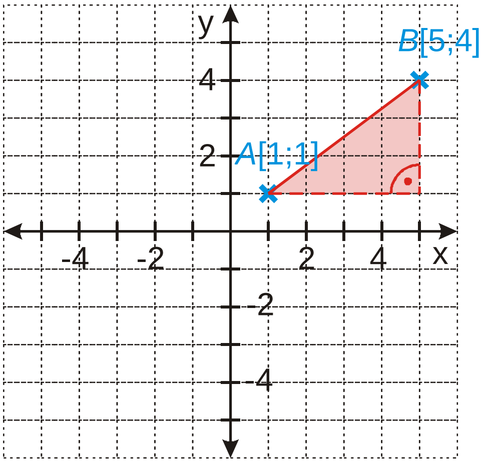
7.1.3 Vzdálenost bodů

Předpoklady: 7102

Př. 1: Urči vzdálenost bodů $A[1;1]$ a $B[5;4]$. Na základě řešení příkladu se pokus sestavit obecný vzorec pro vzdálenost bodů $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$.



Z obrázku je vidět, že vzdálenost $|AB|$ se rovná délce přepony v pravoúhlém trojúhelníku:
$|AB| = c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$.

Jak postupovat obecně bez obrázku, když známe souřadnice bodů $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$?
Musíme určit délky odvěsen:

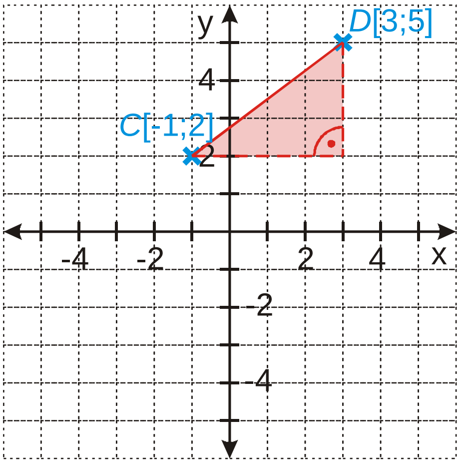
- $4 = 5-1 = b_1 - a_1$,
- $3 = 4-1 = b_2 - a_2$,

$\Rightarrow$ vzorec: $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2+(4-1)^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

Př. 2: Najdi situace, ve kterých by se při prvním pohledu mohlo zdát, že vzorec odvozený v předchozím příkladu pro výpočet vzdáleností dvou bodů neplatí nebo nebude použitelný. Ověř v těchto případech jeho platnost.

a) Rozdíl $b_1 - a_1$ nemusí být vždy kladný.
Například pokud bychom prohodili body z příkladu 1:
$B[1;1]$, $A[5;4]$: $|AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{(1-5)^2+(1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = 5$
$\Rightarrow$ při umocňování na druhou případné záporné znaménko zmizí $\Rightarrow$ nezáleží na tom, v jakém pořadí body do vzorce dosadíme.

b) Jak funguje výpočet rozdílu $b_1 - a_1$ v případě, že je jedna ze souřadnic záporná?
Zkusíme body $C[-1;2]$, $D[3;5]$.



Zkusíme obě možnosti výpočtu:

- $(b_1 - a_1) = [3-(-1)]^2 = 4^2 = 16$,
- $(a_1 - b_1) = [(-1)-3]^2 = (-4)^2 = 16$.

V obou případech jsme získali stejný správný výsledek.

Je to jasné, protože platí $(b_1 - a_1)^2 = |b_1 - a_1|^2$ a $|b_1 - a_1|$ je vzdálenost obrazů čísel na číselné ose.

Vzdálenost bodů $A[a_1;a_2]$ a $B[b_1;b_2]$ v rovině je dána vztahem $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

Pedagogická poznámka: Při vysvětlování vzorce zdůrazňuji, že jde o aplikaci Pythagorovy věty a je dobré si jako použití Pythagorovy věty vzorec pamatovat. Pravděpodobnost, že si studenti něco budou pamatovat je tak daleko větší (a jde navíc o správný způsob pamatování si).

Př. 3: Urči vzdálenost bodů
a) $A[1;2]$ a $B[6;14]$ b) $C[5;-1]$ a $D[1;2]$ c) $E[-2;-5]$ a $F[-4;5]$

a) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{(6-1)^2 + (14-2)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

b) $|CD| = \sqrt{(d_1 - c_1)^2 + (d_2 - c_2)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (2-[-1])^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

c) $|EF| = \sqrt{(f_1 - e_1)^2 + (f_2 - e_2)^2} = \sqrt{[-4-(-2)]^2 + [5-(-5)]^2} = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

Dodatek: Na pořadí, ve kterém body do vzorečku dosadíme samozřejmě nezáleží.
$|BA| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(1-6)^2 + (2-14)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$

Př. 4: Urči zbývající souřadnici bodu B tak, aby platilo: $|AB| = 2\sqrt{5}$, $A[-2;3]$, $B[x;1]$.

Napíšeme rovnici pro vzdálenost bodů *A*, a *B* a dosadíme souřadnice ze zadání.

$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \sqrt{[x-(-2)]^2 + (1-3)^2} = \sqrt{[x+2]^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

Získali jsme rovnici $\Rightarrow$ mechanická záležitost $\sqrt{[x+2]^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ $\quad /^2$.

$(x+2)^2 + 4 = 20$

$x^2 + 4x + 4 + 4 = 20$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$(x+6)(x-2)=0$

$x_1=-6 \Rightarrow B_1[-6;1]$ $\qquad$ $x_2=2 \Rightarrow B_2[2;1]$

Dodatek: Rovnici je možné řešit také takto: $(x+2)^2+4=20$.

$(x+2)^2=16$

$x+2=\pm4 \Rightarrow x_1=-6 \Rightarrow B_1[-6;1]$ $\qquad$ $x_2=2 \Rightarrow B_2[2;1]$

Tento postup doporučuji pouze u žáků, kteří dobře ví, co dělají. Ostatní mají tendenci jeden z kořenů zapomínat nebo porcovat odmocninu přes sčítání.

Př. 5: Na ose *x* najdi bod *A* tak, aby byl od bodu $B[-3;2]$ vzdálený $2\sqrt{10}$.

Problém: Dosazením do vzorce pro vzdálenost můžeme získat maximálně jednu rovnici $\Rightarrow$ musíme určit jednu ze souřadnic bodu *A*.

Bod *A* je na ose *x* $\Rightarrow$ *y*-ová souřadnice bodu je nula $\Rightarrow$ $A[x;0]$.

Teď má cenu dosazovat: $|AB|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}=\sqrt{(-3-x)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{10}$.

$\sqrt{(3+x)^2+4}=2\sqrt{10} \qquad /^2$

$9+6x+x^2+4=4\cdot 10$

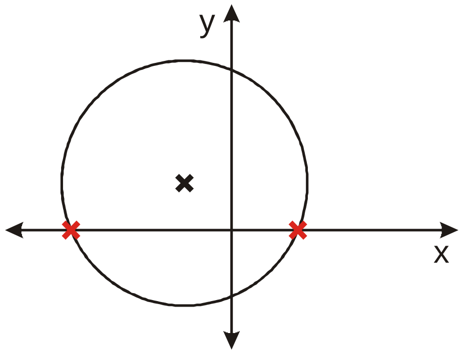
$x^2+6x-27=0$

$(x+9)(x-3)=0$

$x_1=-9 \Rightarrow A_1[-9;0]$ $\qquad$ $x_2=3 \Rightarrow A_2[3;0]$

Je rozumné, že jsme v předchozím příkladu získali dva body?

Určitě je. Body vzdálené od bodu $B[-3;2]$ o $2\sqrt{10}$, tvoří kružnici. Osa *x* se s takovou kružnicí může protínat ve dvou bodech.



Dodatek: Kvadratická rovnice, kterou jsme získali při řešení předchozího příkladu může mít 0, 1 nebo dvě řešení. Stejně tak může mít kružnice s přímkou 0, 1 nebo 2 průsečíky.

Pedagogická poznámka: Od začátku je nutné vést studenty k tomu, aby ještě před řešením příkladu měli přibližnou představu o výsledku. Náčrtky nemusí být konkrétní, naopak snažím se zabránit tomu, aby kreslili přesnou polohu bodů v souřadnicích.

Pedagogická poznámka: Poradit se souřadnicemi bodu A potřebuje v předchozím příkladu většina žáků.

Pedagogická poznámka: Řešení následujícího příkladu musí provést každý samostatně. Lepších žáci (jedničkáři a dvojkaři) se k řešení nesmí vyjadřovat a pokud vzorec vyberou správně, počítají příklad 7. Zbytek třídy nechám hlasovat a pak se snažíme diskusí dojít ke správnému řešení. Příklad 7 s touto částí třídy neřešíme.

Př. 6: Rozhodni, který z následujících vzorců, správně určuje vzdálenost bodu A, B v prostoru:

a) $|AB| = \sqrt[3]{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

b) $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Správný vzorec je $|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Několik důvodů:

- Vzdálenost musí být v metrech a tedy může jít o druhou odmocninu ze součtu druhých mocnin souřadnic. Pokud vzorec obsahoval třetí odmocninu, museli bychom ji počítat ze součtu třetích mocnin.
- Vzdálenost dvou bodů v prostoru odpovídá tělesové úhlopříčce kvádru $\Rightarrow$ vzorec je opět aplikací Pythagorovy věty.

Vzdálenost bodů $A[a_1; a_2; a_3]$ a $B[b_1; b_2; b_3]$ v prostoru udává vzorec
$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

Pedagogická poznámka: Poměrně dost studentů vyhodnotí v předchozím příkladu jako správnou první možnost. Zdůvodní to většinou stylem: „když se tam sčítají tři závorky, musí se udělat třetí odmocnina“, nebo „ve dvou rozměrech byla druhá odmocnina, ve třech musí být třetí“. Jde o dobrý test toho, zda jsou schopni rozlišit povrchní nebo vnitřní podobnosti.

Pedagogická poznámka: Úspěšnost při řešení předchozího příkladu podle mých zkušeností hodně závisí na době, kterou ve třídě učím, pohybuje se od 0 do 70%. Beru to jako dobrou zprávu, protože se zdá, že je možné něco na způsobu, kterým žáci uvažují, doopravdy něco změnit.

Př. 7: Najdi v rovině všechny body, které mají stejnou vzdálenost od bodů $A[-1;-2]$ a $B[3;0]$. Nejdříve odhadni výsledek příkladu. Poté příklad vyřeš početně a výsledek zkus alespoň částečně ověřit.

Hledáme body, které mají stejnou vzdálenost od bodů $A[-1;-2]$ a $B[3;0]$ $\Rightarrow$ řešením bude osa úsečky AB (přímka, která prochází bodem $S_{AB}[1;-1]$ a je na úsečku AB kolmá), tedy nekonečně mnoho bodů.

Vzdálenost bodu $X[x; y]$:

- od bodu $A[-1;-2]$: $|XA| = \sqrt{(x-[-1])^2 + (y-[-2])^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$,
- od bodu $B[3;0]$: $|XB| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$.

Platí: $|XA| = |XB|$.

$\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \qquad /^2$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = (x-3)^2 + y^2$

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2$

$8x + 4y - 4 = 0 \qquad /:4$

$2x + y - 1 = 0 \Rightarrow$ jedna rovnice se dvěma neznámými $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení, přesně podle očekávání (jednu souřadnici zvolíme a druhou dopočítáme) $\Rightarrow$ $y = 1 - 2x$ (předpis lineární funkce, jejímž grafem je přímka) $\Rightarrow$ $K = \{[x;1-2x], x \in R\}$ (případně $K = \{[k;1-2k], k \in R\}$).

Ověříme, zda mezi nalezenými body je bod $S_{AB}[1;-1]$: $2x + y - 1 = 2 \cdot 1 + (-1) - 1 = 0$.

Dodatek: Řešením předchozího příkladu je přímka $\Rightarrow$ zápisy řešení odpovídají zápisům přímky $\Rightarrow$ zdá se, že přímku je možné zapsat v rovině dvěma způsoby: $2x + y - 1 = 0$ nebo $[k;1-2k], k \in R$.

Př. 8: Petáková:
strana 109/cvičení 55
strana 109/cvičení 57

Shrnutí: Vzorec pro vzdálenost bodů je aplikací Pythagorovy věty.