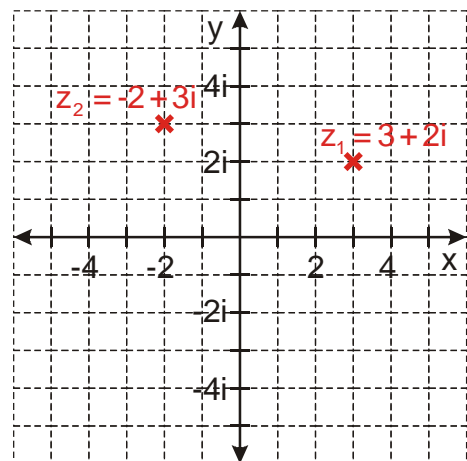


6.2.6 Komplexní čísla jako vektory v Gaussově rovině

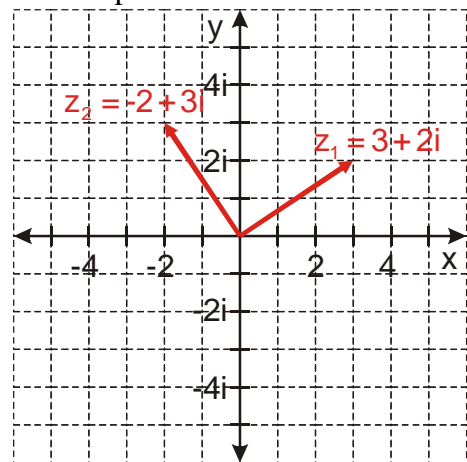
Předpoklady: 3511, 6201

Př. 1: Zobraz do Gaussovy roviny komplexní čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$.



Komplexní čísla nemusíme zobrazovat pouze jako body v rovině. Uspořádaná dvojice čísel $[3; 2]$ nepředstavuje pouze bod v rovině, ale také vektor s počátkem v počátku soustavy souřadnic a s koncovým bodem $[3; 2]$, tedy vektor $(3; 2)$.

⇒ komplexní čísla může zobrazovat v Gaussově rovině také jako vektory.



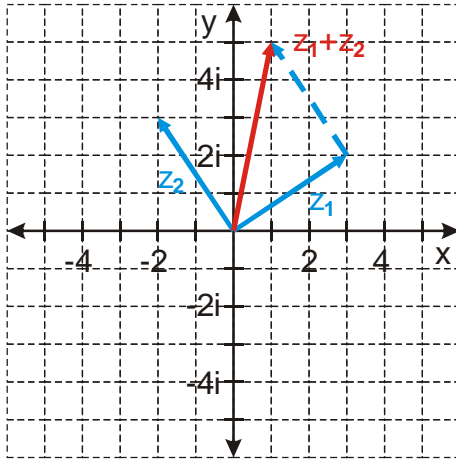
Postřeh: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je zároveň i velikostí vektoru.

Pokud to nemá nějaké výhody, je to zbytečná práce. Co umožňují vektory oproti bodům?

S vektory je možné provádět početní operace – sčítání a odčítání.

Př. 2: Jsou dána komplexní čísla $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = -2 + 3i$. Zobraze je v Gaussově rovině jako vektory a poté graficky spočti: a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$
Výsledky ověř početně.

a) $z_1 + z_2$

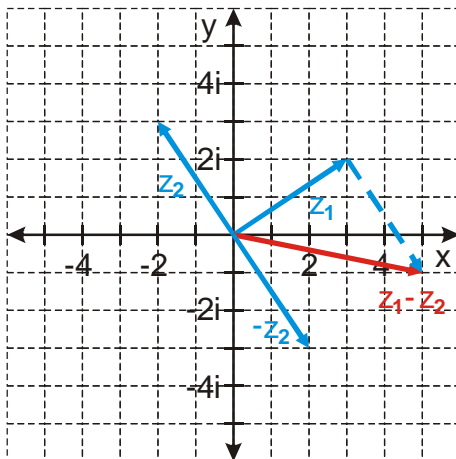


Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 + z_2 = 1 + 5i$

Ověříme početně:

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i + (-2 + 3i) = 1 + 5i$$

b) $z_1 - z_2$



Z obrázku je vidět, že platí: $z_1 - z_2 = 5 - i$

Ověříme početně:

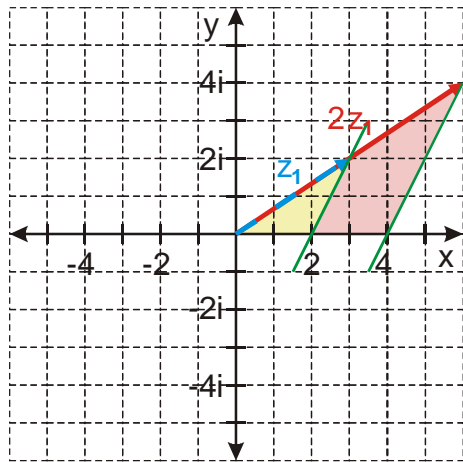
$$z_1 - z_2 = 3 + 2i - (-2 + 3i) = 5 - i$$

Co dál?

Vektory můžeme násobit reálným číslem \Rightarrow změníme jejich délku, někdy i obrátíme směr.

Př. 3: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3 + 2i$. Graficky urči $2z_1$. Výsledek ověř výpočtem.

$2z_1$ - musíme dvakrát zvětši velikost vektoru \Rightarrow pomocí podobnosti trojúhelníků.

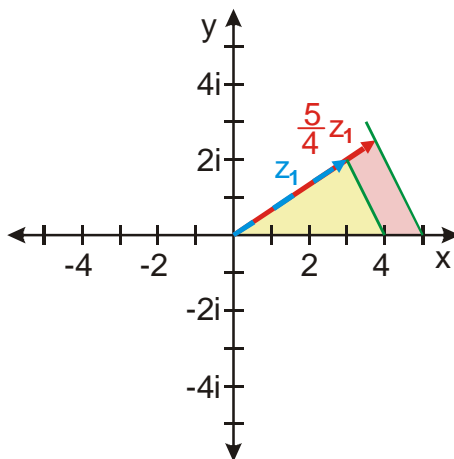


Př. 4: Je dáno komplexní číslo $z_1 = 3 + 2i$. Graficky urči čísla:

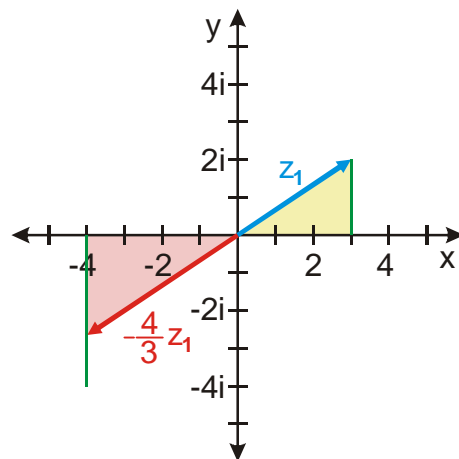
a) $\frac{5}{4}z_1$

b) $-\frac{4}{3}z_1$

a) $\frac{5}{4}z_1$



b) $-\frac{4}{3}z_1$



Zkusíme ještě násobení.

Nejdřív pro jednoduchost libovolné komplexní číslo z a libovolnou komplexní jednotku w .

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = \cos \alpha + i \sin \alpha$$

$$z \cdot w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha) = r[\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)]$$

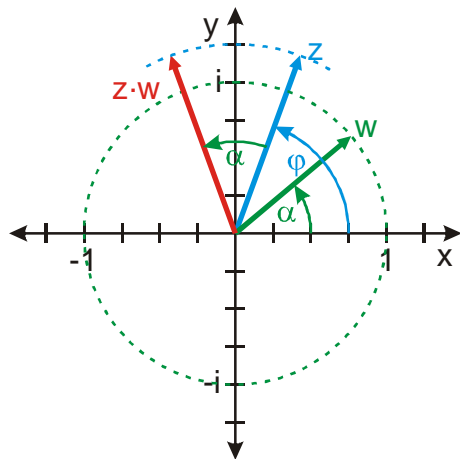
Porovnáváme: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$z \cdot w = r[\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)]$$

\Rightarrow obě čísla mají stejnou absolutní hodnotu (a jejich vektory stejnou délku), číslo $z \cdot w$ je pootočené o úhel α .

Př. 5: Na obrázku Gaussovy roviny je pomocí vektorů znázorněno komplexní číslo z a komplexní jednotka w . Znázorni do obrázku komplexní číslo $z \cdot w$.

Stačí otočit vektor čísla z o úhel α proti směru hodinových ručiček.



Konečně se dostáváme k násobení libovolné dvojice komplexních čísel. Nejdřív zase v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

S úhlem stejně jako předtím (vybereme jedno z komplexních čísel a otočíme ho o argument druhého), ale co velikosti?

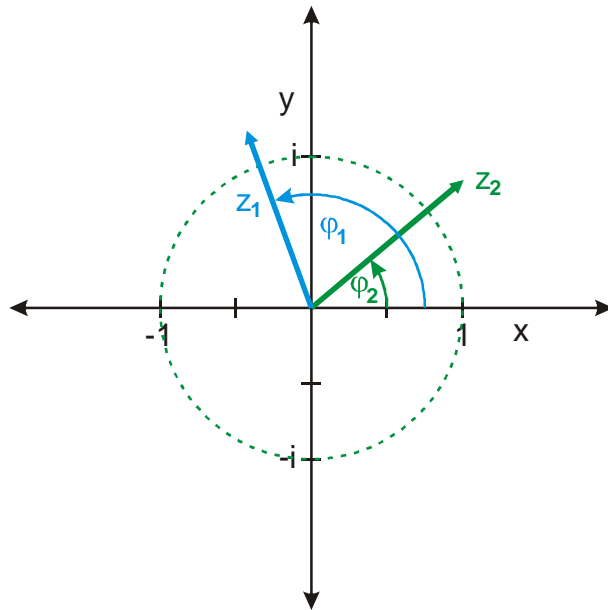
$r = r_1 r_2 \Rightarrow$ to už jsme dělali v geometrii

$r = r_1 r_2 \Rightarrow \frac{r}{r_1} = \frac{r_2}{1}$ - podobnost trojúhelníků

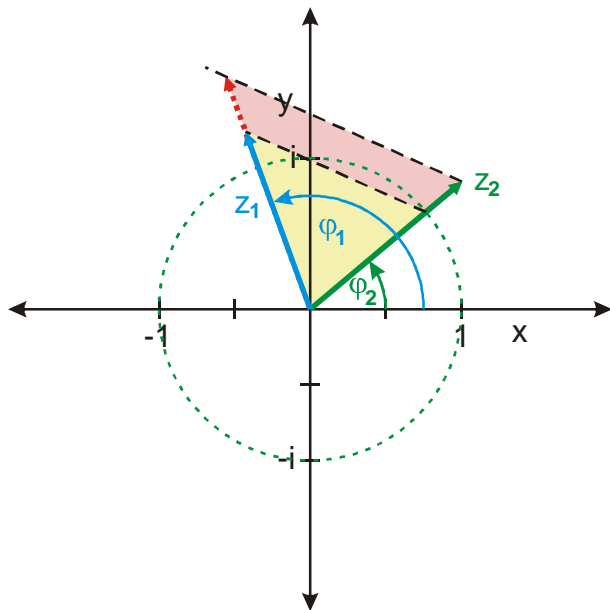
\Rightarrow dva kroky:

- zjištění velikosti výsledného vektoru,
- otočení do výsledného úhlu.

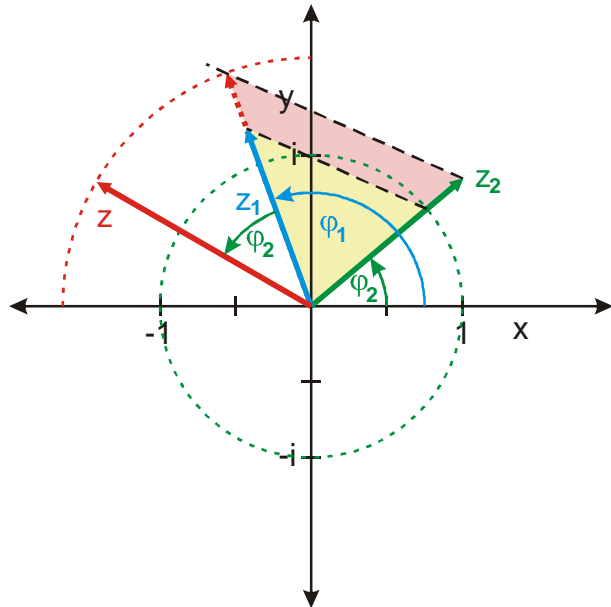
Př. 6: Na obrázku Gaussovy roviny jsou pomocí vektorů znázorněna komplexní čísla z_1 a z_2 . Urči graficky číslo $z = z_1 z_2$.



Nejdříve určíme velikost výsledného vektoru: $r = r_1 r_2 \Rightarrow \frac{r}{r_2} = \frac{r_1}{1}$ - podobnost trojúhelníků



Zbývá zvětšený vektor otočit o úhel φ_2



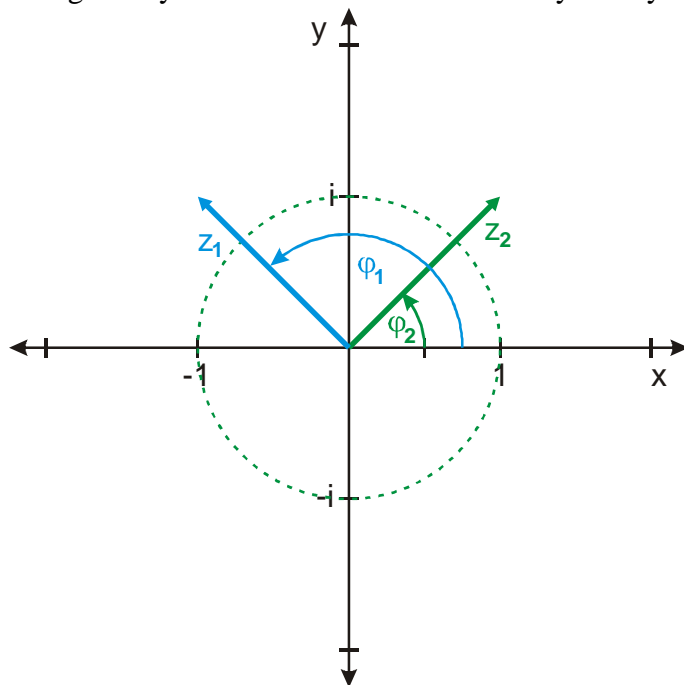
Pedagogická poznámka: Dost studentů nebude schopno celý příklad samostatně vyřešit. Pro ně příklad pomocí tabule rozfázujeme na dvě části.

Př. 7: Urči graficky i početně součin $(-1+i)(1+i)$.

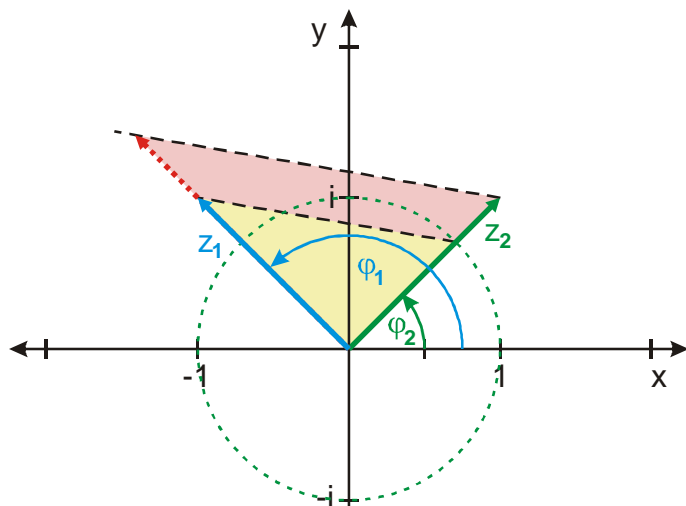
Početně: $(-1+i)(1+i) = -1 - i + i + i^2 = -2$

Označíme čísla: $z_1 = -1+i$, $z_2 = 1+i$

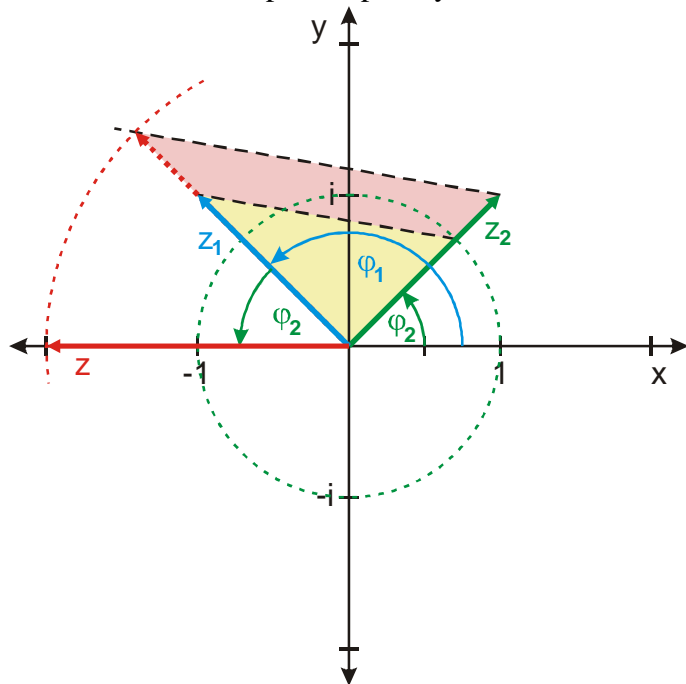
Teď graficky: zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délku výsledného vektoru.



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s počtím.

Př. 8: Urči graficky i počtím podíl: $\frac{-1+i}{1+i}$.

Počtím: $\frac{-1+i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{-1+i+i-i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$.

Označíme čísla: $z_1 = -1+i$, $z_2 = 1+i$.

Teď graficky: nejdřív provedeme dělení v goniometrickém tvaru:

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

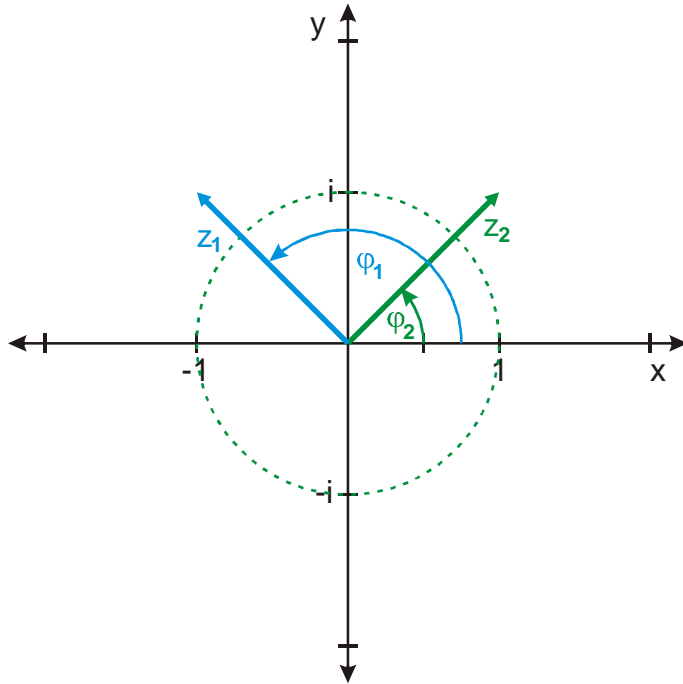
$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

S úhlem pracujeme podobně jako u násobení, ale úhly odečítáme.

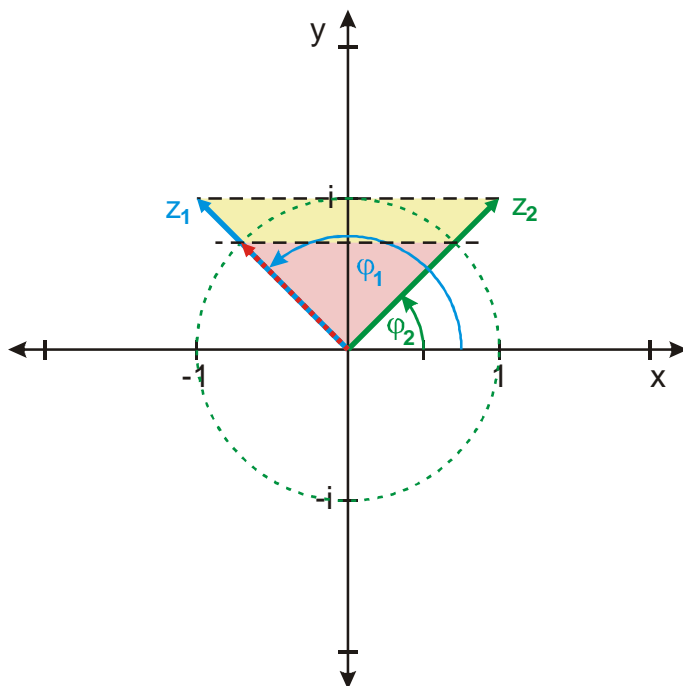
Velikost určíme ze vzorce: $r = r_1 r_2 \Rightarrow$ to už jsme dělali v geometrii

$$r = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2} - \text{podobnost trojúhelníků}$$

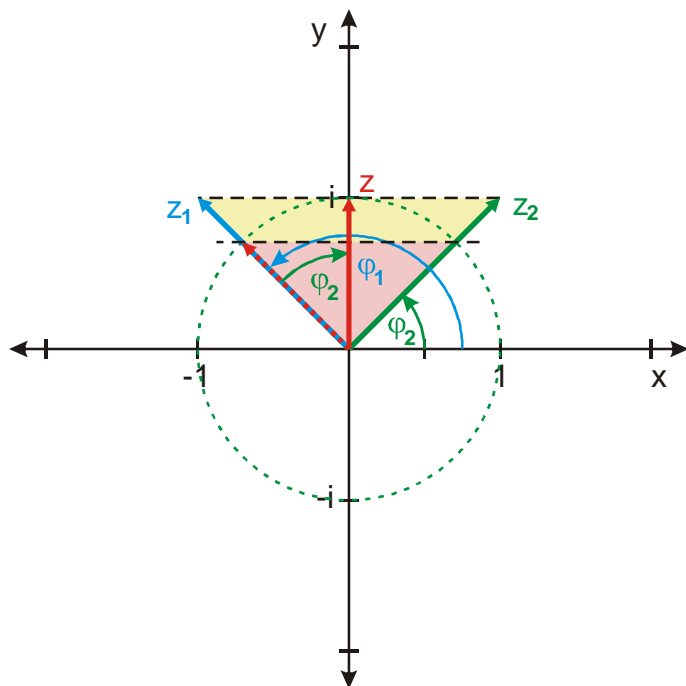
Zakreslíme čísla do Gaussovy roviny:



Teď najdeme délku výsledného vektoru. $r = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r}{1} = \frac{r_1}{r_2}$



Otočíme vektor do správné polohy.



Grafický výsledek souhlasí s počtím.

Př. 9: Petáková:
 strana 135/cvičení 15 c)
 strana 135/cvičení 16 a) b)
 strana 135/cvičení 17 b) c)

Shrnutí: Komplexní čísla je možné do Gaussovy roviny zobrazit jako vektory a pak s nimi graficky provádět početní operace.