

6.3.1 Kvadratická rovnice s reálnými koeficienty

Předpoklady:

Pedagogická poznámka: U následujícího přehledu i odvození rozhodně netrvám na tom, aby ho studenti přepsali celý. Naopak zapisují pouze některé řádky. Jde hlavně o to, aby zbylo alespoň 25 minut na počítání rovnic.

Kvadratická rovnice = rovnice, kterou můžeme zapsat ve tvaru:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

Řešení pomocí vzorce: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, kde $D = b^2 - 4ac$ diskriminant rozhoduje o

řešitelnosti:

- $D > 0 \Rightarrow$ dva reálné kořeny
- $D = 0 \Rightarrow$ jeden dvojitý reálný kořen
- $D < 0 \Rightarrow$ nemá řešení v oboru reálných čísel

Příklad: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow D = -4$ v reálném oboru nemá řešení \Rightarrow zavedení komplexních čísel
 $\Rightarrow x^2 + 1 = 0$ dva kořeny $x_{1,2} = \pm i$

\Rightarrow zdá se, že v komplexním oboru půjde řešit i kvadratické rovnice se záporným diskriminantem

Zopakujeme odvození a uvidíme:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad / \cdot a \quad (\text{můžeme, víme že } a \neq 0)$$

$$a^2x^2 + bxa + ca = 0 \quad \text{doplníme na čtverec}$$

$$(ax)^2 + 2 \cdot ax \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ca = 0 \quad / \cdot 4$$

$$4\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0 \quad \text{druhá závorka: } D = b^2 - 4ac \text{ je diskriminant}$$

Chtěli bychom upravit rovnici na tvar $A^2 - B^2 = 0$ a pak rozložit na součin, tedy

$$(2ax + b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2 = 0 \quad - \text{to ale nejde vždy, } \sqrt{-} \text{ nemá smysl } \Rightarrow \text{musíme rozdělit}$$

postup podle znaménka diskriminantu

1) kladný nebo nulový diskriminant

$D \geq 0 \quad D = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow \sqrt{D}$ má smysl a můžeme postupovat, jak jsme zamýšleli

$$(2ax + b)^2 - (\sqrt{D})^2 = 0$$

$$(y - \sqrt{D}) \cdot (y + \sqrt{D}) = 0$$

$$y = \pm \sqrt{D}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{D}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{D}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ - starý dobrý vzorec}$$

2) záporný diskriminant

$$D < 0 \quad D = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \sqrt{D} \text{ nemá smysl}$$

ale $D < 0 \Rightarrow -D > 0 \Rightarrow$ výraz $-(b^2 - 4ac) = 4ac - b^2 = -D > 0$ a půjde odmocnit

$$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$$

$$(2ax + b)^2 + (4ac - b^2) = 0 \quad \text{zkrátíme zápis } 4ac - b^2 = -D$$

$$(2ax + b)^2 + (\sqrt{-D})^2 = 0 \quad (\text{pod odmocninou je kladné číslo } \Rightarrow \text{můžeme odmocnit})$$

už z kapitoly o dělení víme, že v komplexních číslech platí: $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$

$$(y + i\sqrt{-D}) \cdot (y - i\sqrt{-D}) = 0$$

$$y = \pm i\sqrt{-D}$$

$$2ax + b = \pm i\sqrt{-D}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

podobný vzorec jako pro kladný diskriminant \Rightarrow řešíme pořád stejně.

Když je diskriminant záporný, dáme před odmocninu i a číslo pod odmocninou vynásobíme

$-1 \Rightarrow$ pod odmocninou bude kladné číslo a to budeme moci odmocnit

Vyřešíme rovnici $x^2 + 6x + 10 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-6 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$$

$$K = \{-3 \pm i\}$$

Př. 1: Sestav přehlednou tabulku zachycující řešení kvadratické rovnice v oboru reálných čísel a v oboru komplexních čísel:

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty	Řešení v oboru reálných čísel	Řešení v oboru komplexních čísel
$D > 0$		

Závěrečný přehled:

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ s reálnými koeficienty	Řešení v oboru reálných čísel	Řešení v oboru komplexních čísel
$D > 0$	dva různé reálné kořeny:	dva různé reálné kořeny:

	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$D = 0$	jeden dvojnásobný reálný kořen: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	jeden dvojnásobný reálný kořen: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$D < 0$	nemá kořeny	dva imaginární komplexně sdružené kořeny: $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Př. 2: Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $2x^2 + 3 = 0$

b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

a) $2x^2 + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm \sqrt{-24}}{4}$$

záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{\pm i\sqrt{24}}{4} = \frac{\pm i2\sqrt{6}}{4} = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$K = \left\{ \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i \right\}$$

b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$$K = \{-2 \pm i\}$$

Př. 3: Vyřeš kvadratické rovnice:

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

b) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

c) $6x^2 - 19x + 15 = 0$

d) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{2 \cdot 9} = \frac{24 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{4}{3}$$

jeden reálný dvojnásobný kořen

$$K = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

b) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2}}{2 \cdot 5} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{10}$$

záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{6 \pm i\sqrt{4}}{10} = \frac{6 \pm 2i}{10} = \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5}i$$

$$K = \left\{ \frac{3}{5} \pm \frac{1}{5}i \right\}$$

c) $6x^2 - 19x + 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 15}}{2 \cdot 6} = \frac{19 \pm 1}{12}$$

dva reálné kořeny:

$$x_1 = \frac{19+1}{12} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = \frac{19-1}{12} = \frac{3}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{3}{2}; \frac{5}{3} \right\}$$

d) $2x^2 + 4x + 6 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{4}$$

záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{-4 \pm i\sqrt{32}}{4} = \frac{-4 \pm i4\sqrt{2}}{4} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$K = \left\{ -1 \pm i\sqrt{2} \right\}$$

Př. 4: Petáková:

strana 139/cvičení 60 a) b) c)

Teď umíme najít dva kořeny pro každou kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ každý kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ s reálnými koeficienty je možné rozložit na součin $a(x - x_1)(x - x_2)$, kde x_1, x_2 jsou kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

Př. 5: Rozlož na součin lineárních činitelů trojčlen $4x^2 - 16x + 25$.

Hledáme kořeny rovnice $4x^2 - 16x + 25 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm \sqrt{-144}}{8}$$

záporný diskriminant \Rightarrow musíme nasadit nový vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \frac{16 \pm i\sqrt{144}}{8} = \frac{16 \pm 12i}{8} = 2 \pm i\frac{3}{2}$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = 4 \left[x - \left(2 - \frac{3}{2}i \right) \right] \left[x - \left(2 + \frac{3}{2}i \right) \right] = (2x-4-3i)(2x-4+3i)$$

Př. 6: Petáková:
strana 140/cvičení 67 d) e) f)

Shrnutí: