

7.1.1 Kartézské soustavy souřadnic I

Předpoklady:

Z historie matematiky

Po krachu Pythagorejců s druhou odmocninou se řeční matematici soustředili na geometrii \Rightarrow geometrie byla nejrozvinutější částí starověké matematiky:

- první matematická učebnice (Euklidovy základy) se týkala geometrie,
- v geometrii bylo možné vyjádřit odmocniny,
- to, co se učíme na gymnáziu z geometrie, zdaleka nepokrývá to, co Řekové objevili, o jiných částech matematiky nic nevěděli,

\Rightarrow ještě na začátku sedmnáctého století byla geometrie královskou disciplínou matematiky.

René Descartes (odtud název souřadnic kartézské)

Analytická geometrie: body v rovině (nebo v prostoru) popíšeme pomocí souřadnic (uspořádané n -tice čísel), pro každý geometrický útvar najdeme rovnici (nerovnici), body, které této rovnici (nerovnici) vyhovují, jsou body daného geometrického útvaru,

\Rightarrow hledání průsečíků = řešení soustav rovnic (nerovnic),

\Rightarrow geometrie se změnila z kreslení na počítání.

Ve své knize Geometrie Descartes podává pomocí analytického přístupu obecné řešení Pappovy úlohy (hledání kružnice, která se dotýká kružnice nebo přímky v zadaném bodě), kterou Řekové uměli řešit pouze pro dvě přímky \Rightarrow

- konec geometrie jako královské disciplíny,
- novověká matematika překonává starověkou.

Později: Tři klasické problémy antické matematiky (zdvojení krychle, trisekce úhlu, kvadratura kruhu) se nikdy nepovedlo vyřešit.

Pomocí analytické geometrie je možné snadno dokázat, že tyto úlohy jsou neřešitelné

\Rightarrow definitivní potvrzení obráceného vztahu geometrie a algebry.

Souřadnice na přímce

Číselná osa:

- máme přímku p ,
- zvolíme bod O (počátek),
- zvolíme bod I , tak aby $|OI| = 1$,
- každému bodu X přímky p přiřadíme reálné číslo $x = |OX|$, leží-li bod X na polopřímce OI , a číslo $x = -|OX|$, leží-li bod X na polopřímce opačné k polopřímce OI .

Souřadnice v rovině

Kartézskou soustavou souřadnic v rovině nazýváme dvojici číselných os x, y v rovině, pro které platí:

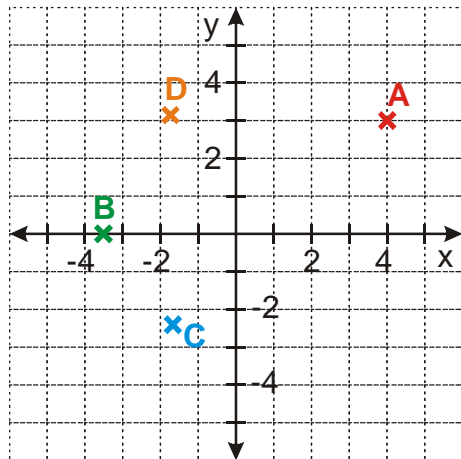
1. obě osy jsou navzájem kolmé,
2. jejich průsečíku O odpovídá na obou osách číslo 0.

Terminologie:

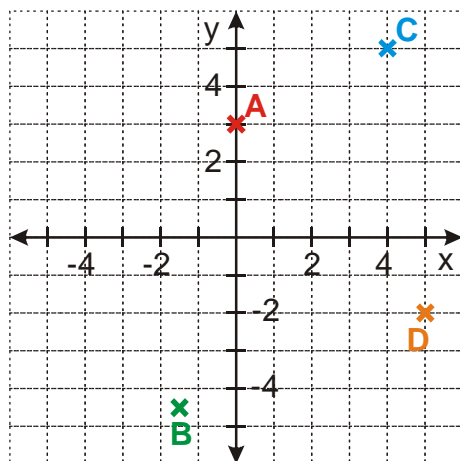
- bod O – počátek kartézské soustavy souřadnic,
- přímky x, y – souřadné osy.

Př. 1: Do kartézské soustavy souřadnic Oxy zobraz body $A[4;3]$, $B[-3,5;0]$,

$$C\left[-\frac{5}{3}; -2,4\right], D[-\sqrt{3}; \pi].$$



Př. 2: Urči souřadnice bodů na obrázku:



Souřadnice zakreslených bodů:

$$A[0;3]$$

$$B[-1,5;-4,5]$$

$$C[4;5]$$

$$D[5;-2]$$

Pokud nebude řečeno jinak, nebudeme v analytické geometrii pod pokynem sestroj rozumět rýsování na papír, ale nalezení souřadnic hledaných bodů výpočtem.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo ze žáků problémy s předchozími příklady, je nezbytně nutné, aby si zopakoval základy kreslení grafů a kartézské soustavy.

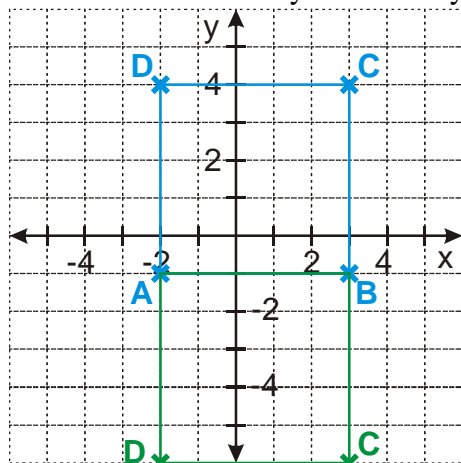
Pedagogická poznámka: Přes předchozí poznámku mají někteří studenti tendenci v následujících příkladech rýsovat a nepočítat.

Pedagogická poznámka: Vlastně pro celou analytickou geometrii platí, že je na jednu stranu potřeba, aby si studenti kreslili náčrtky, které jim dají představu o situaci, kterou počítají. Na druhou stranu je třeba bránit tomu, aby kreslením zbytečně přesných

obrázků (v tomto případě například číslování os podle pravítka až do deseti) ztratili příliš mnoho času.

Př. 3: Sestroj čtverec $ABCD$, jsou-li dány body $A[-2;-1]$, $B[3;-1]$.

Zakreslíme si oba body do soustavy souřadnic a dokreslíme si hledaný čtverec.



Z obrázku je zřejmé, že existují dvě řešení a strana čtverce má délku 5. \Rightarrow

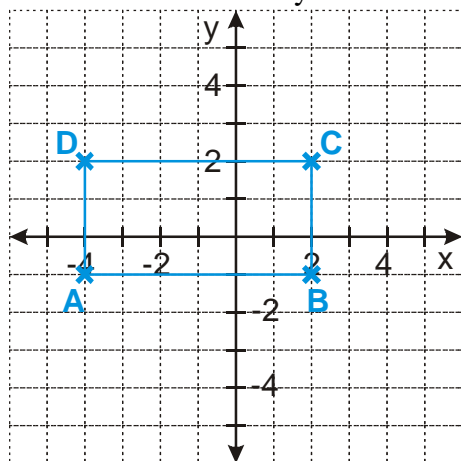
$$C_1[3; -1+5] \Rightarrow C_1[3; 4] \quad D_1[-2; -1+5] \Rightarrow D_1[-2; 4]$$

$$C_2[3; -1-5] \Rightarrow C_2[3; -6] \quad D_2[-2; -1-5] \Rightarrow D_2[-2; -6]$$

Pedagogická poznámka: Část studentů zapomene na spodní zelený čtverec. Stačí upozornit, že jim něco chybí.

Př. 4: V obdélníku $ABCD$ platí: $a = 6$, $b = 3$. Urči souřadnice jeho vrcholů pokud platí: $B[2;-1]$, strana AB je rovnoběžná s osou x , strana BC je rovnoběžná s osou y , x -ová souřadnice bodu A je záporná a y -ová souřadnice bodu C je kladná.

Zakreslíme do soustavy souřadnic bod B a celý obdélník $ABCD$:



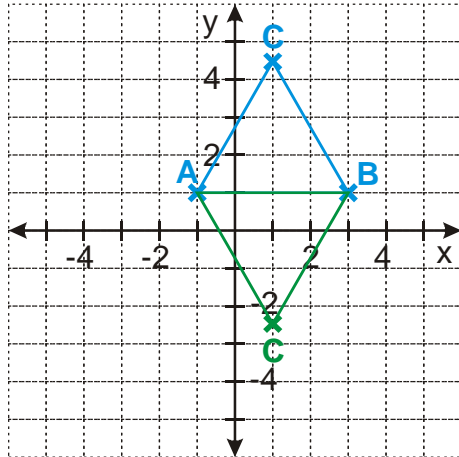
Z obrázku je zřejmé, že platí:

$$A[2-6; -1] \Rightarrow A[-4; -1], \quad C[2; -1+3] \Rightarrow C[2; 2], \quad D[-4; -1+3] \Rightarrow D[-4; 2].$$

Pedagogická poznámka: Po zkušenostech s předchozím příkladem někteří studenti nezkontrolují platnost všech podmínek a kreslí obdélníků víc. Opět stačí upozornit na zadání.

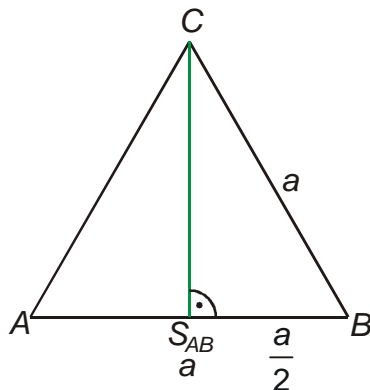
Př. 5: Sestroj rovnostranný trojúhelník ABC . Jsou dány body $A[-1;1]$, $B[3;1]$.

Zakreslíme si zadané body do soustavy souřadnic.



Zbývající vrchol trojúhelníka budeme hledat pomocí výšky na stranu $AB \Rightarrow$

- x -ová souřadnice se rovná 1 (stejná jako souřadnice středu úsečky AB),
- y -ová souřadnice se liší od souřadnic bodů A, B o velikost výšky.



Délku výšky $S_{AB}C$ určíme z pravoúhlého trojúhelníka $S_{AB}BC$:

$$|S_{AB}C|^2 = |BC|^2 - |S_{AB}B|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|S_{AB}C|^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$|S_{AB}C| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Výška trojúhelníka: $v = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

$$C_1[1; 1+2\sqrt{3}]$$

$$C_2[1; 1-2\sqrt{3}]$$

Pedagogická poznámka: Obrázek nakreslí všichni, stejně tak nemají studenti problémy s určením x -ové souřadnice bodů C_1, C_2 , ale určení y -ové souřadnice není tak snadné. Poměrně často se objevuje výsledek $C_1[1; 5]$ s tím, že strana trojúhelníka je 4. Stačí, aby si studenti napsali ke stranám trojúhelníka jejich délky.

Shrnutí: V analytické geometrii popisujeme body pomocí jejich kartézských souřadnic.