + i2\sqrt{3})^2 (2 + i2\sqrt{3}) = \\ &= (2^2 + i2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} + i^2 4 \cdot 3) (2 + i2\sqrt{3}) = (-8 + i8\sqrt{3}) (2 + i2\sqrt{3}) = \\ &= -16 - i16\sqrt{3} + i16\sqrt{3} + i^2 16 \cdot 3 = -16 - 48 = -64\end{aligned}$$

v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} + i)^6 &= \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^6 = 2^6 \left(\cos 6 \frac{\pi}{6} + i \sin 6 \frac{\pi}{6} \right) = 64 (\cos \pi + i \sin \pi) = \\ &= 64(-1 + i0) = -64\end{aligned}$$

Goniometrický tvar vítězí.

Př. 3: Vypočti:

a) $(-1 + i)^{40}$

b) $\left(\frac{1}{1 + i} \right)^{14}$

Vzhledem k velikosti mocnin je jasné, že budeme mocnit v goniometrickém tvaru.

a)

$$\begin{aligned}(-1 + i)^{40} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right) \right]^{40} = (\sqrt{2})^{40} \left(\cos 40 \frac{3}{4} \pi + i \sin 40 \frac{3}{4} \pi \right) = \\ &= 2^{20} \left(\cos \frac{120}{4} \pi + i \sin \frac{120}{4} \pi \right) = 2^{20} (\cos 30\pi + i \sin 30\pi) = 2^{20} (\cos 0 + i \sin 0) = 2^{20}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + i} &= \frac{1}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \\ \left(\frac{1}{1 + i} \right)^{14} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \right)^{14} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{14} \left[\cos \left(-14 \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-14 \frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2^7} \left[\cos \left(-\frac{7}{2} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{7}{2} \pi \right) \right] = \frac{1}{2^7} \left[\cos \left(-\frac{3}{2} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{2} \pi \right) \right] = \\ &= \frac{1}{128} \left[\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{128} [0 + i \cdot 1] = \frac{i}{128}\end{aligned}$$

Pomocí Moivreovy věty je možné snadno odvodit vzorce pro vyjádření funkcí $\sin kx$ a $\cos kx$ pomocí mocnin $\sin x$ a $\cos x$.

Například platí: $(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$

Umocníme levou stranu:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^3 &= \cos^3 x + 3 \cos^2 x \cdot i \sin x + 3 \cos x (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 = \\ &= \cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x + i^2 3 \cos x \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \\ &= \cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x\end{aligned}$$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$$\cos^3 x + i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = \cos 3x + i \sin 3x$$

- **Reálné části:** $\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos 3x$
- **Imaginární části:** $i \cdot 3 \cos^2 x \sin x - i \sin^3 x = i \sin 3x$
 $3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x = \sin 3x$

Vzorce jsou hotové.

Př. 4: Odvod' pomocí Moivreovy věty vzorce pro $\sin 2x$ a $\cos 2x$.

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x$$

Umocníme levou stranu:

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^2 &= \cos^2 x + 2 \cos x \cdot i \sin x + (i \sin x)^2 = \\ &= \cos^2 x + i 2 \cos x \sin x + i^2 \sin^2 x = \cos^2 x + i 2 \cos x \sin x - \sin^2 x\end{aligned}$$

Napíšeme opět obě strany rovnosti:

$$\cos^2 x + i 2 \cos x \sin x - \sin^2 x = \cos 2x + i \sin 2x$$

- Reálné části: $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$
- Imaginární části: $i 2 \cos x \sin x = i \sin 2x$
 $2 \cos x \sin x = \sin 2x$

Moivreova věta platí i pro záporné celočíselné mocnitele:

$$n \text{ je záporné celé číslo: } (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n}}$$

$-n$ je přirozené \Rightarrow na jmenovatel použijeme Moivreovu větu

$$\frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n}} = \frac{1}{[\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

\Rightarrow platí i pro záporné n .

Př. 5: Petáková:

strana 138/cvičení 42 a) d) e)

strana 138/cvičení 43

strana 138/cvičení 44

Shrnutí: Umocňování komplexních čísel je v goniometrické tvaru snadné i u vysokých mocnin.